

MATEMÁTICA

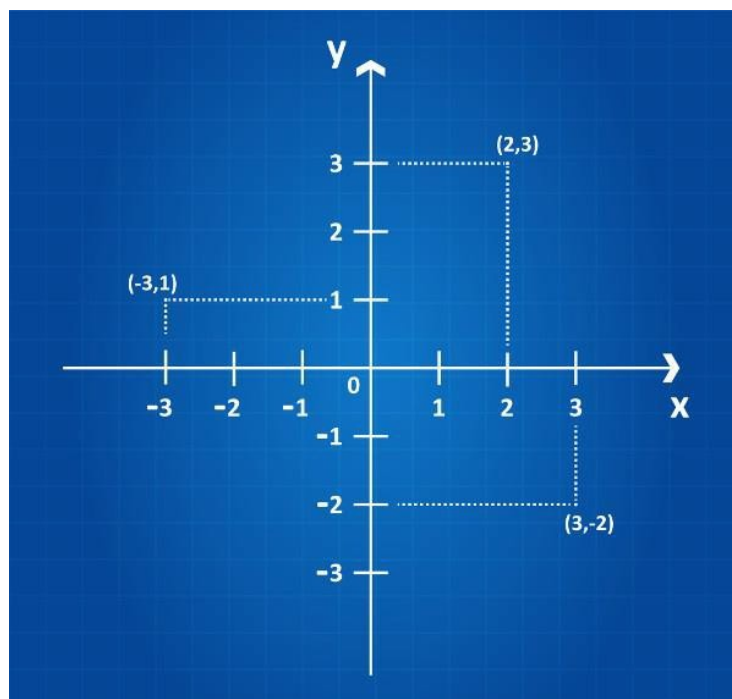
FUNÇÕES

Plano Cartesiano

O **plano cartesiano** é formado por **duas retas reais perpendiculares**, ou seja, o ângulo entre elas é de 90° . Essas retas determinam um **único plano**, que é denominado com sistema ortogonal de coordenadas cartesianas ou somente plano cartesiano.

No ano de 1637, **René Descartes** teve a brilhante ideia de relacionar álgebra e geometria, dando início à conhecida **geometria analítica**, método que possibilita descrever a geometria utilizando uma menor quantidade de diagramas e desenhos. Apesar de os créditos dessa descoberta serem dados a Descartes, Pierre de Fermat já conhecia e utilizava alguns conceitos de geometria analítica, logo o **plano cartesiano**.

Para que serve um plano cartesiano?



Plano cartesiano formado pelos eixos x e y.

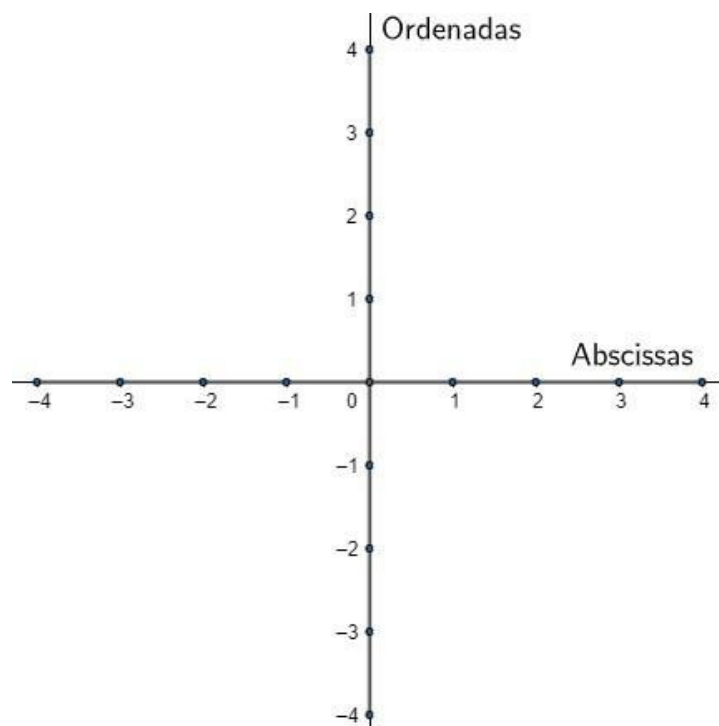
O plano cartesiano é um **sistema de coordenadas** desenvolvido por René Descartes. Esse sistema de coordenadas é formado por duas retas perpendiculares, chamadas de eixos cartesianos. Esses eixos determinam um **único plano**, assim, é possível determinar a localização no sistema de coordenadas de todos os pontos e, conseqüentemente, de qualquer objeto formado por esses pontos que estejam nesse **plano**.

Desse modo, perceba que é possível representar pontos ou objetos utilizando somente suas coordenadas, isto é, não é necessário construir um desenho de um objeto, basta somente expressar suas coordenadas.

Muitos problemas da **Matemática** só puderam ser resolvidos graças a essa concepção, como para calcular a distância entre dois pontos ou calcular a **área de um triângulo**. Esses assuntos são a base da **geometria analítica**, que é, por sua vez, a base para desenvolver o **cálculo diferencial e integral**.

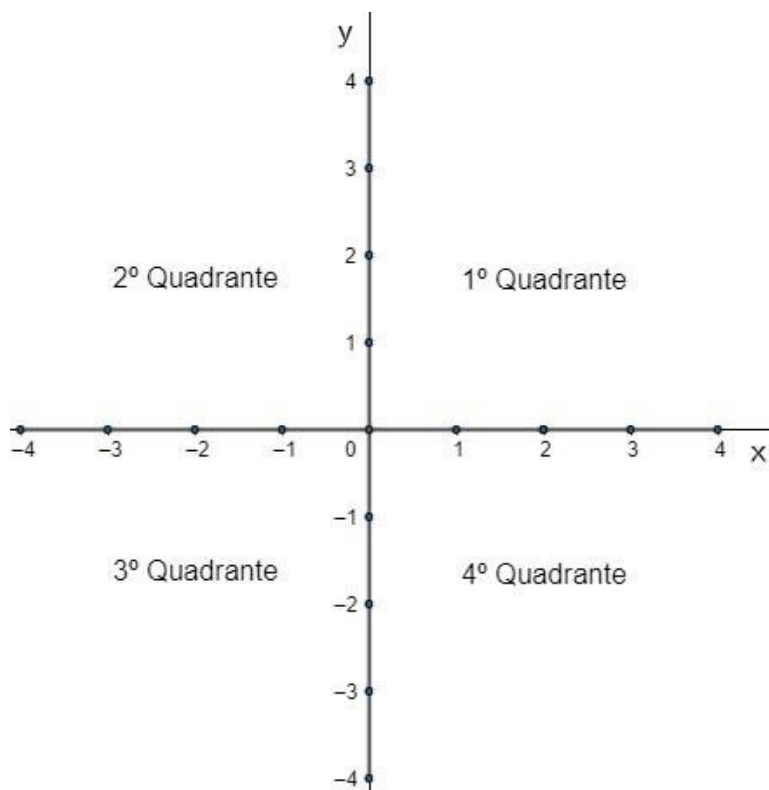
Como se faz um plano cartesiano?

O plano cartesiano é formado por duas retas reais em que o **ângulo** entre elas é de 90° , ou seja, elas são perpendiculares. Essas retas são chamadas de eixos. Assim, há o **eixo horizontal**, que é chamado de **eixo das abscissas**, e o eixo vertical, que é o eixo das ordenadas.



Perceba que as retas perpendiculares dividem o plano em **quatro regiões**, que são chamadas de **quadrantes** – isso porque as duas retas perpendiculares dividem o plano em **quatro** regiões.

Vamos representar os quadrantes no sentido anti-horário. Veja:



Note as relações entre os valores dos eixos x (abscissas) e y (ordenadas). No 2º quadrante, o valor da abscissa é sempre menor que o valor da ordenada, ou seja, $x < y$. No 4º quadrante, o valor da abscissa é sempre maior que o valor da ordenada, assim, $x > y$.

Nos quadrantes ímpares, 1º e 3º, já não podemos afirmar alguma relação, pois neles podemos ter abscissas maiores, menores ou iguais aos valores das ordenadas.

Ponto em um plano cartesiano

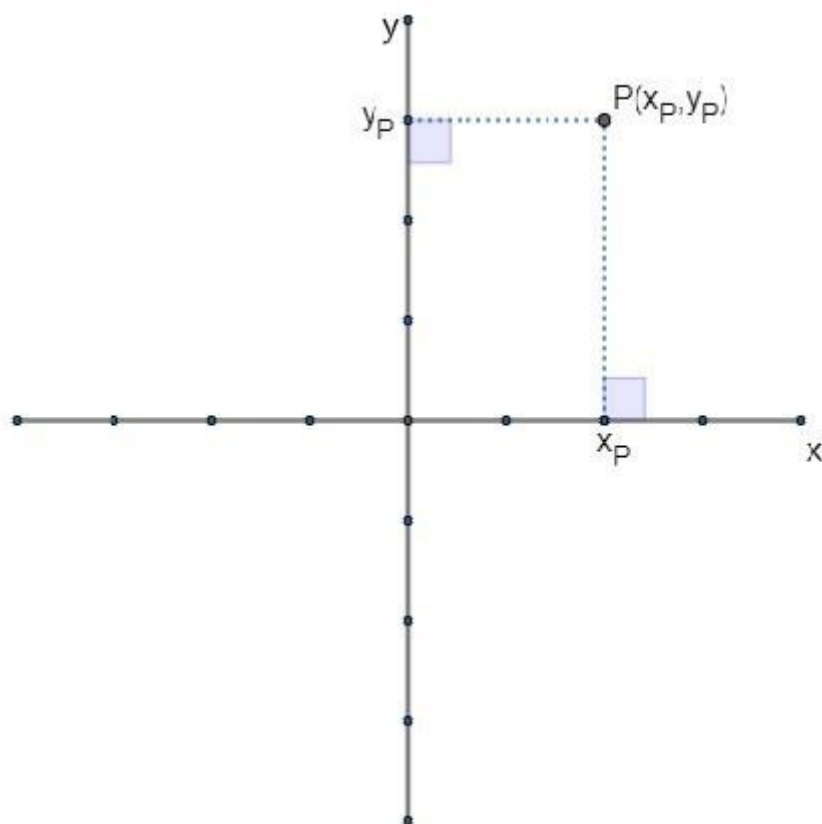
Um ponto qualquer do plano cartesiano é indicado a partir de suas coordenadas, que são representadas por um **par ordenado**, ou seja, um ponto é formado por um conjunto de **dois** números que possui uma **ordem** a ser seguida (**ordenado**). A notação do par ordenado ou ponto P é:

$P(x, y)$

$x \rightarrow$ à Abscissa

$y \rightarrow$ à Ordenada

Assim, para localizar um ponto, basta marcar o valor no eixo das abscissas e, em seguida, o valor no eixo das ordenadas. Depois trace uma **reta perpendicular** aos pontos x e y encontrados. O local onde essas retas perpendiculares se encontram é onde ponto P está.



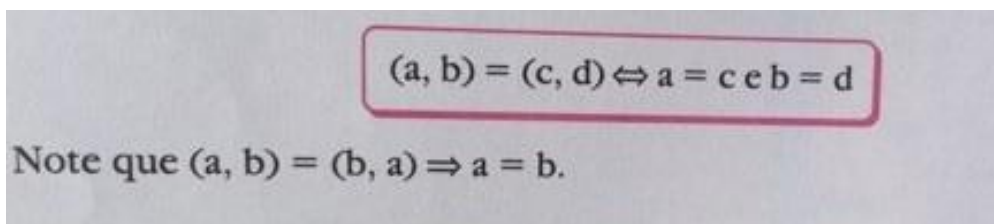
MATEMÁTICA

FUNÇÕES

Produto Cartesiano

O produto cartesiano é usado na teoria dos conjuntos. É aplicado em conjuntos distintos e corresponde à multiplicação entre os pares ordenados. Esse método também foi criado por René Descartes.

Entendemos por par ordenado um conjunto de dois elementos, sendo:



$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$

Note que $(a, b) = (b, a) \Rightarrow a = b$.

Exemplos:

a) $(3, b) = (a, -5)$ para $a = 3$ e $b = -5$

b) $(5, y + 1) = (x - 1, 4)$

para $x - 1 = 5$, ou seja, $x = 6$ e para $y + 1 = 4$, ou seja, $y = 3$

Considerando dois conjuntos, A e B, não-vazios, chamamos de produto cartesiano de A por B o conjunto indicado por $A \times B$, formado por todos os pares ordenados, nos quais o primeiro elemento pertence ao conjunto A e o segundo pertence ao conjunto B:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Notação: $A \times B$

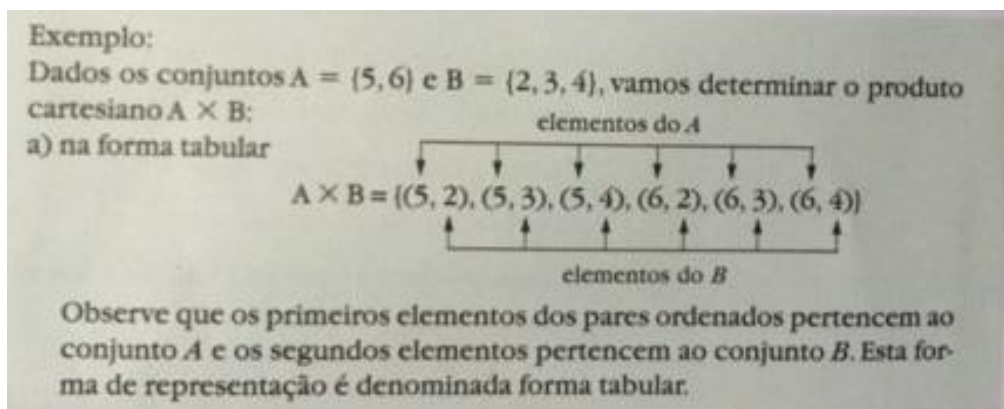
Leitura: A cartesiano B

Elemento: par ordenado (x, y)

Exemplo:

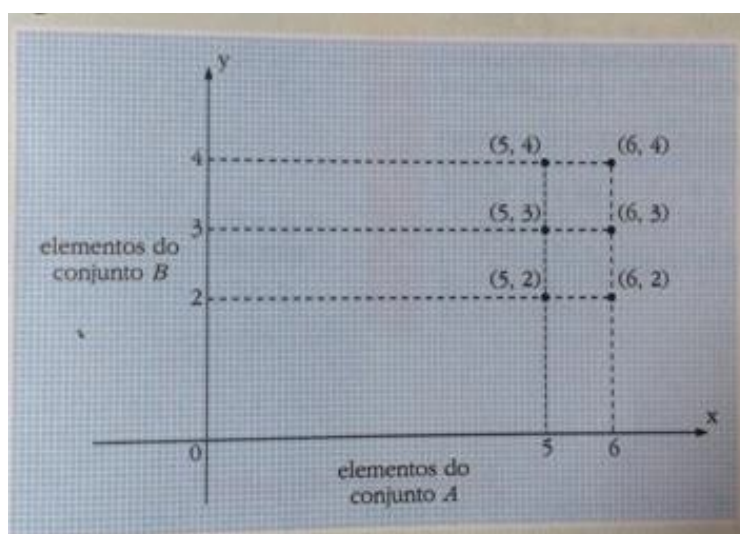
Dados os conjuntos $A = \{5, 6\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$, vamos determinar o produto cartesiano $A \times B$:

na forma tabular



Observe que os primeiros elementos dos pares ordenados pertencem ao conjunto A e os segundos elementos pertencem ao conjunto B . Esta forma de representação é denominada forma tabular.

na forma gráfica:



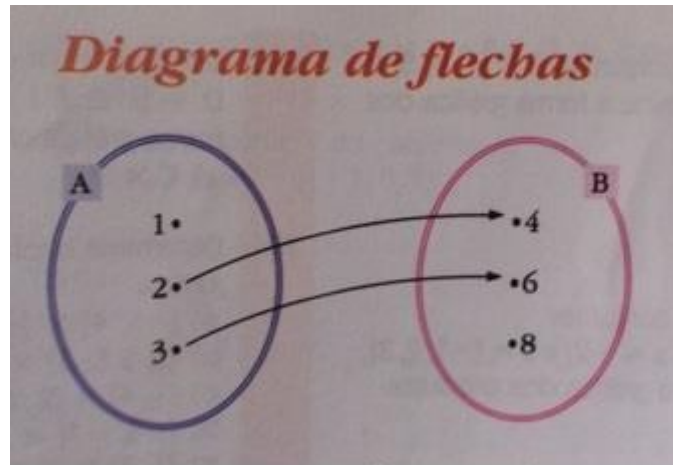
Todo par ordenado (a, b) , de números reais, pode ser representado por um ponto do plano cartesiano.

Observe que, para representar graficamente o produto cartesiano $A \times B$, os elementos do conjunto A são dispostos no eixo das abscissas (horizontal) e os elementos do conjunto B , no eixo das ordenadas (vertical) estando, cada par ordenado do produto, associado a um único ponto do gráfico.

MATEMÁTICA

FUNÇÕES

Diagrama de Flechas



O conjunto D dos primeiros elementos dos pares de R recebe o nome de domínio da relação e o conjunto B, de contradomínio (CD):

$$D = \{2, 3\}$$

$$CD = \{4, 6, 8\}$$

Os elementos do conjunto B que participam da relação formam um conjunto denominado conjunto imagem da relação (Im):

$$Im = \{4, 6\}$$

O gráfico cartesiano dessa relação será constituído apenas pelos pontos correspondentes dos pares ordenados (2, 4) e (3, 6), estando cada par associado a um único ponto.

No eixo das abscissas (horizontal) marcamos os elementos do conjunto A; no eixo das ordenadas (vertical), os elementos do conjunto B.

MATEMÁTICA

FUNÇÕES

Funções

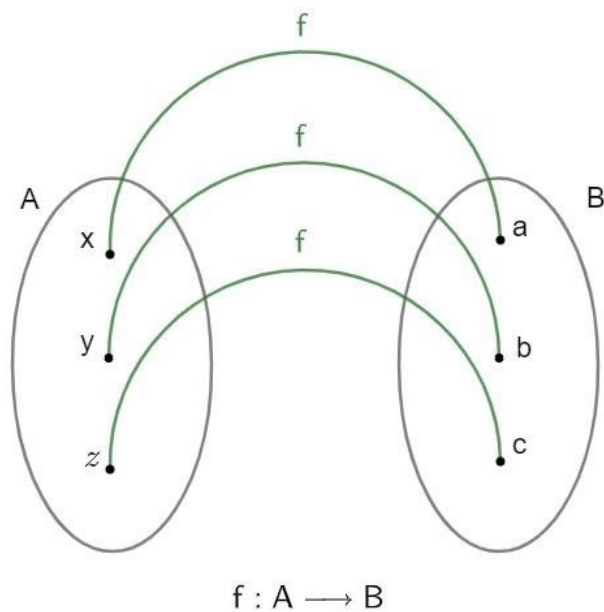
Estabelecemos uma **função** quando relacionamos uma ou mais grandezas. Parte dos fenômenos naturais pode ser estudada graças ao desenvolvimento nessa área da matemática. O estudo das funções é dividido em duas partes, temos a parte geral, em que estudamos os **conceitos gerais**, e a parte específica, em que estudamos os **casos particulares**, como as funções polinomiais e as funções exponenciais.

O que são as funções?

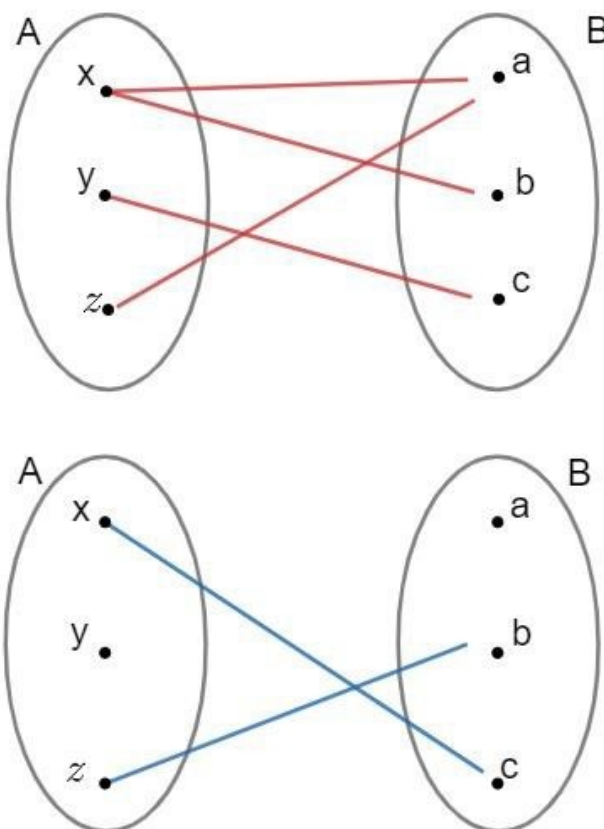
Uma função é uma aplicação que **relaciona os elementos de dois conjuntos não vazios**. Considere dois conjuntos não vazios A e B, em que uma função f relaciona **cada** elemento de A a **um único** elemento de B.

Para entender melhor essa definição, imagine uma corrida de táxi. Para cada viagem, ou seja, para cada distância percorrida, existe um preço diferente e único, isto é, não tem sentido uma viagem ter dois preços diferentes.

Podemos representar essa função que leva elementos do conjunto A para o conjunto B das seguintes maneiras.



Observe que, para cada elemento do conjunto A, existe um **único elemento relacionado** com ele no conjunto B. Agora podemos pensar, afinal, quando uma relação entre dois conjuntos não será uma função? Bom, quando um elemento do conjunto A relacionar-se com dois elementos distintos de B, ou quando sobrar elementos do conjunto A sem se relacionarem com elementos de B. Veja:



De modo geral, podemos escrever uma função de maneira algébrica assim:

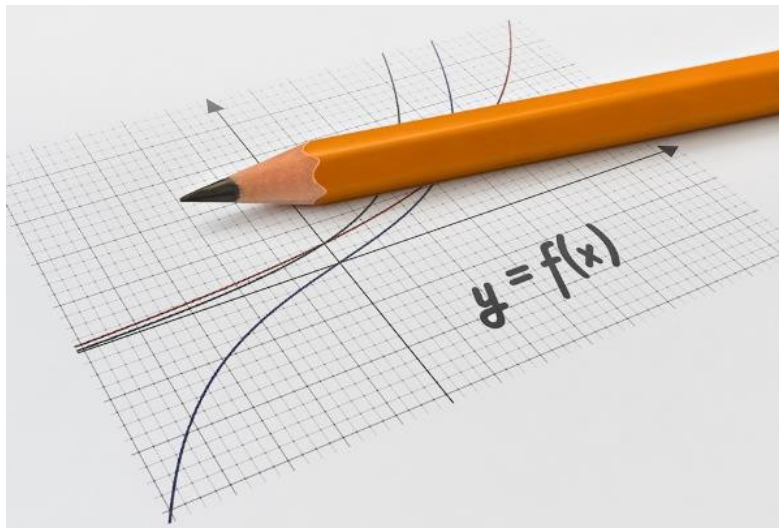
$$f: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow y$$

Note que a função pega elementos do conjunto A (representados por x) e leva-os aos elementos de B (representados por y). Podemos também dizer que os elementos do conjunto B são dados em função dos elementos do conjunto A, logo, podemos representar y por:

$$y = f(x)$$

Lê-se: (y igual f de x)



As representações mais comuns das funções ocorrem no plano cartesiano.

Domínio, contradomínio e imagem de uma função

Quando temos uma função f , os conjuntos que estão sendo relacionados recebem nomes especiais. Assim, considere uma função f que leva elementos do conjunto A para os elementos do conjunto B:

$$f: A \rightarrow B$$

O conjunto A, do que partem as relações, é denominado **domínio** da função, e o conjunto que recebe as “flechas” dessa relação é chamado de **contradomínio**. Denotamos esses conjuntos da seguinte maneira:

$D_f = A \rightarrow$ Domínio de f

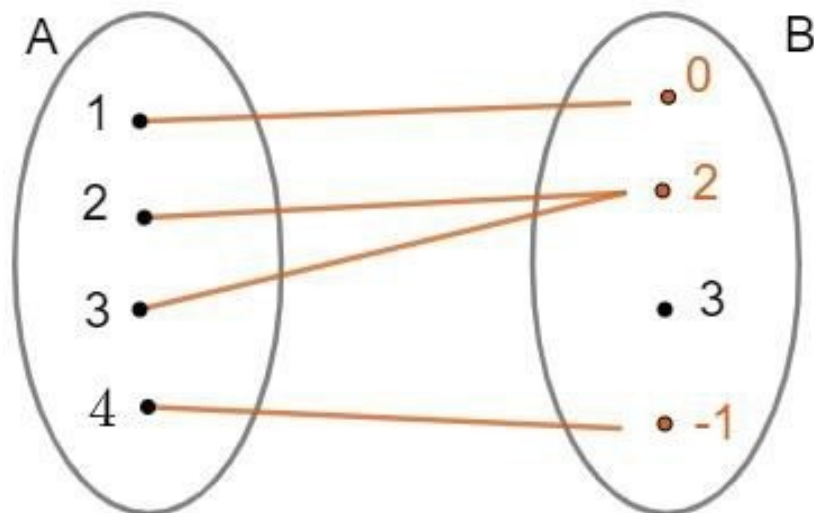
$CD_f = B \rightarrow$ Contradomínio de f

O subconjunto do contradomínio de uma função formado por elementos que se relacionam com elementos do conjunto é denominado **imagem** da função e é denotado por:

$Im_f \rightarrow$ Imagem de f

Exemplo

Considere a função $f: A \rightarrow B$ representada no diagrama a seguir e determine o domínio, o contradomínio e a imagem.



Como foi dito, o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ é o domínio da função f , enquanto o conjunto $B = \{0, 2, 3, -1\}$ é o contradomínio da mesma função. Agora, observe que o conjunto formado por elementos que recebem a flecha (em laranja) formado pelos elementos $\{0, 2, -1\}$ é subconjunto do contradomínio B, esse conjunto é a imagem da função f , assim:

$D_f = A = \{1, 2, 3, 4\}$

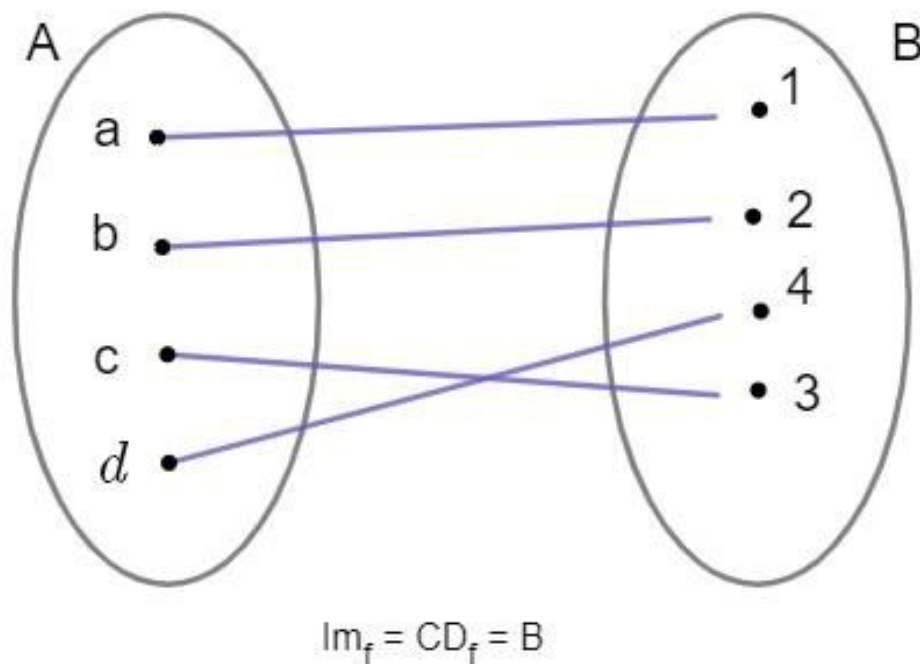
$CD_f = B = \{0, 2, 3, -1\}$

$Im_f = \{0, 2, -1\}$

Dizemos que o **0** é imagem do elemento **1** do domínio, assim como o **2** é imagem dos elementos **2** e **3** do domínio, e **-1** é imagem do elemento **4** do domínio.

Função sobrejetiva

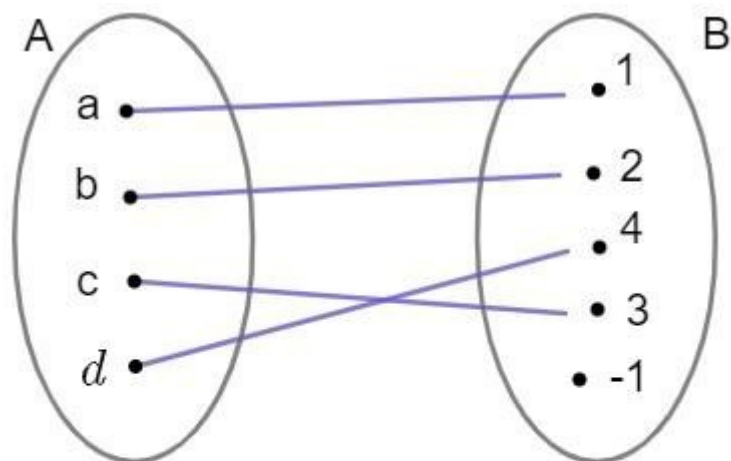
Uma função $f: A \rightarrow B$ será sobrejetiva ou sobrejetora se, e somente se, o conjunto imagem coincidir com o contradomínio, ou seja, **se todos elementos do contradomínio são imagens**.



Dizemos então que uma função é sobrejetora quando todos elementos do contradomínio recebem flechas.

Função injetiva

Uma função $f: A \rightarrow B$ será injetiva ou injetora se, e somente se, elementos distintos do domínio possuírem imagens distintas no contradomínio, isto é, **imagens iguais são geradas por elementos iguais do domínio**.



$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ou

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Veja que a condição é que elementos distintos do domínio relacionem-se com elementos distintos do contradomínio, não havendo problema em sobrar elementos no contradomínio.

Função bijetora

Uma função $f: A \rightarrow B$ será bijetora se, e somente se, ela for **injetora e sobrejetora simultaneamente**, ou seja, elementos distintos do domínio possuem imagens distintas, e a imagem coincide com o contradomínio.

Exemplo

Em cada um dos casos, justifique se a função $f(x) = x^2$ é injetora, sobrejetora ou bijetora.

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

Observe que o domínio da função são todos os reais positivos e que o contradomínio são todos os números reais. Sabemos que a função f é dada por $f(x) = x^2$, agora imagine todos os números reais positivos sendo elevados ao quadrado, todas as imagens serão também positivas. Assim podemos concluir que a função é injetora e não sobrejetora, pois os números reais negativos não vão receber flechas.

Ela é injetora, pois cada elemento do domínio ($\mathbb{R}_+$) relaciona-se apenas com um elemento do contradomínio ($\mathbb{R}$).

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

A função, nesse caso, possui o domínio como sendo todos os reais e o contradomínio como sendo os reais positivos. Sabemos que qualquer número real elevado ao quadrado é positivo, logo, todos os elementos do contradomínio receberam flechas e, assim, a função é sobrejetora. Ela não será injetora pelo fato de elementos do domínio relacionarem-se com dois elementos do contradomínio, por exemplo:

$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$

$$f(2) = (2)^2 = 4$$

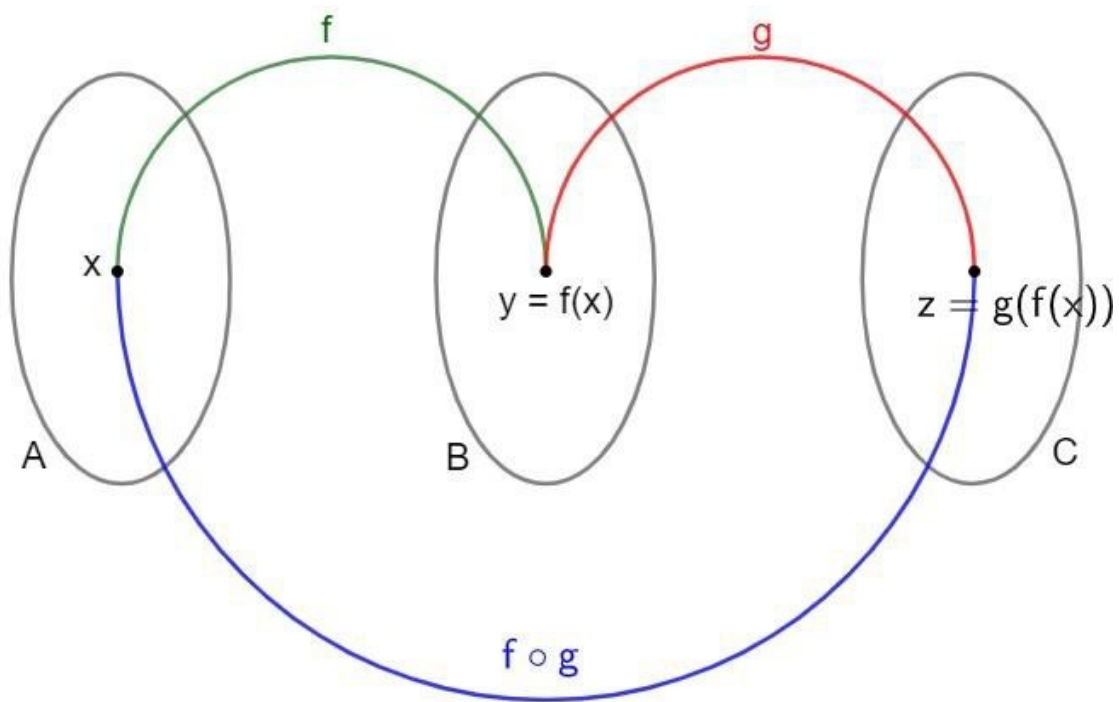
$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

Nesse exemplo a função possui domínio e contradomínio como sendo os números reais positivos, logo, a função é **bijetora**, pois cada número real positivo relaciona-se com um único número real positivo do contradomínio, nesse caso o quadrado do número. Além disso, todos os números do contradomínio receberam flechas.

Função composta

A função composta está associada com a **ideia de atalho**. Considere três conjuntos não vazios A, B e C. Considere também duas funções f e g, em que a função f leva elementos x do conjunto A para elementos $y = f(x)$ do conjunto B, e a função g leva os elementos $y = f(x)$ para elementos z do conjunto C.

A função composta recebe esse nome por ser uma aplicação que leva elementos do conjunto A direto para elementos do conjunto C, sem passar pelo conjunto B, por meio da composição das funções f e g. Veja:



A função denotada por $(f \circ g)$ leva os elementos do conjunto A diretamente para o conjunto C. Ela é chamada de função composta.

Exemplo

Considere a função $f(x) = x^2$ e a função $g(x) = x + 1$. Determine as funções compostas $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$.

A função $f \circ g$ é dada pela função g aplicada na f , ou seja:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Para determinar essa função composta, devemos considerar a função **f**, e, no lugar da variável x , devemos escrever a função **g**. Veja:

$$x^2$$

$$(x+1)^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 + 2x + 1$$

De maneira análoga, para determinar a função composta $(g \circ f)(x)$, devemos aplicar a função **f** na função **g**, ou seja, considerar a função g e escrever a função f no lugar da variável. Veja:

$$(x + 1)$$

$$x^2 + 1$$

Portanto, a função composta $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x^2 + 1$.

Função par

Considere uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, em que A é um subconjunto dos reais não vazio. Uma função f será par somente para todo x real.

$$f(x) = f(-x), \forall x \in A$$

Exemplo

Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$.

Veja que para qualquer valor de x real, se elevado ao quadrado, o resultado é sempre positivo, ou seja:

$$f(x) = x^2$$

e

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

Portanto, $f(x) = f(-x)$ para qualquer valor de x real, assim, a função f é par.

Função ímpar

Considere uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, em que A é um subconjunto dos reais não vazio. Uma função f será ímpar somente para todo x real.

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in A$$

Exemplo

Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$.

Veja que para qualquer valor de x podemos escrever que $(-x)^3 = -x^3$.
Confira alguns exemplos:

$$(-2)^3 = -2^3 = -8$$

$$(-3)^3 = -3^3 = -27$$

Assim podemos afirmar que:

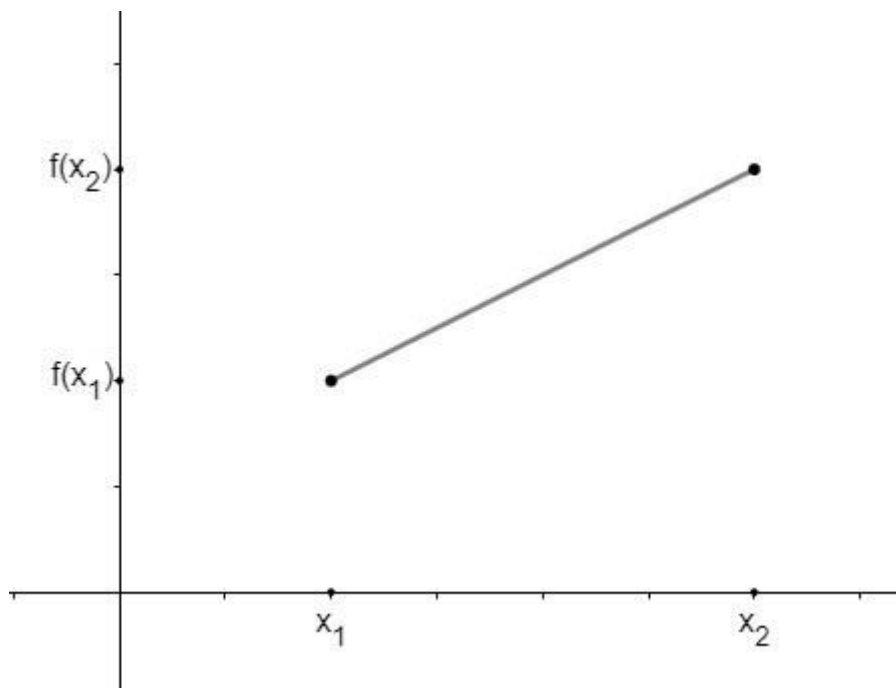
$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3$$

$$f(-x) = (-x)^3 = -f(x)$$

Portanto, para qualquer x real $f(-x) = -f(x)$, e assim a função $f(x) = x^3$ é ímpar.

Função crescente

Uma função f é **crescente** em um intervalo se, e somente se, à medida que os elementos do domínio crescem, suas imagens também crescem. Veja:

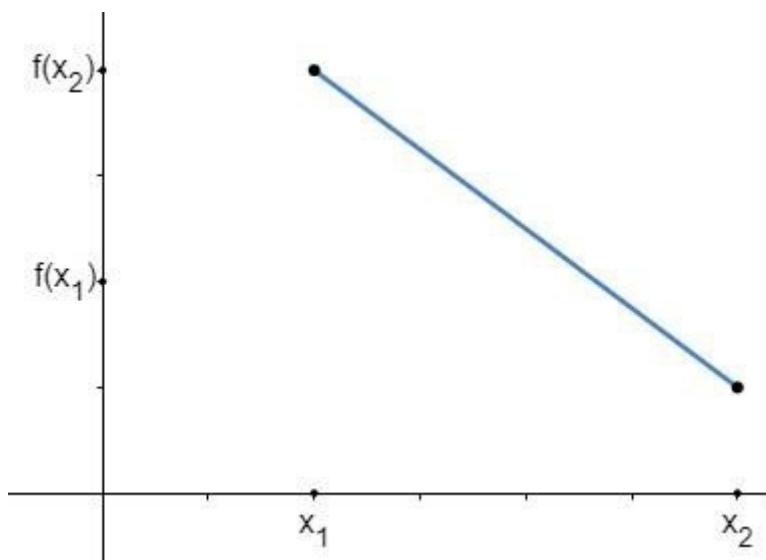


Observe que $x_1 < x_2$ e o mesmo ocorre com a imagem, assim, podemos estabelecer uma condição algébrica para que a função f seja crescente.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Função decrescente

Uma função f é **decrescente** em um intervalo se, e somente se, à medida que os elementos do domínio crescem, suas imagens decrescem. Veja:

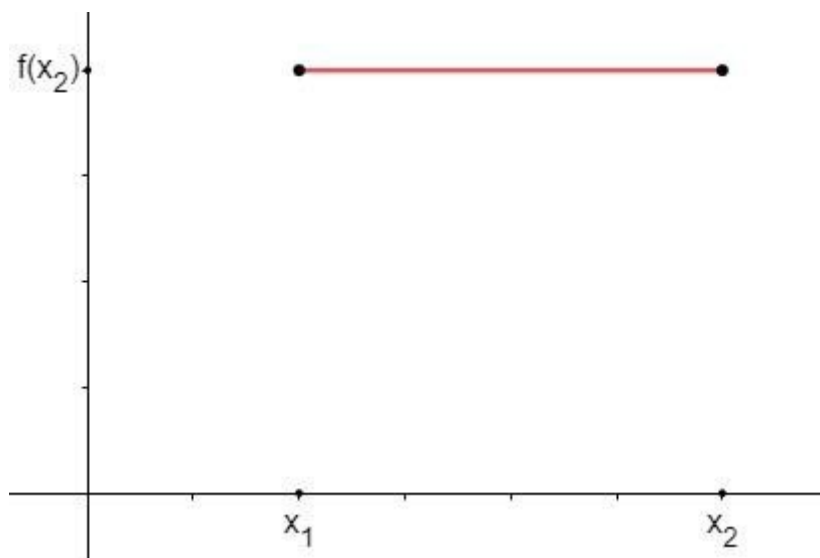


Veja que, no domínio da função, temos que $x_1 > x_2$, entretanto isso não ocorre na imagem da função, em que $f(x_1) < f(x_2)$. Assim podemos estabelecer uma condição algébrica para funções decrescentes. Veja:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Função constante

Como o próprio nome diz, uma **função é constante quando, para qualquer valor** do domínio, o valor da imagem é sempre o mesmo.

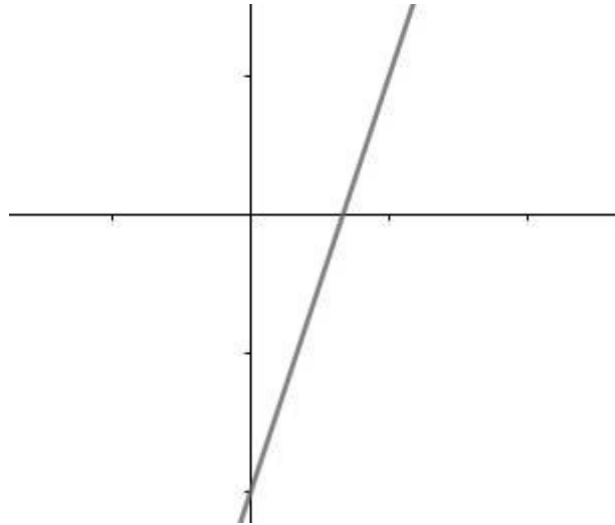


Função afim

A função afim ou polinomial do primeiro grau é escrita na forma:

$$f(x) = ax + b$$

Em que a e b são números reais, a é diferente de zero, e o seu gráfico é uma reta. A função possui domínio real e contradomínio também real.

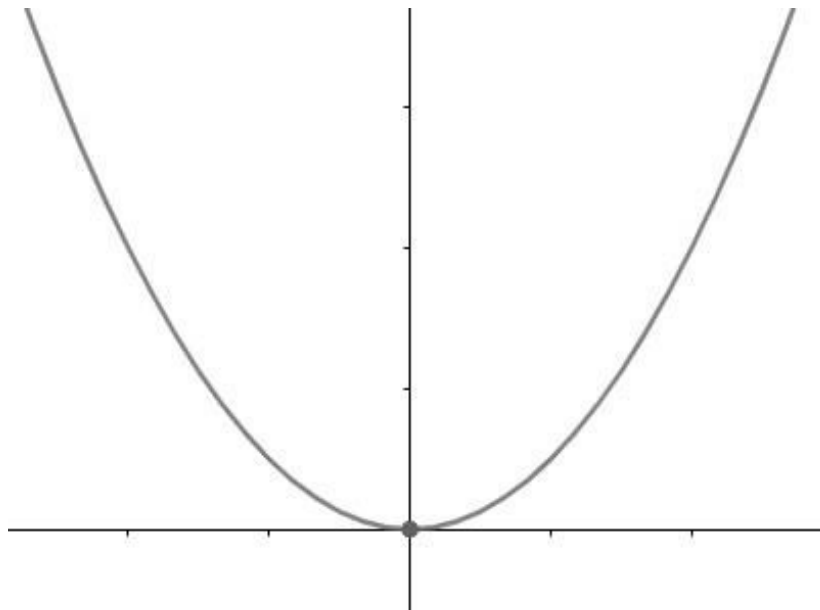


Função quadrática

A função quadrática ou função polinomial do segundo grau é dada por **um polinômio de grau dois**, assim:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Em que a , b e c são números reais com a diferente de zero, e seu gráfico é uma parábola. A função também possui domínio e contradomínio reais.

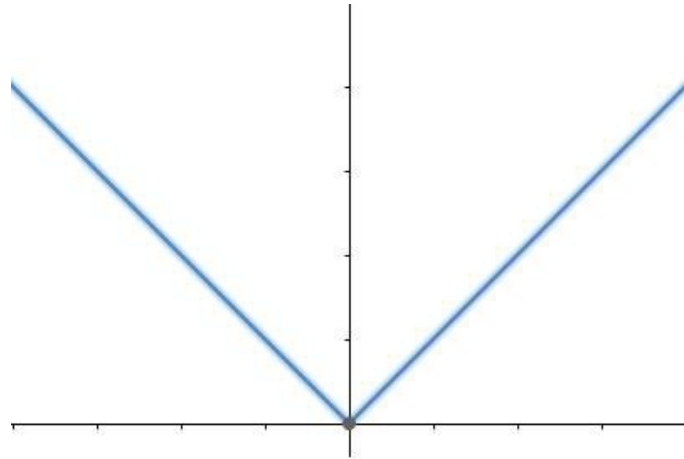


Função modular

A função modular com **variável x encontra-se dentro do módulo** e algebricamente é expressa por:

$$f(x) = |x|$$

A função também possui domínio e contradomínio reais, ou seja, podemos calcular o valor absoluto de qualquer número real.

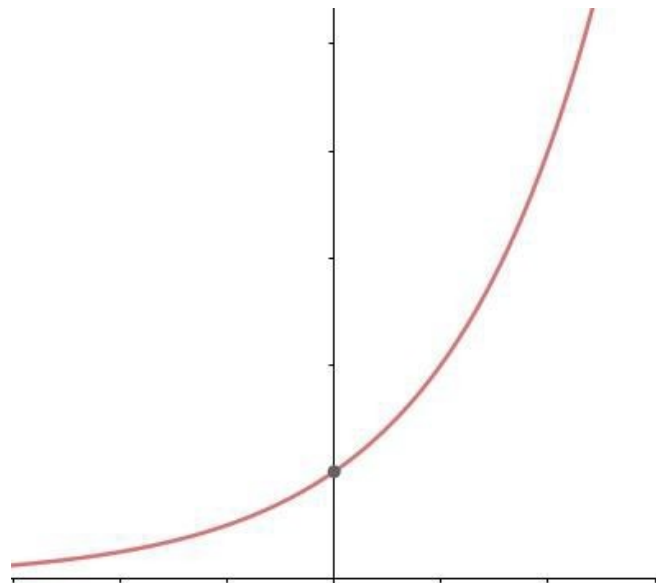


Função exponencial

A função exponencial **apresenta a variável x no expoente**. Ela também possui domínio real e contradomínio real e é descrita algebricamente por:

$$f(x) = a^x$$

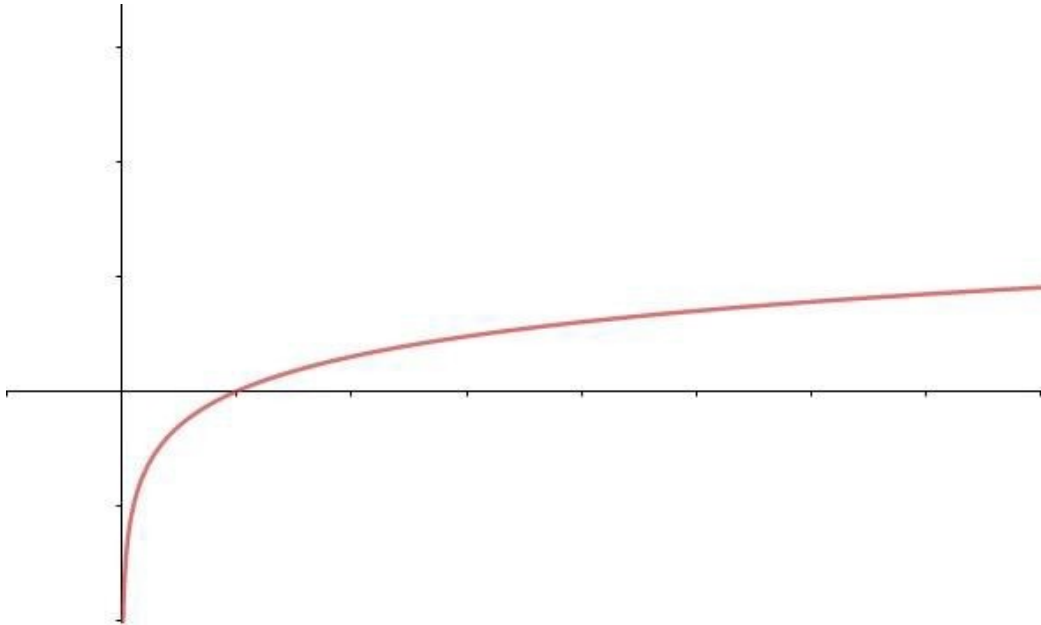
Em que a é um número real maior que zero.



Função logarítmica

A função logarítmica possui a **variável no logaritmando** e o domínio formado por números reais maiores que zero.

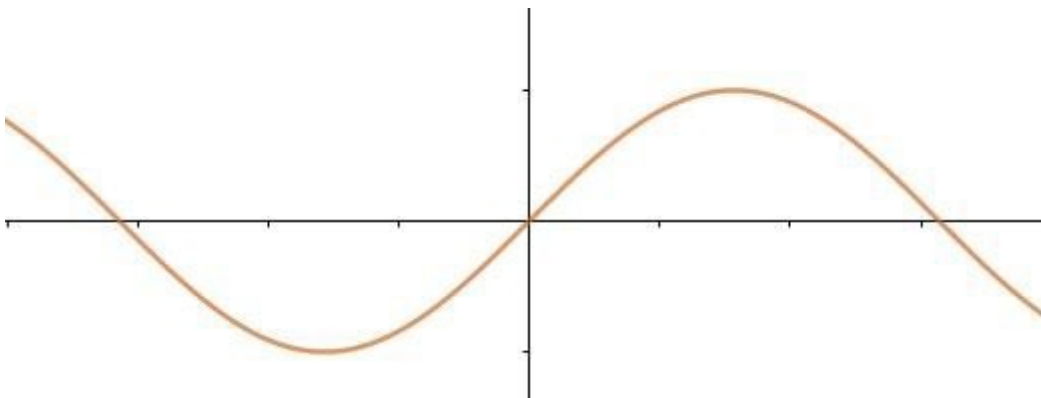
$$f(x) = \log_a x$$



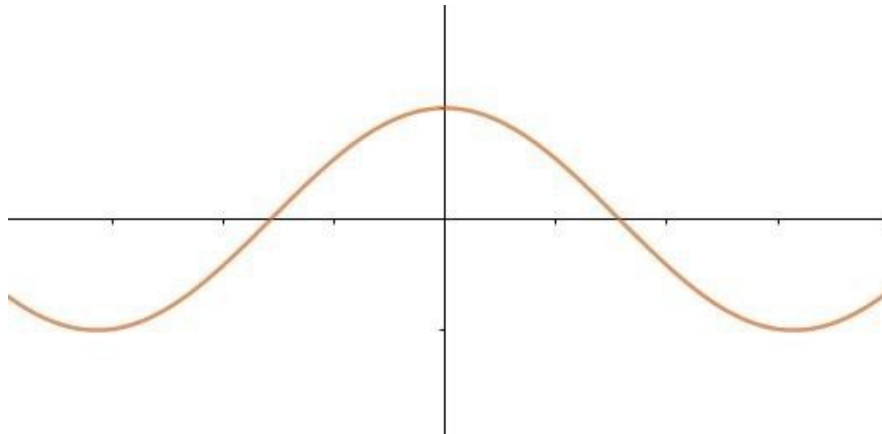
Funções trigonométricas

As funções trigonométricas possuem a **variável x envolvendo as razões trigonométricas**, as principais são:

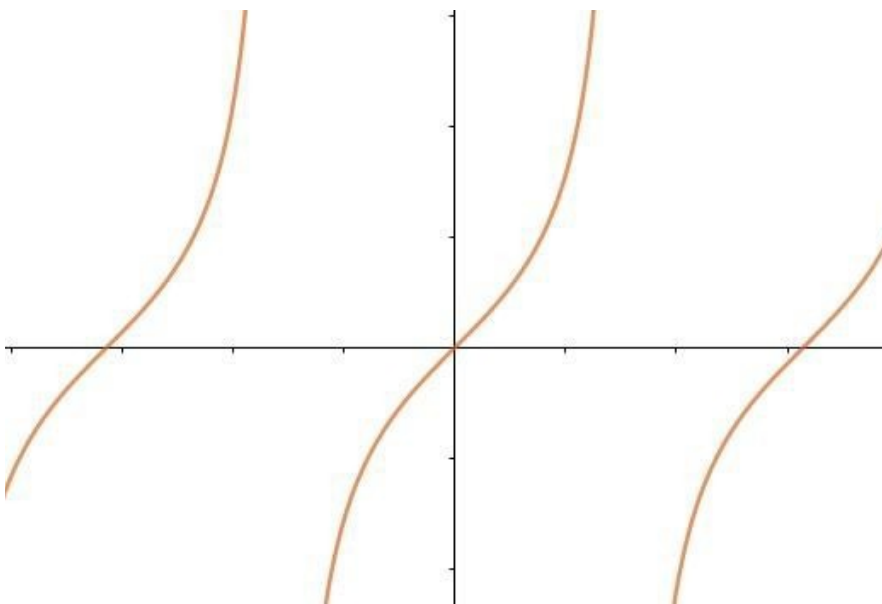
$$f(x) = \sin(x)$$



$$f(x) = \cos(x)$$

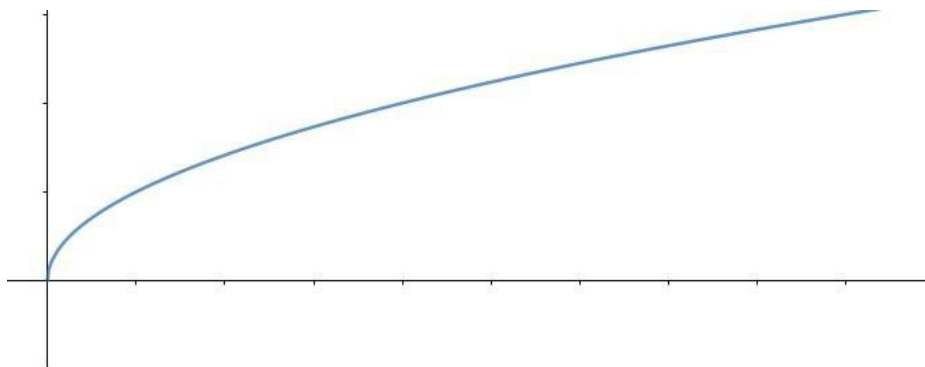


$$f(x) = \text{tg}(x)$$



Função raiz

A função raiz é caracterizada por ter a **variável no interior da raiz**, com isso, se o índice da raiz for par, o domínio da função passa a ser somente os números reais positivos.



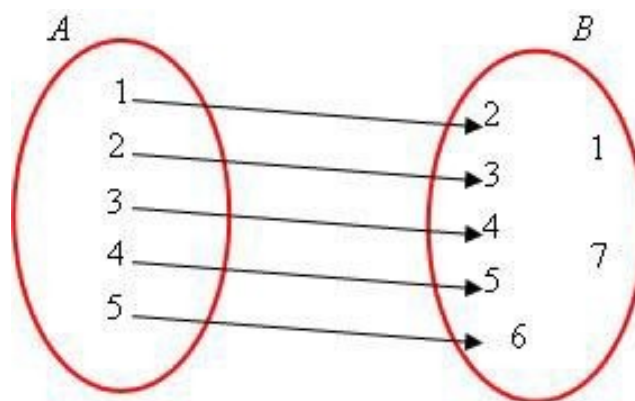
MATEMÁTICA

FUNÇÕES

Domínio, Contradomínio e Imagem de uma Função

Função é uma expressão matemática que relaciona dois valores pertencentes a conjuntos diferentes, mas com relações entre si. A lei de formação que intitula uma determinada função, possui três características básicas: domínio, contradomínio e imagem. Essas características podem ser representadas por um diagrama de flechas, isso facilitará o entendimento por parte do estudante. Observe:

Dada a seguinte função $f(x) = x + 1$, e os conjuntos A (1, 2, 3, 4, 5) e B (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). Vamos construir o diagrama de flechas:



Nessa situação, temos que:

Domínio: representado por todos os elementos do conjunto

$A = (1, 2, 3, 4, 5)$

Contradomínio: representado por todos os elementos do conjunto

$B = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

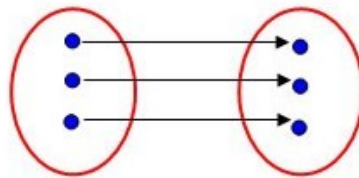
Imagem: representada pelos elementos do contradomínio (conjunto B) que possuem correspondência com o domínio (conjunto A).

(2, 3, 4, 5, 6)

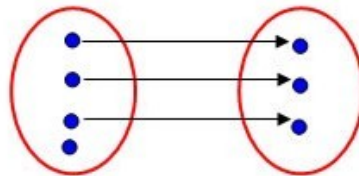
O conjunto domínio possui algumas características especiais que definem ou não uma função. Observe:

Todos os elementos do conjunto domínio devem possuir representação no conjunto do contradomínio. Caso isso não ocorra, a lei de formação não pode ser uma função.

Função

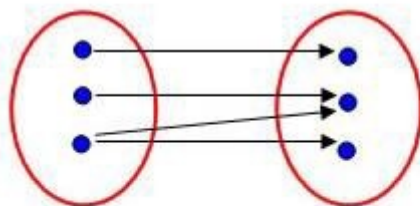


Não é uma função



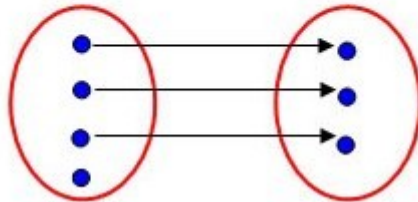
Um único elemento do domínio não deve possuir duas imagens.

Não é função



Um elemento do domínio não pode possuir duas imagens distintas.

Não é Função

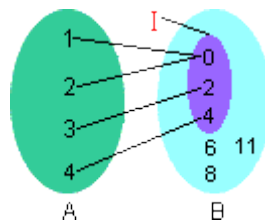


Restam elementos no conjunto domínio, que não foram associados ao conjunto imagem.

MATEMÁTICA

Imagem de um Elemento

Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 11\}$ e seja a função f , de A em B , descrita pelo diagrama abaixo.



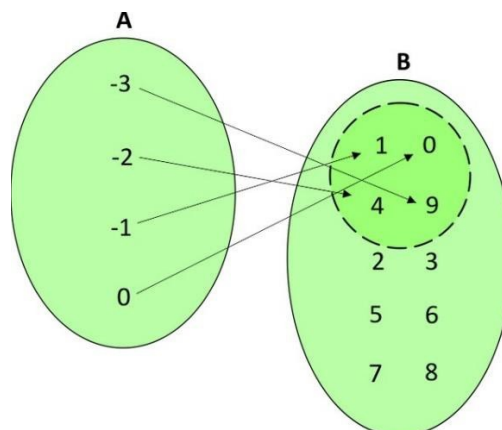
A parte do contradomínio B , constituída pelos elementos que são imagem de algum elemento do domínio A da função f , chama-se conjunto imagem da função e é representado com I .

Para a função f descrita acima temos:

$$I = \{0, 2, 4\}$$

A imagem do elemento é 0, 2, 4

A imagem de uma função é o conjunto de todos os números do contradomínio que estão relacionados a algum elemento do domínio



Cada elemento do conjunto A (domínio da função) está relacionado a um, e somente um, elemento do conjunto B (contradomínio da função). Todos os elementos do conjunto B que receberam flechas de A são imagens dos elementos de A, ou seja, a imagem de -3 é 9, imagem de -2 é 4, imagem de -1 é 1 e imagem de 0 é 0. Podemos perceber, nesse caso, que a imagem de cada elemento do conjunto A equivale ao quadrado do seu valor.

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA BÁSICA

Raiz ou zero de uma função

Para compreender o zero de uma função do 1º grau é necessário relembrar um conceito importante: Função 1º grau.

Uma função do 1º grau pode ser escrita da seguinte maneira:

$$f(x) = ax + b, \text{ onde } a \neq 0$$

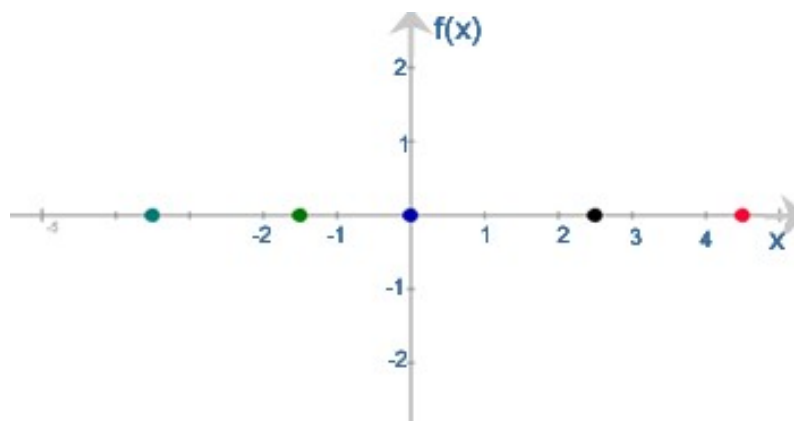
Portanto, o zero de uma função do 1º grau é dado pela expressão:

$$\begin{aligned} \text{Zero da função } f(x) &= 0 \\ f(x) = 0 &= ax + b \rightarrow ax + b = 0 \end{aligned}$$

Logo, o zero da função é dado pelo valor de x que faz com que a função assumo o valor zero. Encontrar este valor de x é muito fácil, pois basta resolver a equação do 1º grau.

$$ax + b = 0 \rightarrow ax = -b \rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Entretanto, devemos nos atentar para a representação geométrica do zero da função, para que possamos compreender como traçar o gráfico de forma correta.



Veja os pontos marcados sobre o eixo x, note que esses pontos não possuem nenhum deslocamento vertical, ou seja, sua coordenada em relação ao eixo $f(x)$ é nula, é zero. Portanto, quando se encontra a raiz de uma função do 1º grau, ou o zero de uma função do 1º grau, determina-se em qual ponto a reta estará cortando o eixo x.

Encontre o zero da seguinte função: $f(x) = 2x - 4$.

$$\text{Zero da função: } f(x) = 0$$

$$f(x) = 2x - 4 = 0 \rightarrow 2x - 4 = 0$$

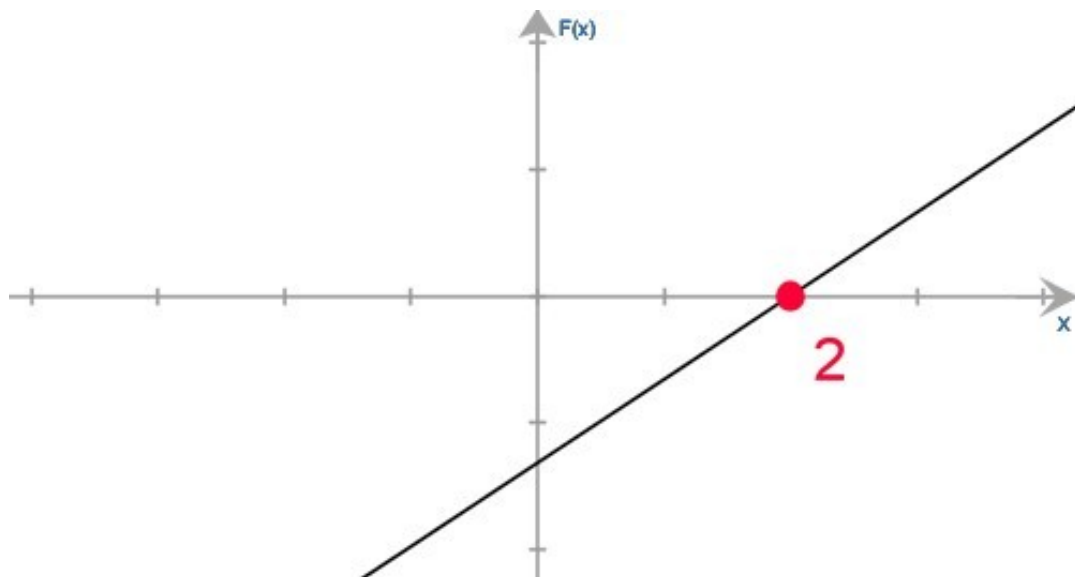
Resolvendo essa equação do 1º grau teremos:

$$x = \frac{4}{2} \rightarrow x = 2$$

Portanto, o valor de x que faz com que $f(x)$ seja igual a zero é $x = 2$.

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

Note que o valor do coeficiente (a) é positivo, portanto esta é uma função crescente. Conhecendo o zero da função podemos esboçar o gráfico desta função.



MATEMÁTICA

FUNÇÕES

Função Afim ou Primeiro Grau

Uma função do primeiro grau é aquela cuja lei de formação pode ser escrita na seguinte forma:

$$y = ax + b$$

Na qual, a e b pertencem ao conjunto dos números reais, e a é diferente de zero. Esse tipo de função também é chamada de função afim.

É importante relembrar os principais conceitos a respeito das funções em geral para compreender bem as funções do primeiro grau.

O que é uma função?

Uma função é uma regra matemática que relaciona cada elemento x , de um conjunto A , a um único elemento y , de um conjunto B . Os conjuntos A e B são conhecidos, respectivamente, como domínio e contradomínio. Já x e y são conhecidos, respectivamente, como variável independente e variável dependente, pois o valor de y sempre dependerá do valor de x .

Assim, as funções do primeiro grau são regras que relacionam cada elemento de um conjunto a um único elemento de outro cuja variável independente é uma potência de expoente 1. O grau de uma função sempre é dado pelo maior expoente da variável independente e, no caso das funções do primeiro grau, o maior expoente é 1.

MATEMÁTICA

FUNÇÕES

Gráfico de uma Função do Primeiro Grau

Toda função pode ser representada graficamente, e a função do 1º grau é formada por uma reta. Essa reta pode ser crescente ou decrescente, dependendo do sinal de **a**.

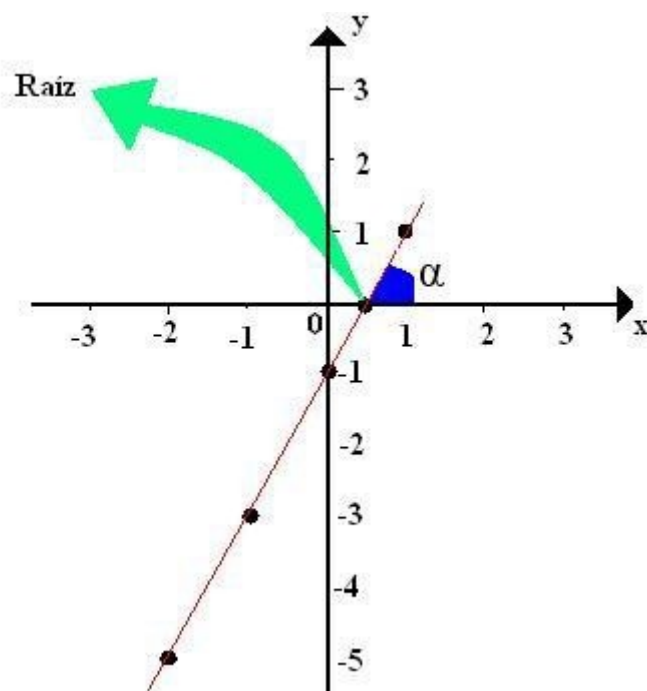
Quando $a > 0$

Isso significa que **a** será positivo. Por exemplo, dada a função: $f(x) = 2x - 1$ ou $y = 2x - 1$, onde $a = 2$ e $b = -1$. Para construirmos seu gráfico devemos atribuir valores reais para x , para que possamos achar os valores correspondentes em y

x	y
-2	-5
-1	-3
0	-1
1/2	0
1	1

Podemos observar que conforme o valor de x aumenta o valor de y também aumenta, então dizemos que quando $a > 0$ a função é crescente.

Com os valores de x e y formamos as coordenadas, que são pares ordenados que colocamos no plano cartesiano para formar a reta. Veja: No eixo vertical colocamos os valores de y e no eixo horizontal colocamos os valores de x .



Quando $a < 0$

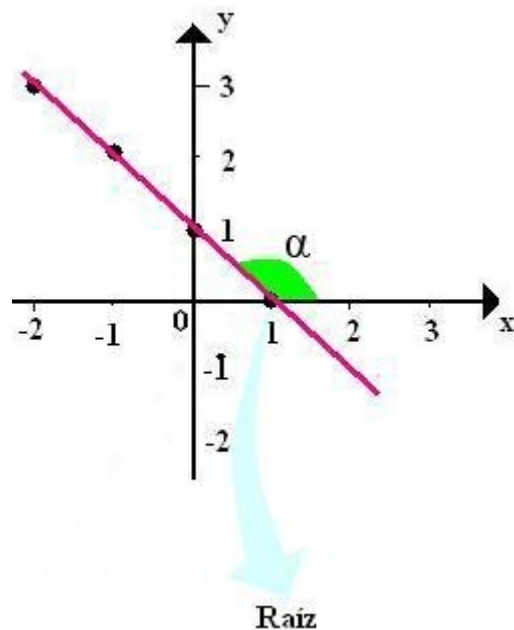
Isso indica que a será negativo. Por exemplo, dada a função $f(x) = -x + 1$ ou $y = -x + 1$, onde $a = -1$ e $b = 1$. Para construirmos seu gráfico devemos atribuir valores reais para x , para que possamos achar os valores correspondentes em y .

x	y
-2	3
-1	2
0	1
1	0

Podemos observar que conforme o valor de x aumenta o valor de y diminui, então dizemos que quando $a < 0$ a função é decrescente.

Com os valores de x e y formamos as coordenadas que são pares ordenados que colocamos no plano cartesiano para formar a reta. Veja:

No eixo vertical colocamos os valores de y e no eixo horizontal colocamos os valores de x .



Características de um gráfico de uma função do 1º grau

Com $a > 0$ o gráfico será crescente.

Com $a < 0$ o gráfico será decrescente.

O ângulo α formado com a reta e com o eixo x será agudo (menor que 90°) quando $a > 0$.

O ângulo α formado com a reta e com o eixo x será obtuso (maior que 90°) quando $a < 0$.

Na construção de um gráfico de uma função do 1º grau basta indicar apenas dois valores para x , pois o gráfico é uma reta e uma reta é formada por, no mínimo, 2 pontos.

Apenas um ponto corta o eixo x , e esse ponto é a raiz da função.

Apenas um ponto corta o eixo y , esse ponto é o valor de b .

MATEMÁTICA

FUNÇÕES

Função Quadrática ou Função do 2º Grau

Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a , b e c são números reais e $a \neq 0$. Vejamos alguns exemplos de funções quadráticas:

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 1, \text{ onde } a = 3, b = -4 \text{ e } c = 1$$

$$f(x) = x^2 - 1, \text{ onde } a = 1, b = 0 \text{ e } c = -1$$

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 5, \text{ onde } a = 2, b = 3 \text{ e } c = 5$$

$$f(x) = -x^2 + 8x, \text{ onde } a = -1, b = 8 \text{ e } c = 0$$

$$f(x) = -4x^2, \text{ onde } a = -4, b = 0 \text{ e } c = 0$$

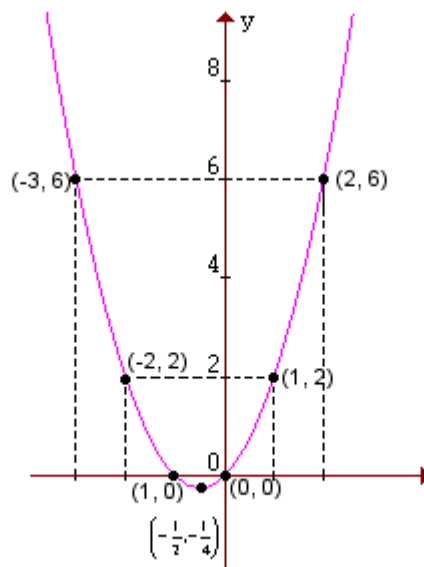
Gráfico

O gráfico de uma função polinomial do 2º grau, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma curva chamada **parábola**.

Por exemplo, vamos construir o gráfico da função $y = x^2 + x$:

Primeiro atribuímos a x alguns valores, depois calculamos o valor correspondente de y e, em seguida, ligamos os pontos assim obtidos.

x	y
-3	6
-2	2
-1	0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
0	0
1	2
2	6



Observação:

Ao construir o gráfico de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, notaremos sempre que:

se $a > 0$, a parábola tem a **concavidade voltada para cima**;

se $a < 0$, a parábola tem a **concavidade voltada para baixo**;

MATEMÁTICA

FUNÇÕES

Gráfico da Função DE 2º Grau

O gráfico da função de 2º grau é representado pela parábola, que pode ter sua concavidade voltada para cima ou para baixo.

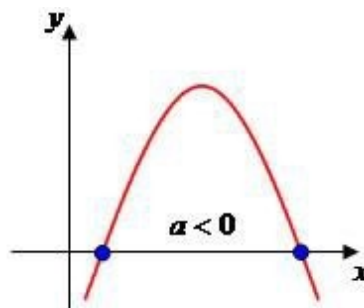
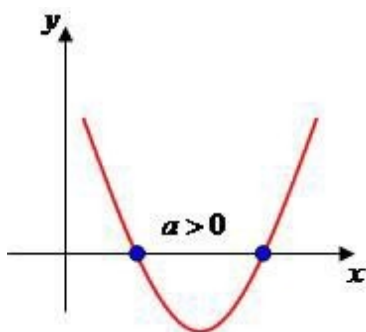
Uma **função do 2º grau** é definida pela seguinte lei de formação **$f(x) = ax^2 + bx + c$** ou **$y = ax^2 + bx + c$** , em que a , b e c são números reais e $a \neq 0$. Sua representação no plano cartesiano é uma parábola que, de acordo com o valor do coeficiente a , possui concavidade voltada para cima ou para baixo. A função do 2º grau assume três possibilidades de resultados ou raízes, que são determinadas quando fazemos $f(x)$ ou y igual a zero, transformando a função em uma equação do 2º grau, que pode vir a ser resolvida por Bháskara.

Gráfico da função do 2º grau

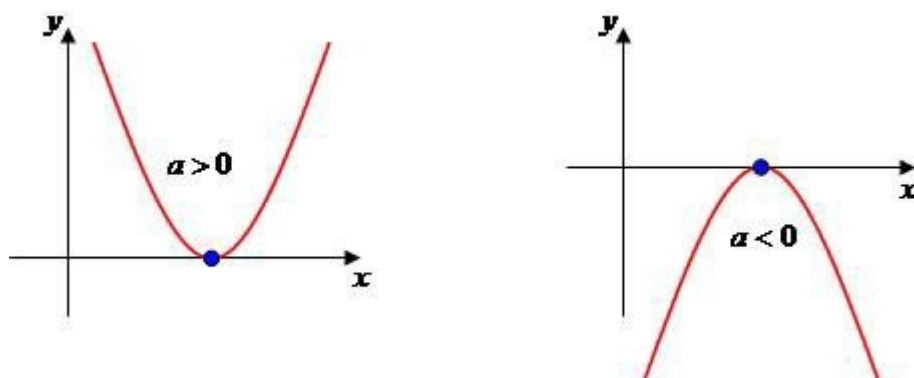
Coeficiente $a > 0$, parábola com a concavidade voltada para cima

Coeficiente $a < 0$, parábola com a concavidade voltada para baixo

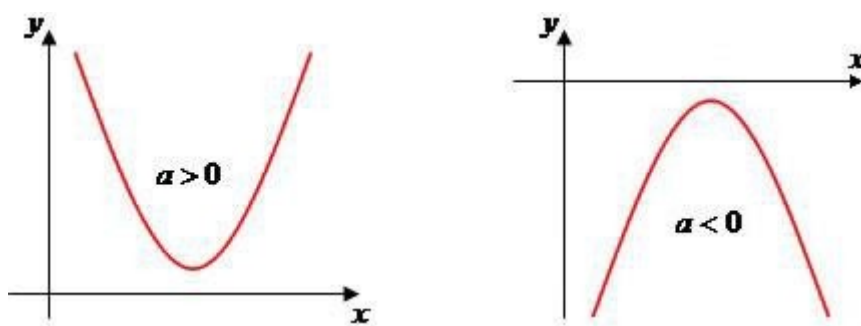
? > 0 – A equação do 2º grau possui duas soluções distintas, isto é, a função do 2º grau terá duas raízes reais e distintas. A parábola intersecta o eixo das abscissas (x) em dois pontos.



$\Delta = 0$ – A equação do 2º grau possui uma única solução, isto é, a função do 2º grau terá apenas uma raiz real. A parábola irá intersectar o eixo das abscissas (x) em apenas um ponto.

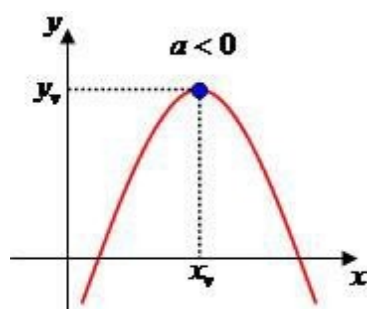


$\Delta < 0$ – A equação do 2º grau não possui soluções reais, portanto, a função do 2º grau não intersectará o eixo das abscissas (x).

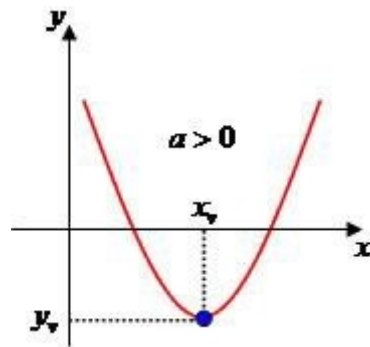


Pontos notáveis do gráfico de uma função do 2º grau

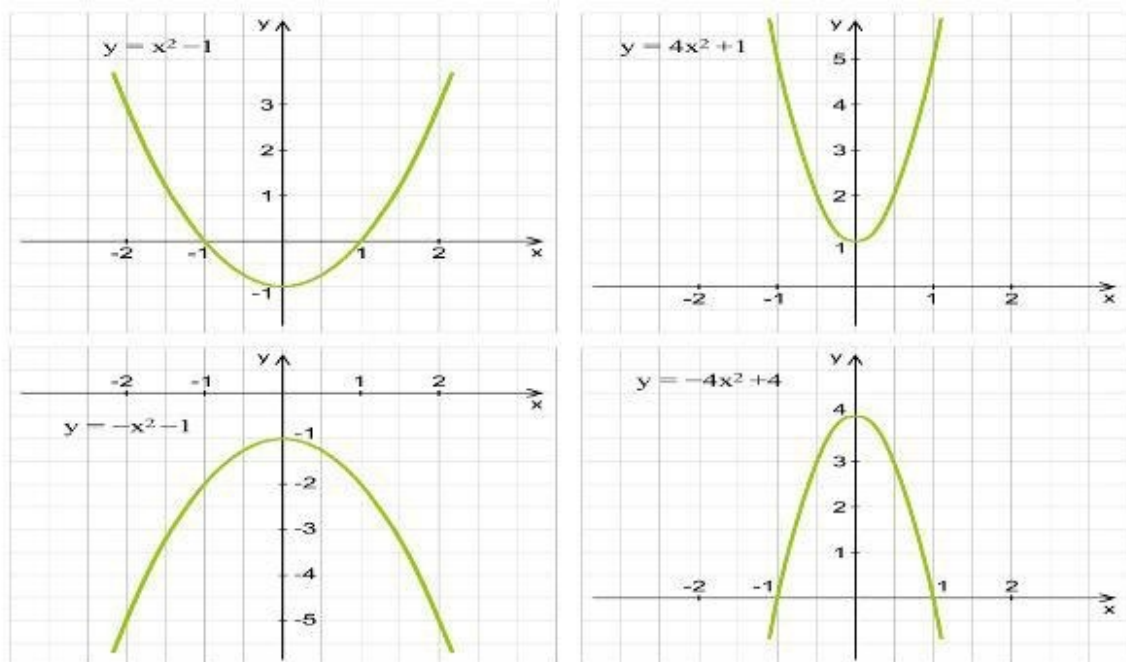
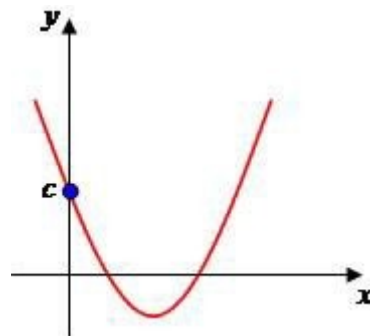
O vértice da parábola constitui um ponto importante do gráfico, pois indica o ponto de valor máximo e o ponto de valor mínimo. De acordo com o valor do coeficiente a , os pontos serão definidos, observe: Quando o valor do coeficiente a for menor que zero, a parábola possuirá valor máximo.



Quando o valor do coeficiente a for maior que zero, a parábola possuirá valor mínimo.



Outra relação importante na função do 2º grau é o ponto onde a parábola corta o eixo y. Verifica-se que o valor do coeficiente c na lei de formação da função corresponde ao valor do eixo y onde a parábola o intersecta.



O gráfico da função de 2º grau é formado pela parábola, que pode ter concavidade para baixo ou para cima.

MATEMÁTICA

FUNÇÕES

Sinais da Função de Segundo Grau

Estudar o **sinal de uma função** é determinar para quais valores reais de x a função é **positiva**, **negativa** ou **nula**. A melhor maneira de analisar o sinal de uma função é pelo **gráfico**, pois nos permite uma avaliação mais ampla da situação. Vamos analisar os gráficos das funções a seguir, de acordo com a sua lei de formação.

Observação: para construir o gráfico de uma **função do 2º grau**, precisamos determinar o número de **raízes da função**, e se a parábola possui concavidade voltada para cima ou para baixo.

$\Delta = 0$, uma raiz real.

$\Delta > 0$, duas raízes reais e distintas

$\Delta < 0$, nenhuma raiz real.

Para determinar o valor de Δ e os valores das raízes, utilize o método de Bháskara:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ \Delta &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

Coefficiente $a > 0$, parábola com a concavidade voltada para cima

Coefficiente $a < 0$, parábola com a concavidade voltada para baixo

1º Exemplo:

$$y = x^2 - 3x + 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Aplicando Bháskara:

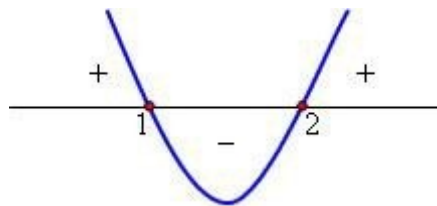
$$\Delta = (-3)^2 - 4 * 1 * 2$$

$$\Delta = 9 - 8$$

$$\Delta = 1$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2}$$
$$x' = \frac{4}{2} = 2$$
$$x'' = \frac{2}{2} = 1$$

A parábola possui concavidade voltada para cima em virtude de $a > 0$ e ter duas raízes reais e distintas.



Análise do gráfico

↗ $x < 1$ ou $x > 2$, $y > 0$

↗ Valores entre 1 e 2, $y < 0$

↗ $x = 1$ e $x = 2$, $y = 0$

2º Exemplo:

$$y = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 + 8x + 16 = 0$$

Aplicando Bháskara:

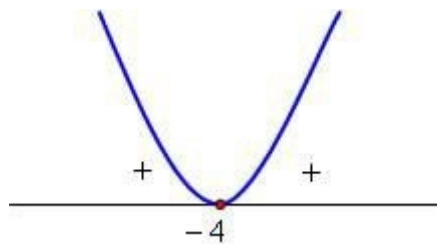
$$\Delta = 8^2 - 4 * 1 * 16$$

$$\Delta = 64 - 64$$

$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm 0}{2}$$
$$x = -\frac{8}{2} = -4$$

A parábola possui concavidade voltada para cima, em virtude de $a > 0$ e uma única raiz real.



Análise do gráfico:

↗ $x = -4, y = 0$

↗ $x \neq -4, y > 0$

3º Exemplo:

$$y = 3x^2 - 2x + 1$$

$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$

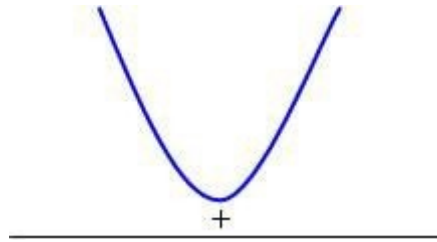
Aplicando Bháskara:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 * 3 * 1$$

$$\Delta = 4 - 12$$

$$\Delta = -8$$

A parábola possui concavidade voltada para cima em decorrência de $a > 0$, mas não possui raízes reais, pois $\Delta < 0$.



Análise do gráfico

↗ A função será positiva para qualquer valor real de x .

4º Exemplo:

$$y = -2x^2 - 5x + 3$$

$$-2x^2 - 5x + 3 = 0$$

Aplicando Bháskara:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 * (-2) * 3$$

$$\Delta = 25 + 24$$

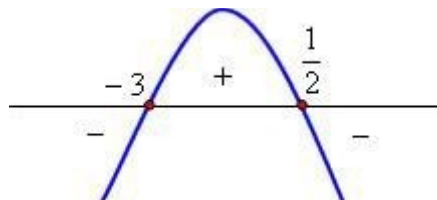
$$\Delta = 49$$

$$x = \frac{5 \pm 7}{-4}$$

$$x' = \frac{5+7}{-4} = -3$$

$$x'' = \frac{5-7}{-4} = \frac{1}{2}$$

A parábola possui concavidade voltada para baixo em face de $a < 0$ e duas raízes reais e distintas.



Análise do gráfico:

↗ $x < -3$ ou $x > 1/2$, $y < 0$

↗ Valores entre -3 e $1/2$, $y > 0$

↗ $x = -3$ e $x = 1/2$, $y = 0$

5º Exemplo:

$$y = -x^2 + 12x - 36$$

$$-x^2 + 12x - 36 = 0$$

Aplicando Bháskara:

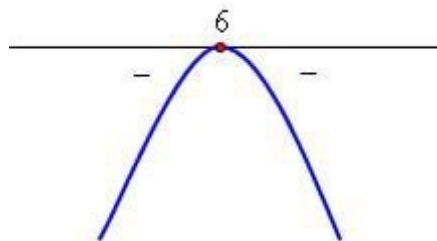
$$\Delta = 12^2 - 4 * (-1) * (-36)$$

$$\Delta = 144 - 144$$

$$\Delta = 0$$

$$x = \frac{-12 \pm 0}{-2} = 6$$

A parábola possui concavidade voltada para baixo em decorrência de $a < 0$ e uma única raiz real.



Análise do gráfico:

↗ $x = 6$, $y = 0$

↗ $x \neq 6$, $y < 0$

MATEMÁTICA

FUNÇÕES

Função Modular

Função modular é a função (lei ou regra) que associa elementos de um conjunto em módulos.

O módulo é representado entre barras e seus números são sempre positivos, ou seja, mesmo que um módulo seja negativo seu número será positivo:

$$1) |x| \text{ é } = x \text{ se } x \geq 0, \text{ ou seja, } |0| = 0, |2| = 2$$

Exemplos:

$$4 + |5| = 4 + 5 = 9$$

$$|5| - 4 = 5 - 4 = 1$$

$$2) |-x| \text{ é } = x \text{ se } x < 0, \text{ ou seja, } |-1| = 1, |-2| = 2$$

Exemplos:

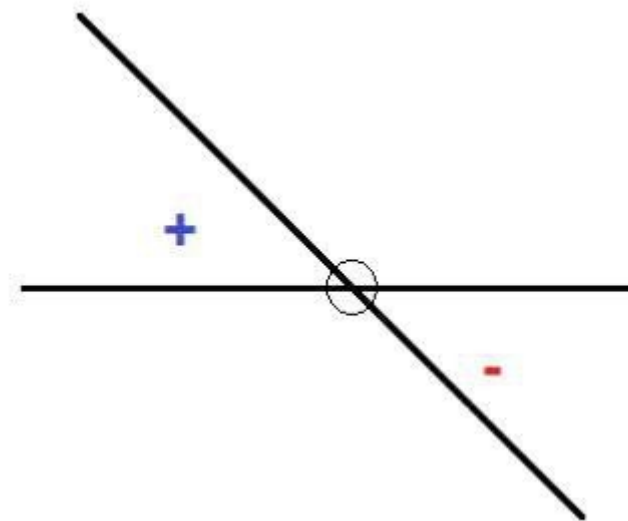
$$|-2| \cdot |-6| = -(-2) \cdot -(-6) = 2 \cdot 6 = 12$$

$$|-8 + 6| = |-2| = 2$$

Gráfico

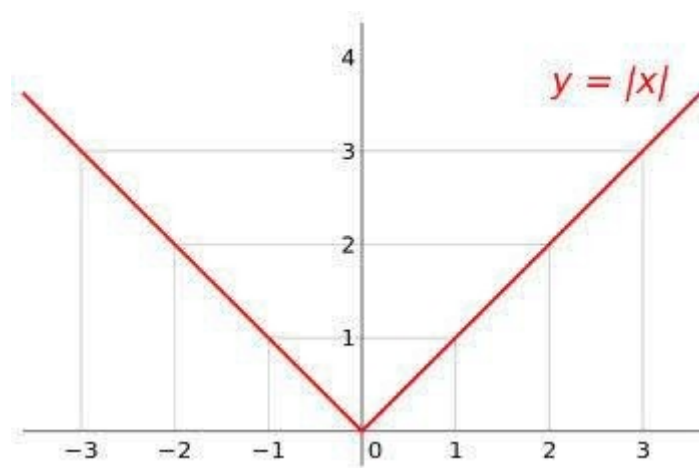
Ao representar um módulo negativo, o gráfico para na intersecção e volta a fazer o sentido ascendente.

Isso porque tudo o que fica abaixo tem valor negativo e os módulos negativos sempre tornam-se números positivos:



Exemplo:

x (domínio)	y (contradomínio)
-2	$ -2 = 2$
-1	$ -1 = 1$
0	$ 0 = 0$
1	$ 1 = 1$
2	$ 2 = 2$



Propriedades

Todo $x \in \mathbb{R}$, temos $|x| = |-x|$

Todo $x \in \mathbb{R}$, temos $|x^2| = |x|^2 = x^2$

Todo x e $y \in \mathbb{R}$, temos $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Todo x e $y \in \mathbb{R}$, temos $|x + y| \leq |x| + |y|$

Repare que os números reais são o domínio de cada uma das funções acima.

MATEMÁTICA

FUNÇÕES

Equação Modular

Na equação modular as incógnitas se encontram dentro do módulo, fora isso ela apresenta as mesmas características das outras expressões algébricas.

Equações são expressões matemáticas algébricas que possuem uma ou mais incógnitas, sempre apresentadas com o sinal de igualdade. Equação modular se enquadra neste conceito geral, mas no caso das modulares, as incógnitas se encontram dentro do módulo; dessa forma, devemos respeitar as condições do módulo de um número, que é a seguinte:

$$|x| = x, \text{ se } x \geq 0$$

$$-x, \text{ se } x < 0$$

Veja alguns exemplos de equações que são modulares:

$$|x + 3| = 5$$

$$|x| - 9 = 8$$

$$-|2x| = 10$$

$$3*|x|2 - 8*|x| + 5 = 0$$

$$|x^2 - 2x + 8| = 32$$

Para uma melhor compreensão da resolução de uma equação modular, acompanhe as demonstrações a seguir:

Exemplo 1

$$|x| = 6$$

Para descobrir o valor de x devemos pensar da seguinte forma: um número real terá sempre um valor positivo como resultado do seu módulo, e 6 é positivo, mas o valor de x poderá ser +6 ou -6, pois $|+6| = 6$ e $|-6| = 6$, portanto, $x = 6$ ou $x = -6$

Exemplo 2

$$|x| = 0$$

Como zero tem valor nulo (não possui sinal) dizemos que o único valor que x poderá assumir será 0, portanto, $x = 0$.

Exemplo 3

$$|x| = -12$$

Como um número real terá sempre um valor positivo ou nulo, no caso em que o módulo é -12 não irá existir valor real para x , portanto, a solução dessa equação será conjunto vazio.

Exemplo 4

$$|x + 3| = 5$$

$$x + 3 = 5 \rightarrow x = 5 - 3 \rightarrow x = 2$$

$$x + 3 = -5 \rightarrow x = -5 - 3 \rightarrow x = -8$$

Exemplo 5

$$|x + 5| = x + 5$$

Condição: $x + 5 \geq 0$, a equação só é possível se $x + 5 \geq 0$, ou seja, $x \geq -5$.

$$x + 5 = x + 5 \rightarrow x - x = 5 - 5 \rightarrow 0x = 0 \text{ (indeterminado)}$$

$$x + 5 = -(x+5) \rightarrow x + 5 = -x - 5 \rightarrow x + x = -5 - 5 \rightarrow 2x = -10 \rightarrow x = -5$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = -5\}$$

Exemplo 6

$$|x - 3| + 4x = 8$$

$$|x - 3| = 8 - 4x$$

Condição: $x - 3 \geq 0$, se $8 - 4x \geq 0$, ou seja, $-4x \geq -8 \rightarrow 4x \leq 8 \rightarrow x \leq 2$.

$x - 3 = 8 - 4x \rightarrow x + 4x = 8 + 3 \rightarrow 5x = 11 \rightarrow x = 11/5$ (não satisfaz a condição $x \leq 2$)

$x - 3 = -(8 - 4x) \rightarrow x - 3 = -8 + 4x \rightarrow x - 4x = -8 + 3 \rightarrow -3x = -5 \rightarrow x = 5/3$
(satisfaz a condição $x \leq 2$)

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = 5/3\}$$

MATEMÁTICA

INEQUAÇÕES

Inequação modular

O módulo de um número é igual a sua distância até zero. Sendo a grandeza distância sempre positiva, conclui-se que o módulo de um número é sempre positivo. Para encontrar o módulo de um número x , por exemplo, siga essa regra prática:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Por exemplo: $|6| = 6$, pois $6 > 0$. Já $|-6| = -(-6) = 6$.

Agora que já relembramos o conceito de módulo, vamos ingressar nas inequações modulares.

Inequação modular

Inequação modular é toda inequação cuja incógnita aparece em módulo. Veja alguns exemplos:

$$|x| > 6$$

$$|x| \leq 4$$

$$|x + 3| > 7$$

$$|4x + 1| \geq 3$$

Podemos utilizar as propriedades a seguir para resolver esse tipo de inequação:

$$|x| > a \quad \rightarrow \quad x < -a \text{ ou } x > a.$$

$$|x| < a \quad \rightarrow \quad -a < x < a.$$

$$|x| \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a.$$

$$|x| \geq a \rightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a.$$

$$|x - a| \leq b \rightarrow -b \leq x - a \leq b \rightarrow a - b \leq x \leq a + b$$

Resolução de inequações modulares

Agora que você já conhece o conceito sobre inequações modulares e suas propriedades resolutivas, é hora de colocar a mão na massa. Antes de analisar as resoluções, tente resolver, utilizando as propriedades explanadas anteriormente, os modelos de inequações modulares acima. Veja as resoluções a seguir:

$$|x| > 6$$

$$x < -6 \text{ ou } x > 6$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } x > 6\}$$

$$|x| \leq 4$$

$$-4 \leq x \leq 4$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 4\}$$

$$|x + 3| > 7$$

$$x + 3 < -7 \text{ ou } x + 3 >$$

$$7 \text{ Se } x + 3 < -7,$$

$$\text{então: } x < -7 - 3$$

$$x < -10$$

$$\text{Se } x + 3 > 7, \text{ então:}$$

$$x > 7 - 3$$

$$x > 4$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -10 \text{ ou } x > 4\}$$

$$|4x + 1| \geq 3$$

$$4x + 1 \leq -3 \text{ ou } 4x + 1 \geq 3$$

Se $4x + 1 \leq -3$, então:

$$4x \leq -3 - 1$$

$$4x \leq -4$$

$$x \leq -1$$

Se $4x + 1 \geq 3$, então:

$$4x \geq 3 - 1$$

$$4x \geq 2$$

$$x \geq \frac{1}{2}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq \frac{1}{2}\}$$

MATEMÁTICA

FUNÇÃO

Função Composta

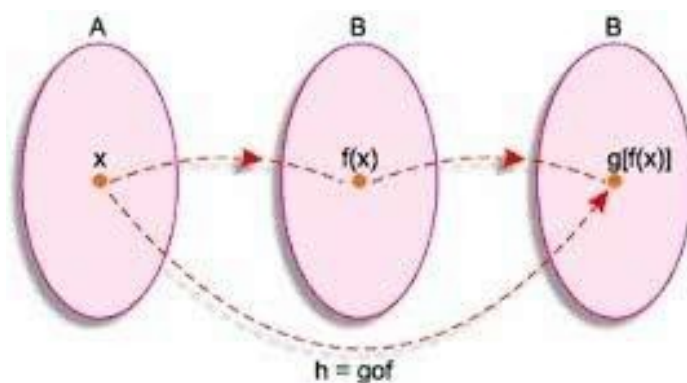
A função composta, também chamada de função de função, é um tipo de função matemática que combina duas ou mais variáveis.

Sendo assim, ela envolve o conceito de proporcionalidade entre duas grandezas, e que ocorre por meio de uma só função.

Dada uma função f ($f: A \rightarrow B$) e uma função g ($g: B \rightarrow C$), a função composta de g com f é representada por $g \circ f$. Já a função composta de f com g é representada por $f \circ g$.

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$



Note que nas funções compostas as operações entre as funções não são comutativas. Ou seja, $f \circ g \neq g \circ f$.

Assim, para resolver uma função composta aplica-se uma função no domínio de outra função. E, substitui-se a variável x por uma função.

Exemplo

Determine o $g \circ f(x)$ e $f \circ g(x)$ das funções $f(x) = 2x + 2$ e $g(x) = 5x$.

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2x+2) = 5(2x+2) = 10x + 10$$

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(5x) = 2(5x) + 2 = 10x + 2$$

Vamos analisar um exemplo para entender o que é uma função composta.
Consideremos os conjuntos:

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

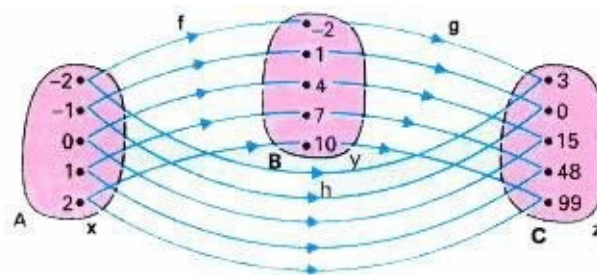
$$B = \{-2, 1, 4, 7, 10\}$$

$$C = \{3, 0, 15, 48, 99\}$$

E as funções:

$$f: A \rightarrow B \text{ definida por } f(x) = 3x + 4$$

$$g: B \rightarrow C \text{ definida por } g(y) = y^2 - 1$$



Como nos mostra o diagrama acima, para todo $x \in A$ temos um único $y \in B$ tal que $y = 3x + 4$, e para todo $y \in B$ existe um único $z \in C$ tal que $z = y^2 - 1$. Então, concluímos que existe uma função h de A em C , definida por $h(x) = z$ ou $h(x) = 9x^2 + 24x + 15$, pois:

$$h(x) = z \quad h(x) = y^2 - 1$$

$$\text{E sendo } y = 3x + 4, \text{ então } h(x) = (3x + 4)^2 - 1 \quad h(x) = 9x^2 + 24x + 15.$$

A função $h(x)$ é chamada função composta de g com f . Podemos indicá-la por $g \circ f$ (lemos “ g composta com f ”) ou $g[f(x)]$ (lemos “ g de f de x ”). Vamos ver alguns exercícios para entender melhor a ideia de função composta.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Dadas as funções $f(x)=x^2-1$ e $g(x)=2x$, calcule $f[g(x)]$ e $g[f(x)]$.

Resolução:

$$f[g(x)] = f(2x) = (2x)^2-1 = 4x^2-1$$

$$g[f(x)] = g(x^2-1) = 2(x^2-1) = 2x^2-2$$

Dadas as funções $f(x)=5x$ e $f[g(x)]=3x+2$, calcule $g(x)$.

Resolução:

Como $f(x)=5x$, então $f[g(x)]= 5.g(x)$.

Porém, $f[g(x)]=3x+2$, logo:

$$5.g(x)=3x+2, \text{ e daí } g(x)=(3x+2)/5$$

Dadas as funções $f(x)=x^2+1$ e $g(x)=3x-4$, determine $f[g(3)]$.

Resolução: $g(3)=3.3-4=5$ $f[g(3)]= f(5)= 5^2+1 = 25+1= 26$.

MATEMÁTICA

Função Inversa

A função inversa é um tipo de função bijetora (sobrejetora e injetora). Isso porque os elementos de uma função A possui um elemento correspondente de uma função B.

Sendo assim, é possível trocar os conjuntos e associar cada elemento de B com os de A.

A função inversa é representada por: f^{-1}

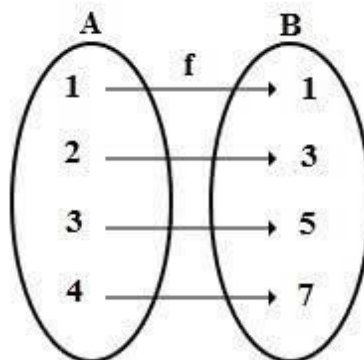
$$A \text{ é inversa de } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ é } A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

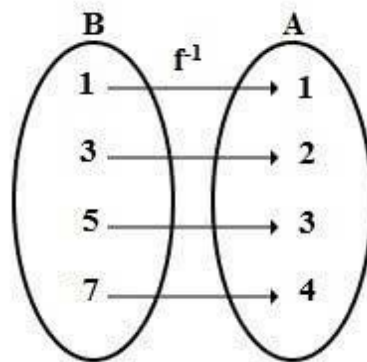
$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Exemplo:

Dada as funções $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$ e definida pela lei $y = 2x - 1$, temos:



Logo,



MATEMÁTICA

EQUAÇÕES

Equação Exponencial

Uma equação exponencial é uma expressão algébrica que possui uma igualdade e pelo menos uma incógnita em um de seus expoentes.

Para ser considerada equação, uma expressão precisa ter pelo menos uma incógnita, que é um número desconhecido representado por uma letra, e uma relação de **igualdade**. Dessa maneira, as **equações exponenciais** são aquelas que possuem pelos menos uma incógnita no expoente e bases positivas diferentes de 1.

Assim, são **exemplos de equações exponenciais**:

$$4^{x+2} + 16^x = 8$$

$$16^x + 4^{2x} = 32$$

Resolução de equações exponenciais

Resolver uma **equação** é encontrar o valor numérico das incógnitas que aparecem nela. Para isso, é preciso ter clareza sobre os seguintes conteúdos:

Resolução de equações do primeiro grau;

Propriedades de potências.

Além disso, existe uma propriedade das **equações exponenciais** que é indispensável para sua resolução:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y \quad (a > 0 \text{ e } a \text{ diferente de } 1)$$

O que essa propriedade garante é que, se duas potências de mesma base são iguais, os expoentes dessas potências também são.

Veja um exemplo:

$$3^x = 27$$

Observe que 27 é igual a 3^3 . Substituindo esse valor na equação, teremos:

$$3^x = 3^3$$

Note que as bases são iguais. Agora podemos usar a **propriedade das equações exponenciais** e escrever:

$$x = 3$$

Exemplos:

1º – Resolva a equação: $2^{x+4} = 64$.

Solução:

$$2^{x+4} = 64$$

Observe que 64 é uma potência de base 2, pois $64 = 2^6$. Substituindo esse valor na **equação**, teremos:

$$2^{x+4} = 2^6$$

Usando a propriedade das **equações exponenciais**, teremos:

$$x + 4 = 6$$

Para finalizar, basta calcular a **equação** resultante.

$$x = 6 - 4$$

$$x = 2$$

2º – Calcule o valor de x na equação:

$$16^x = 1$$

$$4^x$$

Solução:

Nesse exemplo, usaremos uma **propriedade** de **potência** que permite inverter a base que está na forma de fração. Queremos que a incógnita

esteja no numerador para facilitar os cálculos, então, sabendo que, ao inverter a base de uma fração, invertemos também o sinal de seu **expoente**, podemos reescrever a **equação** dada da seguinte maneira:

$$16^x = 1$$

$$4^x$$

$$16^x = 4^{-x}$$

Agora repetimos os procedimentos usados no exemplo anterior para obter:

$$4^{2x} = 4^{-x}$$

$$2x = -x$$

$$2x + x = 0$$

$$3x = 0$$

$$x = 0$$

3º – Calcule o valor de x na equação:

$$(2/5)^{3x} = 25/4$$

Solução:

Observe que 25 é o resultado de uma **potência** de base 5, e 4 é resultado de uma potência de base 2. Além disso, 25 está no numerador e o 4 está no denominador da segunda fração. A primeira fração está invertida nesse sentido.

Para inverter uma fração, basta trocar o sinal de seu **expoente**. Observe:

$$(2/5)^{3x} = 25/4$$

$$(5/2)^{-3x} = 25/4$$

Reescrevendo a segunda fração na forma de potência e aplicando uma das **propriedades de potências**, teremos:

$$(5/2)^{-3x} = (5/2)^2$$

Observe que as bases são iguais. Agora basta usar a propriedade das **equações exponenciais** para obter:

$$-3x = 2$$

$$x = -2$$

MATEMÁTICA

INEQUAÇÕES

Inequação Exponencial

A **inequação exponencial** é uma sentença matemática que **possui, pelo menos, uma incógnita em seu expoente e uma desigualdade**. Encontrar o conjunto de soluções de uma inequação exponencial é encontrar o intervalo de valores que fazem com que a sentença seja verdadeira.

Para resolver uma inequação exponencial, utilizamos técnicas parecidas com as utilizadas para as equações exponenciais, ou seja, buscamos igualar as bases dos dois lados para conseguir comparar os seus expoentes. A diferença entre a equação exponencial e a inequação exponencial é que, na equação, existe uma igualdade e, na inequação, existe um símbolo de desigualdade.

O que é inequação exponencial?

Inequação exponencial é uma sentença matemática em que encontramos uma incógnita no expoente e uma desigualdade.

Exemplos:

$$2^x > 32$$

$$0,5^x \leq 8$$

$$3^{x+1} + 4 \leq 85$$

$$5^{x+1} < 25^{2x-1}$$

Para resolver uma inequação exponencial, **utilizamos técnicas parecidas com as de resolução de equação**, ou seja, buscamos igualar as bases.

Contudo, as inequações exponenciais podem ser separadas em dois importantes casos, um deles é quando a base é maior que 1, e o outro é

quando a base é um número entre 0 e 1. Observar a base é fundamental para conseguirmos encontrar o conjunto de soluções da inequação.

Propriedades da inequação exponencial

Para resolver as inequações exponenciais, é importante conhecer esses dois casos.

$$\begin{array}{l} \text{Quando } a > 1 : a^x > a^y \rightarrow x > y \\ \text{Quando } 0 < a < 1 : a^x > a^y \rightarrow x < y \end{array}$$

Então, ao igualar as bases, é fundamental observar se a base é maior que 1 ou se é um número entre 0 e 1.

Quando **a base é um número maior que 1**, ou seja, $a > 1$, mantemos a desigualdade entre os expoentes.

Exemplos:

a) $2^x < 2^3$

Sabemos que a base 2 é um número maior que 1, então, $x < 3$.

b) $5^x \geq 5^4$

Sabemos que a base 5 é um número maior que 1, então, $x \geq 4$.

Note que, nos dois casos, a desigualdade se manteve.

Quando **a base é um número entre 0 e 1**, ou seja, $0 < a < 1$, invertemos a desigualdade.

Exemplos:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^6$

Nesse caso, a base é um número menor que 1 e maior que 0, então, **invertemos a desigualdade entre os expoentes**, logo, temos que: $x < 6$.

b) $0,3^x \leq 0,3^5$

Sabemos que 0,3 é menor que 1 e maior que 0, então, inverteremos a desigualdade entre os expoentes, logo, temos que:

Como resolver uma inequação exponencial?

Para resolver a inequação exponencial, buscamos **igualar as bases dos dois lados da inequação**, e, quando isso ocorre, **observamos se base é maior que 1 ou se está entre 0 e 1**, para escrever a inequação dos expoentes.

Exemplo 1:

$$2^x < 8$$

Para encontrar as soluções possíveis para a equação, primeiro vamos **igualar as bases**. Para isso, fatoramos o 8.

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2^3 \end{array}$$

Reescrevendo a inequação exponencial trocando 8 por 2^3 :

$$2^x < 2^3$$

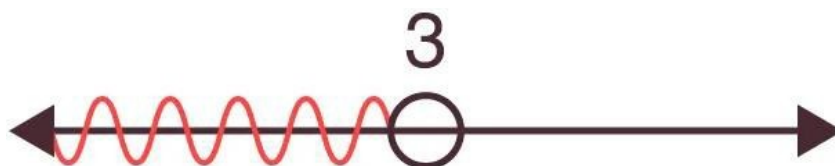
Como **as bases são as mesmas e 2 é maior que 1**, então, temos que:

$$x < 3$$

O **conjunto de soluções** dessa inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$$

Podemos fazer a **representação geométrica** dessa solução:



Exemplo 2:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 81$$

Fatorando 81, temos que:

$$\begin{array}{r|l} 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & 3^4 \end{array}$$

Para que a base seja a mesma, vamos **escrever o inverso de 3^4 e trocar o sinal do expoente**, então, temos que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^x &\geq 3^4 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x &\geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \end{aligned}$$

Como as bases foram igualadas, logo, podemos escrever a inequação do expoente. Contudo, note que **a base é um número entre 0 e 1**, quando isso acontece, **é necessário inverter a desigualdade**.

$$x \leq -4$$

Então, o **conjunto de soluções** dessa inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -$$

Fazendo a **representação geométrica**:



Exemplo 3:

$$5^{x+2} - 5^x \geq 3000$$

Para **igualar as bases**, vamos recorrer às propriedades de potência.

$$5^{x+2} - 5^x \geq 3000$$

$$5^x \cdot 5^2 - 5^x \geq 3000$$

Colocando 5^x em evidência:

$$5^x(5^2 - 1) \geq 3000$$

$$5^x(25 - 1) \geq 3000$$

$$5^x \cdot 24 \geq 3000$$

$$5^x \geq \frac{3000}{24}$$

$$5^x \geq 125$$

Fatorando 125:

$$\begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & 5^3 \end{array}$$

Sabemos que $125 = 5^3$, então, temos que:

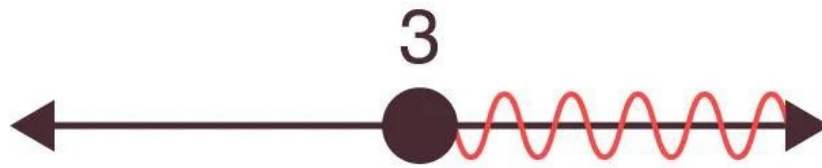
$$5^x \geq 5^3$$

Como igualamos a base, podemos escrever a inequação com os expoentes. Note que **a base é maior que 1**, assim, temos que:

$$x \geq 3$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$$

Representação geométrica:



Diferença entre inequação exponencial e equação exponencial

A diferença entre a inequação exponencial e a equação exponencial é que, **na inequação exponencial**, há um símbolo de desigualdade, e **estamos encontrando um intervalo** de números reais que fazem com que a sentença seja verdadeira. Já uma **equação exponencial** possui um sinal de igualdade, e, nesse caso, não encontramos um intervalo de soluções, mas sim alguns **valores específicos** que satisfazem a equação.

Exemplos:

$$3^x < 3^2 \rightarrow \text{inequação exponencial}$$

Note que a solução é $x < 2$, ou seja, qualquer valor que seja menor que 2 torna essa inequação verdadeira.

$$3^x = 3^2 \rightarrow \text{equação exponencial}$$

Note que a solução é $x = 2$, que é um único valor que satisfaz a equação.

MATEMÁTICA

ARITMÉTICA

Logaritmo

Logaritmo de um número b na base a é igual ao expoente x ao qual se deve elevar a base, de modo que a potência a^x seja igual a b , sendo a e b números reais e positivos e $a \neq 1$.

Desta forma, o logaritmo é a uma operação na qual queremos descobrir o expoente que uma dada base deve ter para resultar em uma certa potência.

Por esse motivo, para fazer operações com logaritmos é necessário conhecer as propriedades da potenciação.

Definição de logaritmo

$$\text{Logaritmando} \quad \text{Logaritmo}$$
$$\text{Base} \quad \text{Log}_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Lê-se logaritmo de b na base a , sendo $a > 0$ e $a \neq 1$ e $b > 0$.

Quando a base de um logaritmo for omitida, significa que seu valor é igual a 10. Este tipo de logaritmo é chamado de logaritmo decimal.

Como calcular um logaritmo?

O logaritmo é um número e representa um dado expoente. Podemos calcular um logaritmo aplicando diretamente a sua definição.

Exemplo

Qual o valor do $\log_3 81$?

Solução

Neste exemplo, queremos descobrir qual expoente devemos elevar o 3 para que o resultado seja igual a 81. Usando a definição, temos:

$$\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81$$

Para encontrar esse valor, podemos fatorar o número 81, conforme indicado abaixo:

$$\begin{array}{r|l} 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ / \\ 3^4 \end{array}$$

Substituindo o 81 por sua forma fatorada, na equação anterior, temos: $3^x = 3^4$

Como as bases são iguais, chegamos a conclusão que $x = 4$.

Consequência da definição dos logaritmos

O logaritmo de qualquer base, cujo logaritmando seja igual a 1, o resultado será igual a 0, ou seja, $\log_a 1 = 0$. Por exemplo, $\log_9 1 = 0$, pois $9^0 = 1$.

Quando o logaritmando é igual a base, o logaritmo será igual a 1, assim, $\log_a a = 1$. Por exemplo, $\log_5 5 = 1$, pois $5^1 = 5$.

Quando o logaritmo de **a** na base **a** possui uma potência **m**, ele será igual ao expoente **m**, ou seja $\log_a a^m = m$, pois usando a definição $a^m = a^m$. Por exemplo, $\log_3 3^5 = 5$.

Quando dois logaritmos com a mesma base são iguais, os logaritmandos também serão iguais, ou seja, $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.

A potência de base a e expoente $\log_a b$ será igual a b, ou seja $a^{\log_a b} = b$.

Propriedades dos Logaritmos

Logaritmo de um produto: O logaritmo de um produto é igual a soma de seus logaritmos: $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$

Logaritmo de um quociente: O logaritmo de um quociente é igual a diferença dos logaritmos: $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

Logaritmo de uma potência: O logaritmo de uma potência é igual ao produto dessa potência pelo logaritmo: $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

Mudança de base: Podemos mudar a base de um logaritmo usando

a seguinte relação: $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

Exemplos

Escreva os logaritmos abaixo na forma de um único logaritmo.

$$\log_3 8 + \log_3 10$$

$$\log_2 30 - \log_2 6$$

$$4 \log_4 3$$

Solução

$$a) \log_3 8 + \log_3 10 = \log_3 8 \cdot 10 = \log_3 80$$

$$b) \log_2 30 - \log_2 6 = \log_2 \left(\frac{30}{6}\right) = \log_2 5$$

$$c) 4 \log_4 3 = \log_4 3^4 = \log_4 81$$

Escreva o $\log_8 6$ usando logaritmo na base 2

Solução

$$\log_8 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 8} = \frac{\log_2 3 + \log_2 2}{\log_2 2^3} = \frac{\log_2 3 + 1}{3}$$

Cologaritmo

O chamado **cologaritmo** é um tipo especial de logaritmo expresso pela expressão:

$$\operatorname{colog}_a b = -\log_a b$$

Podemos ainda escrever que:

$$\operatorname{colog}_a b = \log_a \left(\frac{1}{b} \right)$$

Curiosidades sobre os logaritmos

O termo logaritmo vem do grego, onde “*logos*” significa razão e “*arithmos*” corresponde a número.

Os criadores dos Logaritmos foram John Napier (1550-1617), matemático escocês, e Henry Briggs (1531-1630), matemático inglês. Eles criaram esse método com o intuito de facilitarem os cálculos mais complexos que ficou conhecido como “logaritmos naturais” ou “logaritmos neperianos”, em alusão a um de seus criadores: John Napier.

MATEMÁTICA

ARITMÉTICA

Função Logarítmica

A função logarítmica de base **a** é definida como $f(x) = \log_a x$, com **a** real, positivo e $a \neq 1$. A função inversa da função logarítmica é a função exponencial.

O logaritmo de um número é definido como o expoente ao qual se deve elevar a base **a** para obter o número **x**, ou seja:

$$\text{Log}_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Exemplos

$$f(x) = \log_3 x$$

$$g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

$$h(x) = \log_{10} x = \log x$$

Domínio da função logarítmica

O domínio de uma função representa os valores de **x** onde a função é definida. No caso da função logarítmica, devemos levar em consideração as condições de existência do logaritmo.

Portanto, o logaritmando deve ser positivo e a base também deve ser positiva e diferente de 1.

Exemplo

Determine o domínio da função $f(x) = \log_2(x + 3)$.

Solução

Para encontrar o domínio, devemos considerar que $(x + 3) > 0$, pela condição de existência do logaritmo. Resolvendo essa inequação, temos:

$$x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$$

Assim, o domínio da função pode ser representado por:

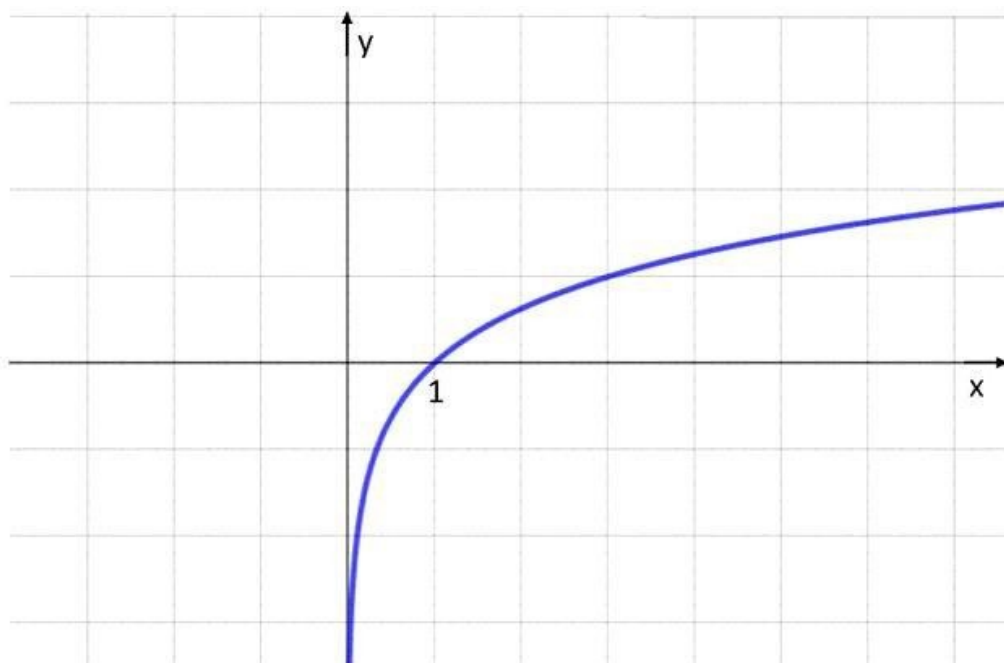
$$D = \{x \in \mathbb{R} / x > -3\}$$

Gráfico da função logarítmica

De uma forma geral, o gráfico da função $y = \log_a x$ está localizado no I e IV quadrantes, pois a função só é definida para $x > 0$.

Além disso, a curva da função logarítmica não toca o eixo y e corta o eixo x no ponto de abscissa igual a 1, pois $y = \log_a 1 = 0$, para qualquer valor de **a**.

Abaixo, apresentamos o esboço do gráfico da função logarítmica.



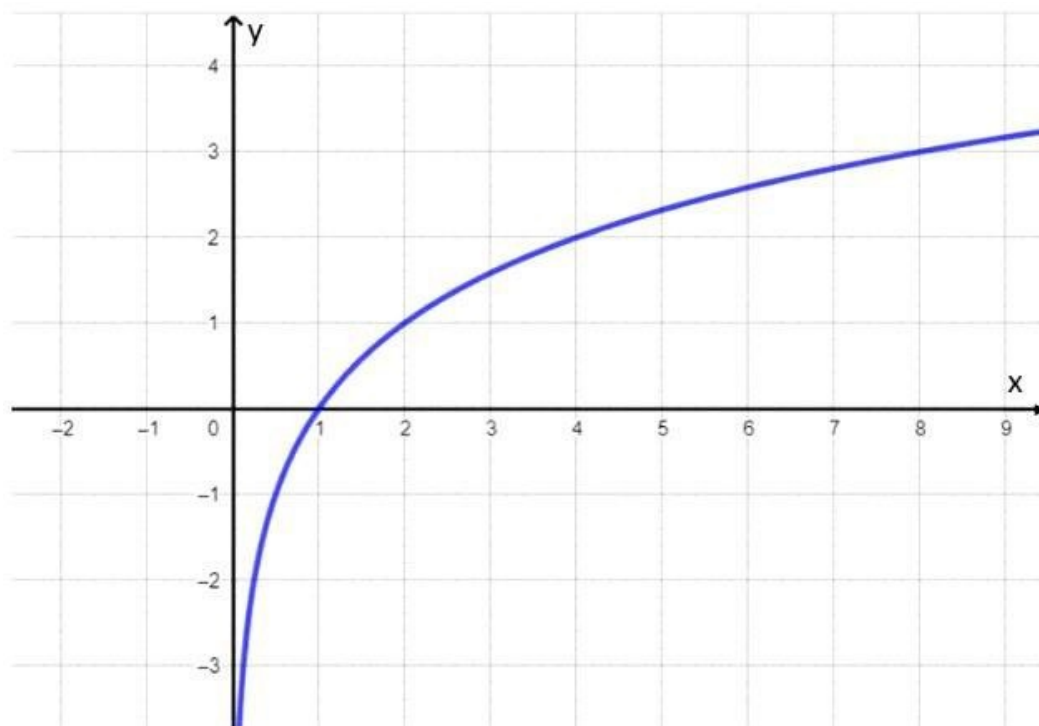
Função crescente e decrescente

Uma função logarítmica será crescente quando a base **a** for maior que 1, ou seja, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$. Por exemplo, a função $f(x) = \log_2 x$ é uma função crescente, pois a base é igual a 2.

Para verificar que essa função é crescente, atribuímos valores para x na função e calculamos a sua imagem. Os valores encontrados estão na tabela abaixo.

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{4}$	$y = \log_2 (\frac{1}{4}) = -2$
$\frac{1}{2}$	$y = \log_2 (\frac{1}{2}) = -1$
1	$y = \log_2 1 = 0$
2	$y = \log_2 2 = 1$
4	$y = \log_2 4 = 2$

Observando a tabela, notamos que quando o valor de x aumenta, a sua imagem também aumenta. Abaixo, representamos o gráfico desta função.



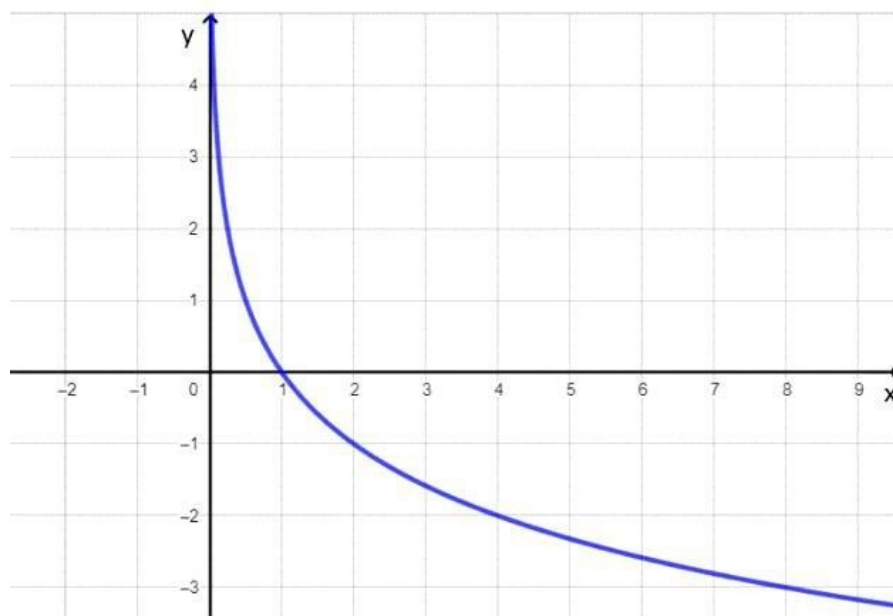
Por sua vez, as funções cujas bases são valores maiores que zero e menores que 1 são decrescentes, ou seja, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$. Por exemplo, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ é uma função decrescente, pois a base é igual a $\frac{1}{2}$.

Calculamos a imagem de alguns valores de x desta função e o resultado encontra-se na tabela abaixo:

x	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{4}$	$y = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right) = 2$
$\frac{1}{2}$	$y = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) = 1$
1	$y = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$
2	$y = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$
4	$y = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$

Notamos que, enquanto os valores de x aumentam, os valores das respectivas imagens diminuem. Desta forma, constatamos que a função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ é uma função decrescente.

Com os valores encontrados na tabela, traçamos o gráfico dessa função. Note que quanto menor o valor de x, mais perto do zero a curva logarítmica fica, sem, contudo, cortar o eixo y.

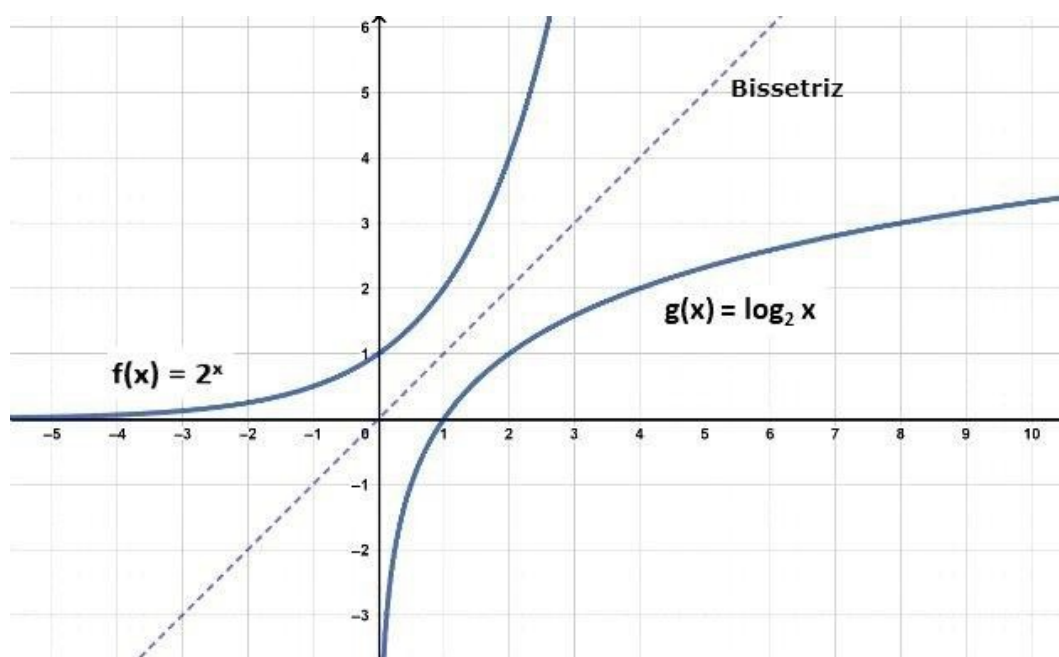


Função Exponencial

A inversa da função logarítmica é a função exponencial. A função exponencial é definida como $f(x) = a^x$, com a real positivo e diferente de 1.

Uma relação importante é que o gráfico de duas funções inversas são simétricos em relação a bissetriz dos quadrantes I e III.

Desta maneira, conhecendo o gráfico da função logarítmica de mesma base, por simetria podemos construir o gráfico da função exponencial.



No gráfico acima, observamos que enquanto a função logarítmica cresce lentamente, a função exponencial cresce rapidamente.

MATEMÁTICA

INEQUAÇÕES

Inequação Logarítmica

As inequações logarítmicas são todas aquelas que apresentam logaritmos. A incógnita, nesses casos, pertence ao logaritmando ou à base.

As **inequações logarítmicas** são todas aquelas que apresentam logaritmos. A incógnita, nesses casos, está no **logaritmando** e/ou na **base**. Vale lembrar que um **logaritmo** possui o seguinte formato:

$$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b,$$

***a** é a base do logaritmo; **b** é o logaritmando e **x** é o logaritmo.

Para resolver inequações logarítmicas, aplicamos as propriedades operatórias dos logaritmos e os conceitos tradicionais de resolução de inequações. Assim como fazemos com as equações logarítmicas, **é importante verificar as condições de existência dos logaritmos** (*tanto a base quanto o logaritmando devem ser maiores que zero*).

Ao desenvolver as inequações logarítmicas, podemos alcançar duas situações:

1º) Desigualdade entre logaritmos de mesma base:

$$\log_a b < \log_a c$$

Temos aqui dois casos a serem analisados: se **a base for maior do que 1** (**a > 1**), podemos desconsiderar o logaritmo e *manter a desigualdade* entre os logaritmandos, isto é:

$$\text{Se } a > 1, \text{ então } \log_a b < \log_a c \leftrightarrow b < c$$

Se, em contrapartida, **a base for um número entre 0 e 1 ($0 > a > 1$)**, ao resolver a inequação logarítmica, devemos *inverter a desigualdade* e estabelecer uma inequação entre os logaritmandos, ou seja:

Se $0 > a > 1$, então $\log_a b < \log_a c \leftrightarrow b > c$

2º) Desigualdade entre um logaritmo e um número real:

$$\log_a b < x$$

Se, ao resolver uma inequação logarítmica, depararmos-nos com uma desigualdade entre um logaritmo e um número real, podemos aplicar a propriedade básica do logaritmo, mantendo intacto o símbolo da desigualdade:

$$\log_a b < x \leftrightarrow b < a^x$$

ou

$$\log_a b > x \leftrightarrow b > a^x$$

Vejamos alguns exemplos de resolução de inequações logarítmicas:

Exemplo 1: $\log_5 (2x - 3) < \log_5 x$

Devemos verificar as condições de existência dos logaritmos:

$$\begin{array}{ll} 2x - 3 > 0 & \\ 2x > 3 & x > 0 \\ x > 3/2 & \end{array}$$

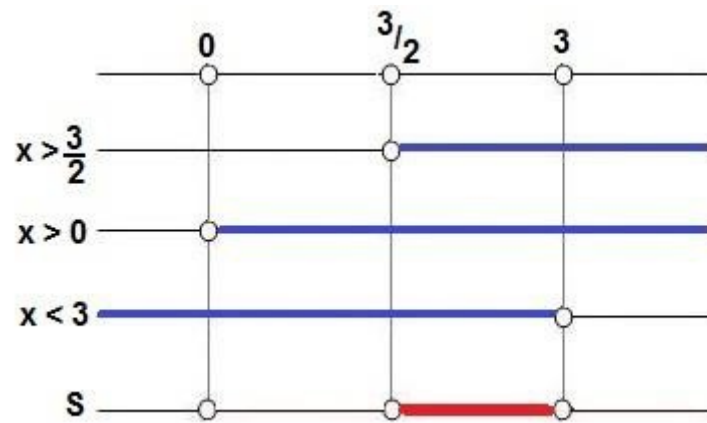
Temos uma desigualdade entre logaritmos de mesma base que é **maior** do que **1**. Podemos então manter a desigualdade apenas entre os logaritmandos:

$$\log_5 (2x - 3) < \log_5 x$$

$$2x - 3 < x$$

$$2x - x < 3$$

$$x < 3$$



Quadro de resolução do Exemplo 1

Nesse caso, a solução é

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 3 \right\}$$

.

Exemplo 2: $\log_2 (x + 3) \geq 3$

Primeiramente, verificamos a condição de existência do logaritmo:

$$x + 3 > 0$$

$$x > -3$$

Nesse caso, há uma desigualdade entre um logaritmo e um número real. Podemos resolver o logaritmo da forma convencional, mantendo a desigualdade:

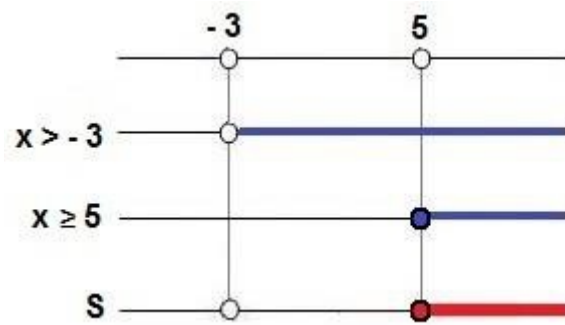
$$\log_2 (x + 3) \geq 3$$

$$x + 3 \geq 2^3$$

$$x + 3 \geq 8$$

$$x \geq 8 - 3$$

$$x \geq 5$$



Quadro de resolução do Exemplo 2

A solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$.

Exemplo 3: $\log_{1/2} 3x > \log_{1/2} (2x + 5)$

Verificando as condições de existência dos logaritmos, temos:

$3x > 0$	$2x + 5 > 0$
$x > 0$	$2x > -5$
	$x > -5/2$

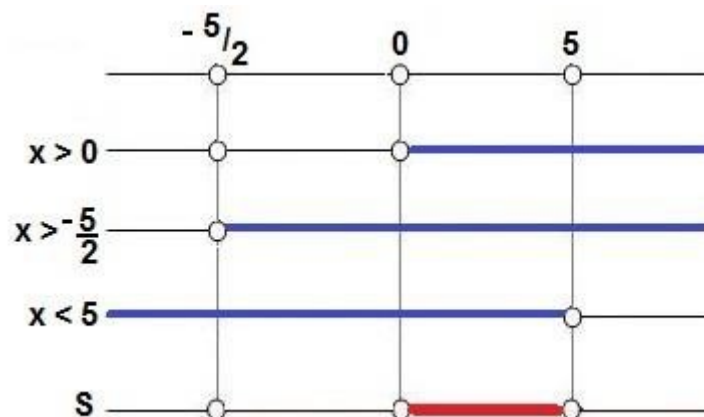
Nesse exemplo, há uma desigualdade entre logaritmos de mesma base que é **menor** do que 1. Para resolvê-la, devemos inverter a desigualdade, aplicando-a entre os logaritmandos:

$$\log_{1/2} 3x > \log_{1/2} (2x + 5)$$

$$3x < 2x + 5$$

$$3x - 2x < 5$$

$$x < 5$$



Quadro de resolução do Exemplo 3

Nesse caso, a solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$.