# 3. Velocità della luce e statica del campo gravitazionale;*

di A. Einstein.

In un lavoro pubblicato l'anno scorso[1]) ho tratto alcune conseguenze dall'ipotesi che campo gravitazionale e accelerazione del sistema di coordinate siano fisicamente equivalenti, le quali conseguenze si annettono bene ai risultati della teoria della relatività (la teoria della relatività del movimento uniforme). È venuto fuori però che la validità di uno dei postulati fondamentali di quella teoria, quello della costanza della velocità della luce, può rivendicare la sua validità solo in regioni dello spazio-tempo di potenziale gravitazionale costante. Nonostante questo risultato escluda in generale l'utilizzo delle trasformazioni di Lorentz, esso non ci può scoraggiare dal perseguire ulteriormente il cammino intrapreso; per lo meno, secondo la mia opinione, l'ipotesi che "il campo di accelerazione" sia un caso speciale del campo gravitazionale ha una così grande probabilità di essere corretta, specialmente considerando le conclusioni tratte già nel primo lavoro riguardanti la massa gravitazionale del contenuto energetico, che un più preciso sviluppo delle conseguenze di quell'ipotesi di equivalenza sembra necessaria.

Intanto Abraham ha costruito una teoria della gravitazione[2] che contiene come caso speciale le conseguenze tratte nel mio primo lavoro. Vedremo però nel seguito che il sistema di equazioni di Abraham non si può armonizzare con l'ipotesi di equivalenza e che la sua interpretazione di tempo e spazio non è sostenibile già dal punto di vista formale della matematica.

## § 1. Spazio e tempo nel campo di accelerazione.

Si consideri il sistema di riferimento $K$ (coordinate $x, y, z$) in uno stato di accelerazione uniforme nella direzione della sua coordinata $x$. Questa accelerazione sia una uniforme nel senso di Born; cioè, l'accelerazione dell'origine, riferita ad un sistema non accelerato rispetto al quale i punti di $K$ non possiedono nessuna velocità, o una velocità infinitamente piccola, è una quantità costante. Un tale sistema $K$ è, secondo l'ipotesi di equivalenza, strettamente equivalente ad un sistema a riposo nel quale si trova un campo gravitazionale statico, senza masse, di un certo tipo.[3])

*Titolo originale: *Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes.* Pubblicato in: *Annalen der Physik* **38** (1912): 355–369. Tradotto da Oliver F. Piattella.

[1]A. Einstein, Ann. d. Phys. **4.** p. 35. 1911.

[2]M. Abraham, Physik. Zeitschr. **13.** Nr. 1. 1912.

[3]Si devono pensare le masse che producono questo campo come situate all'infinito.

La misura spaziale di $K$ avviene per mezzo di righelli che — paragonati l'uno con l'altro in stato di riposo alla stessa posizione di $K$ — possiedono la stessa lunghezza; le leggi della geometria devono valere per lunghezze così misurate, dunque anche per le relazioni tra le coordinate $x, y, z$ e altre lunghezze. Questa costruzione non è evidentemente garantita, ma contiene ipotesi fisiche che eventualmente potrebbero provarsi false; per esempio, è altamente improbabile che essa valga in un sistema in rotazione uniforme nel quale, a causa della contrazione di Lorentz, il rapporto tra circonferenza e diametro, utilizzando la nostra definizione per le lunghezze, dovrebbe essere diversa da $\pi$. Il righello, così come gli assi coordinati, sono da pensarsi come corpi rigidi. Ciò è permesso, nonostante il corpo rigido non possieda una reale esistenza secondo la teoria della relatività. Allora si può pensare di sostituire il corpo rigido per la misura con un grande numero di piccoli corpi non rigidi, che vengono messi in fila in modo tale da non esercitare pressione gli uni sugli altri, ciascuno venendo tenuto in modo speciale. Immaginiamo di misurare il tempo $t$ nel sistema $K$ per mezzo di orologi costruiti in modo tale e di una tale rigida disposizione nei punti spaziali del sistema $K$ che l'intervallo di tempo — con questi misurato — che un raggio di luce impiega per arrivare a un punto $B$ da un punto $A$ del sistema $K$ non dipende dall'istante di emissione del raggio di luce in $A$. Verrà mostrato in seguito che la simultaneità può essere definita in maniera priva di contraddizioni se rispetto alla *regolazione* degli orologi viene soddisfatta la condizione per cui tutti i raggi di luce che attraversano un punto $A$ di $K$ possiedono in $A$ la stessa velocità di propagazione, indipendentemente dalla direzione.

Immaginiamoci ora il sistema di riferimento $K$ $(x, y, z, t)$ osservato da un sistema di riferimento non accelerato $\Sigma$ $(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ (in cui c'è un potenziale gravitazionale costante). Stabiliamo da qui in avanti che l'asse $x$ giaccia lungo l'asse $\xi$ e che l'asse $y$ sia parallelo all'asse $\eta$ e che l'asse $z$ sia parallelo all'asse $\zeta$. Questa condizione è possibile sotto la supposizione che lo stato di *accelerazione* non influisca sulla forma di $K$ rispetto a $\Sigma$. Questa ipotesi fisica la consideriamo basilare. Da questa segue che per $\tau$ arbitrari si deve avere

$$\begin{cases} \eta = y \ , \\ \zeta = z \ , \end{cases} \tag{1}$$

cosicché ora non ci rimane che cercare la relazione che lega $\xi$ e $\tau$ da una parte con $x$ e $t$ dall'altra. Al tempo $\tau = 0$ i due sistemi di riferimento coincidano; allora le equazioni di sostituzione ricercate devono in qualunque caso essere della forma

$$\begin{cases} \xi = \lambda + \alpha t^2 + \dots \\ \tau = \beta + \gamma t + \delta t^2 + \dots \end{cases} \tag{2}$$

I coefficienti di queste serie, che valgono per valori positivi e negativi sufficientemente piccoli di $t$, devono essere considerati momentaneamente come arbitrarie funzioni incognite di $x$. Limitandoci ai termini scritti otteniamo per differenziazione

$$\begin{cases} d\xi = (\lambda' + \alpha' t^2)dx + 2\alpha t dt \ , \\ d\tau = (\beta' + \gamma' t + \delta' t^2)dx + (\gamma + 2\delta t)dt \ . \end{cases} \tag{3}$$

Immaginiamoci il tempo nel sistema $\Sigma$ misurato in modo tale che la velocità della luce sia 1. Possiamo quindi scrivere l'equazione di una superficie che si propaga alla velocità della luce a partire da un punto arbitrario dello spazio, limitandoci a un intorno infinitamente piccolo del punto spaziale, nella forma

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - d\tau^2 = 0 \ .$$

La stessa superficie deve avere nel sistema $K$ equazione

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0 \ .$$

Le equazioni di sostituzione (2) devono essere tali per cui queste due equazioni siano equivalenti. Ciò richiede, a causa della (1) l'identità

$$d\xi^2 - d\tau^2 = dx^2 - c^2 dt^2 \ .$$

Introducendo nel membro a sinistra di questa equazione in $dx$ e $dt$ date dalla (3) e uguagliando i coefficienti a sinistra e a destra di $dx^2$, $dt^2$ e $dxdt$, si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} 1 &= (\lambda' + \alpha' t^2)^2 - (\beta' + \gamma' t + \delta' t^2)^2 \ , \\ -c^2 &= 4\alpha^2 t^2 - (\gamma + 2\delta t)^2 \ , \\ 0 &= (\lambda' + \alpha' t^2) 2\alpha t - (\beta' + \gamma' t + \delta' t^2)(\gamma + 2\delta t) \ . \end{aligned}$$

Queste equazioni valgono identicamente in $t$ fino a potenze di $t$ tali per cui i termini trascurati nella (2) non hanno ancora nessuna influenza, quindi la prima equazione fino alla seconda, la seconda e la terza fino alla prima potenza di $t$. Da ciò seguono le equazioni

$$\begin{aligned} 1 &= \gamma'^2 - \beta'^2 \ , \qquad 0 = \beta'\gamma' \ , \qquad 2\lambda'\alpha' - \gamma'^2 - 2\beta'\delta' = 0 \ , \\ -c^2 &= -\gamma^2 \ , \qquad 0 = \gamma\delta \ , \\ 0 &= \beta'\gamma \ , \qquad 0 = 2\alpha\gamma' - 2\beta'\delta - \gamma\gamma' \ . \end{aligned}$$

Siccome $\gamma$ non può essere zero, segue dalla prima equazione della terza linea che $\beta' = 0$. $\beta$ è quindi una costante che possiamo mettere a zero scegliendo opportunamente l'origine del tempo. Il coefficiente $\gamma$ deve essere inoltre positivo; risulta quindi dalla prima equazione della seconda riga che

$$\gamma = c \ .$$

Dalla seconda equazione della seconda riga:

$$\delta = 0 \ .$$

Siccome $\beta'$ è uguale a zero e possiamo supporre che $x$ cresca al crescere di $\xi$, segue dunque dalla prima equazione della prima linea

$$\lambda' = 1 \ ,$$

dunque se $x$ dev'essere zero per $t = 0$ e $\xi = 0$

$$\lambda = x \ .$$

Infine, dalla terza equazione della prima riga e dalla seconda della terza riga, usando le relazioni appena ottenute, seguono le equazioni differenziali

$$\begin{aligned} 2\alpha' - c'^2 &= 0 \ , \\ 2\alpha - cc' &= 0 \ . \end{aligned}$$

Da queste segue, indicando con $c_0$ e $a$ delle costanti di integrazione

$$\begin{aligned} c &= c_0 + ax \ , \\ 2\alpha &= a(c_0 + ax) = ac \ . \end{aligned}$$

Quindi la sostituzione ricercata per sufficientemente piccoli valori di $t$ è ottenuta. Trascurando la potenze terza e di ordine superiore di $t$ valgono le seguenti equazioni

$$\begin{cases} \xi = x + \frac{ac}{2}t^2 \ , \\ \eta = y \ , \\ \zeta = z \ , \\ \tau = ct \ , \end{cases} \tag{4}$$

dove la velocità della luce $c$ nel sistema $K$, che ora può dipendere da $x$ ma non da $t$, è data dalla relazione appena ottenuta

$$c = c_0 + ax \ . \tag{5}$$

La costante $c_0$ dipende da quanto rapidamente batte il tempo un orologio con cui misuriamo il tempo nell'origine di $K$. Il significato della costante $a$ si dà nel seguente modo. La prima e la quarta delle equazioni (4) danno per l'origine di $K$ ($x = 0$), considerando la (5), l'equazione del movimento

$$\xi = \frac{a}{2c_0}\tau^2 \ .$$

Dunque $a/c_0$ è l'accelerazione dell'origine di $K$ rispetto a $\Sigma$, misurata nell'unità di tempo per cui la velocità della luce è 1.

# § 2. Equazione differenziale del campo gravitazionale statico, equazione del movimento di un punto materiale nel campo gravitazionale statico.

Dal lavoro precedente risulta subito che in un campo gravitazionale statico e omogeneo esiste una relazione tra $c$ e il potenziale gravitazionale, o in altre parole, che il campo è determinato da $c$. In quello stesso campo gravitazionale, che corrisponde al campo di accelerazione considerato nel § 1, l'equazione

$$\Delta c = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = 0 \ , \tag{5a}$$

è soddisfatta secondo la (5) e il secondo il il principio di equivalenza, ed è immediato ipotizzare che dobbiamo considerare questa equazione valida come in quel campo gravitazionale statico senza massa.[4]) Ad ogni modo, quest'equazione è la più semplice compatibile con la (5).

È facile costruire quell'equazione, ipoteticamente valida, che corrisponde a quella di Poisson. Segue infatti immediatamente dal significato di $c$ che $c$ è determinata a meno di un fattore costante che dipende da come sia fatto un orologio col quale si misura $t$ nell'origine di $K$. L'equazione corrispondente a quella di Poisson deve dunque essere omogenea in $c$. La più semplice equazione di questo tipo è l'equazione lineare

$$\Delta c = kc\varrho \ , \tag{5b}$$

dove si intende con $k$ la costante gravitazionale (universale) e con $\varrho$ la densità della materia. Quest'ultima dev'essere definita in modo tale che attraverso la ripartizione in masse già data, cioè per una data quantità di materia nell'elemento di spazio, sia indipendente da $c$. Otteniamo questo ponendo che la massa di un centimetro cubico di acqua sia uguale a 1, quale che sia il potenziale gravitazionale in cui dovesse trovarsi; $\varrho$ è quindi il rapporto tra la massa contenuta in un centimetro cubico e questa unità.

Cerchiamo ora di trovare la legge del movimento in un campo gravitazionale statico. A tal proposito cerchiamo la legge del movimento di un punto materiale sul quale non agiscono forze nel campo di accelerazione considerato nel § 1. Nel sistema $\Sigma$ questa legge del movimento è

$$\begin{aligned} \xi &= A_1\tau + B_1 \ , \\ \eta &= A_2\tau + B_2 \ , \\ \zeta &= A_3\tau + B_3 \ , \end{aligned}$$

dove $A$ e $B$ sono costanti. Queste equazioni si trasformano grazie alle (4) nelle equazioni, valide per $t$ sufficientemente piccoli,

$$\begin{aligned} x &= A_1ct + B_1 - \frac{ac}{2}t^2 \ , \\ y &= A_2ct + B_2 \ , \\ z &= A_3ct + B_3 \ . \end{aligned}$$

Differenziando una volta e poi un'altra ancora si ottiene dalla prima equazione, ponendo $t = 0$, entrambe le equazioni[5]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1c \ , \\ \ddot{x} &= 2A_1\dot{c} - ac \ . \end{aligned}$$

Da entrambe queste equazioni segue, eliminando $A_1$,

$$c\ddot{x} - 2\dot{c}\dot{x} = -ac^2 \ ,$$

[4] In un lavoro che seguirà in breve verrà mostrato che le equazioni (5$a$) e (5$b$) non possono ancora essere completamente corrette. In questo lavoro verranno provvisoriamente utilizzate

[5] I termini trascurati nella (2) non sono rilevanti in questa doppia differenziazione e mettendo in seguito $t = 0$.

o l'equazione

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{c^2}\right) = -\frac{a}{c^2} \ .$$

Allo stesso modo risultano per le altre due componenti le equazioni

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{c^2}\right) = 0 \ ,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{c^2}\right) = 0 \ .$$

Queste tre equazioni valgono in principio all'istante $t = 0$. Valgono però in generale perché niente sopra mostra che noi lo abbiamo scelto come punto iniziale del nostro sviluppo in serie. Le equazioni così trovate sono le equazioni del movimento cercate del punto libero di forze in movimento in un campo di accelerazione costante. Considerando che $a = \partial c/\partial x$ e che $(\partial c/\partial y) = (\partial c/\partial z) = 0$ possiamo scrivere queste equazioni anche nella forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{c^2}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial x} \ , \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{c^2}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial y} \ , \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{c^2}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial z} \ . \end{cases} \tag{6}$$

In questa forma delle equazioni la direzione $x$ non è più specificata; entrambi i membri hanno carattere vettoriale. Dobbiamo considerare queste equazioni perciò anche come equazioni del movimento di un punto materiale in un campo gravitazionale statico, se il punto è soggetto solamente all'effetto del peso.

Dalla (6) segue in primo luogo in quale relazione sia la costante $k$ che appare nella (5$b$) con la costante gravitazionale $K$, nel senso usuale. Nel caso di velocità piccole rispetto a $c$ si ha infatti secondo la (6)

$$\ddot{x} = -c\frac{\partial c}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \ ,$$

cosicché la (5$b$) diventa, trascurando certi termini,

$$\Delta\Phi = kc^2\varrho \ .$$

Si ha dunque

$$K = kc^2 \ .$$

La costante gravitazionale $K$ non è dunque una costante universale, ma solamente il quoziente $K/c^2$.

Moltiplicando le equazioni (6) rispettivamente con $\dot{x}/c^2$, $\dot{y}/c^2$ e $\dot{z}/c^2$ e sommandole, definendo

$$q^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \ ,$$

si ottiene

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{c^4}\right) = -\frac{\dot{c}}{c^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2c^2}\right) \ ,$$

o

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)\right] = 0 \ ,$$

o

$$\frac{c}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} = \text{costante}\ . \tag{7}$$

Questa equazione contiene il principio dell'energia per il punto materiale in movimento nel campo gravitazionale stazionario. Il membro a sinistra di questa equazione dipende da $q$ esattamente nella stessa maniera in cui l'energia del punto materiale dipende da $q$ secondo la usuale teoria della relatività. Dobbiamo quindi vedere il membro a sinistra dell'equazione come l'energia $E$ del punto a meno di un fattore (dipendente solamente dallo stesso punto massivo). Questo fattore va evidentemente messo uguale alla massa $m$, nel senso stabilito sopra, poiché quella definizione stabilisce la massa indipendente dal campo gravitazionale. Si ha dunque

$$E = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\ , \tag{8}$$

o, approssimata,

$$E = mc + \frac{m}{2c}q^2\ . \tag{8a}$$

Dal secondo membro di questo sviluppo viene fuori per prima cosa che la quantità da noi denotata come energia possiede una dimensione diversa dalla solita. Corrispondentemente anche la misura della singola quantità di energia diventa diversa, ovvero di un fattore $c$ più piccolo rispetto al sistema per noi comune. Inoltre "l'energia cinetica", che per altro secondo la (8) strettamente parlando non può essere separata dall'energia gravitazionale, non dipende solamente da $m$ e $q$, ma anche da $c$, ovvero dal potenziale gravitazionale. Dalla (8) segue inoltre l'importante risultato che l'energia di un punto a riposo nel campo gravitazionale è $mc$. Se vogliamo dunque attenerci alla relazione

$$\text{Forza} \cdot \text{cammino} = \text{Energia introdotta}\ ,$$

allora la forza $\mathfrak{K}$ esercitata sul punto materiale a riposo nel campo gravitazionale è

$$\mathfrak{K} = -m\ \text{grad}\ c\ .$$

Vogliamo ora derivare le equazioni del movimento del punto materiale in un campo gravitazionale statico arbitrario, per il caso in cui oltre al peso agiscano anche altre forze sul punto. Notiamo che le equazioni (6) non sono simili alle equazioni del movimento che valgono nella meccanica relativistica. Moltiplicandole però per il membro a sinistra della (7), otteniamo così le equazioni equivalenti alle (6)

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\frac{\dot{x}}{c}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right\} = -\frac{\frac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\ , \tag{6a}$$

e così via per le altri componenti. Il termine a sinistra ha esattamente la stessa forma come nella usuale teoria della relatività, a parte per un fattore $1/c$ al numeratore (che è irrilevante nella usuale teoria della relatività). Dovremo quindi denotare la quantità tra parentesi graffe come la componente $x$ della quantità di moto (per un punto di massa 1). Abbiamo inoltre appena mostrato che $-\partial c/\partial x$ è da interpretarsi come la componente $x$ della forza esercitata dal campo gravitazionale su di un punto massivo a riposo. La forza esercitata dal campo gravitazionale su di un punto massivo di massa 1 in movimento arbitrario può dunque differenziarsi solamente per un fattore che va a zero con $q$. L'equazione appena costruita induce a porre questa forza $\mathfrak{K}_g$ uguale a $-\frac{\frac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{1-q^2/c^2}}$. Il membro a destra dell'equazione trovata diventa quindi $\mathfrak{K}_g$. La derivata temporale del momento è dunque uguale alla forza agente. Se agisse ancora un'altra forza $\mathfrak{K}$ sul punto, allora dovremmo aggiungere al membro destro dell'equazione ancora un altro $\mathfrak{K}/m$ cosicché l'equazione di movimento di un punto di massa $m$ acquisisce la forma

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m\frac{\dot{x}}{c}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right\} = -\frac{m\frac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} + \mathfrak{K}_x \text{ etc .} \tag{6b}$$

Questa equazione è però valida se il principio dell'energia è soddisfatto nella forma:

$$\mathfrak{K}q = \dot{E} \ . \tag{9}$$

Ciò si può mostrare come segue.

Scrivendo la (6$b$) nella forma:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\dot{x}}{c}E\right\} + \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial x}E = \mathfrak{K}_x \text{ etc .}$$

e moltiplicando queste equazioni rispettivamente per $\dot{x}/c^2$, e così via, e sommandole, si trova:

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{c^2}\dot{E} + \frac{1}{2}E\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{c^4}\right) + E\frac{\dot{c}}{c^3} = \frac{\mathfrak{K}q}{c^2} \ .$$

Da qui si ottiene la relazione cercata, se si considera che, per via della (8), si ha

$$\frac{q^2}{c^4} = \frac{1}{c^2} - \frac{m^2}{E^2} \ ,$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{c^4}\right) = -\frac{\dot{c}}{c^3} + \frac{m^2 E}{E^3} \ .$$

Le relazioni della forza con la conservazione del momento e dell'energia rimangono così inalterate.

## § 3. Commenti sul significato fisico del potenziale gravitazionale statico.

Se misuriamo in uno spazio con potenziale gravitazionale pressoché costante la velocità della luce, misurando con un certo orologio il tempo che la luce impiega a percorrere un cammino chiuso di una determinata lunghezza, otteniamo per la velocità della luce sempre lo stesso valore, del tutto indipendente da quanto è grande il potenziale gravitazionale nello spazio in cui effettuiamo le misure.[6]) Ciò segue immediatamente dal principio di equivalenza. Quando diciamo che la velocità della luce in un punto $P$ è maggiore di $c/c_0$ rispetto a quella in un punto $P_0$, ciò significa dunque che in $P$ dobbiamo usare per la misura del tempo[7]) che corre più lentamente di un fattore $c/c_0$ dell'orologio usato in $P_0$ per la misurazione del tempo, quando l'andamento dei due orologi viene confrontato nella stessa posizione. Espresso in un altro modo: un orologio corre tanto più velocemente se noi lo portiamo in una regione di $c$ tanto maggiore. Questa dipendenza della velocità dello scorrere del tempo dal campo gravitazionale ($c$) vale per l'evoluzione temporale di un processo arbitrario. Questo fu mostrato già nel lavoro precedente.

Allo stesso modo la forza di richiamo di una molla stirata in un certo modo, o in generale la forza o l'energia di un sistema arbitrario, dipende sempre da quanto sia grande $c$ nella posizione in cui il sistema si trova. Questo si ottiene facilmente dal seguente raziocinio. Se facciamo esperimenti, uno dopo quell'altro, in molte piccole porzioni di spazio di diverso $c$ e usiamo sempre lo stesso orologio, lo stesso righello, e così via, otteniamo dappertutto — trascurando eventuali differenze di intensità del campo gravitazionale — le stesse leggi fisiche con le stesse costanti. Questo segue dal principio di equivalenza. Come orologio possiamo ad esempio adoperare due specchi distanziati di 1 cm, contando il numero di andate e ritorni del segnale di luce; operiamo quindi con una specie di tempo locale che Abraham denota con $l$. Questo si trova in relazione col tempo universale

$$dl = cdt \ .$$

Misurando il tempo con $l$, si determinerà per mezzo dell'energia di deformazione di una certa molla, stirata in un certo modo, di massa $m$, una certa velocità $dx/dl$, indipendente da quanto sia grande $c$ nella posizione dove avviene questo processo. Si ha quindi:

$$\frac{dx}{dl} = \frac{dx}{cdt} = a \ ,$$

dove $a$ è indipendente da $c$. Secondo la (8) però l'energia cinetica corrispondente a questo movimento può essere messa uguale a

$$\frac{m}{2c}q^2 = \frac{m}{2c}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2c}a^2c^2 = \frac{ma^2}{2}c \ .$$

L'energia della molla è quindi proporzionale a $c$, e lo stesso vale per l'energia e le forze di un qualunque sistema.

Questa dipendenza ha un'interpretazione fisica immediata. Mi immagino per esempio un filo senza massa teso tra due punti $P_1$ e $P_2$ di diverso potenziale gravitazionale. Una di due molle completamente identica tira il filo in $P_1$, l'altra lo tira in $P_2$, in modo tale da esserci equilibrio. Gli allungamenti $l_1$ e $l_2$, che entrambe le molle sperimentano, non saranno però uguali, ma la condizione di equilibrio sarà[8])

$$l_1 c_1 = l_2 c_2 \ .$$

[6]L'orologio usato per la misura del tempo è sempre lo stesso; viene sempre usato nella posizione in cui si deve misurare $c$.

[7]Cioè per la misura del tempo indicato con "$t$" nelle equazioni.

[8]Qui si presuppone però che non agisca alcuna forza sul filo tirato senza massa nel campo gravitazionale. Questo sarà motivato in un lavoro che seguirà in breve.

Infine si noti anche che con questo risultato generale è in accordo anche l'equazione ($5b$). Da questa equazione e dalla circostanza per cui la forza gravitazionale che agisce su di una massa $m$ è uguale a $-m$ grad $c$, segue infatti che la forza $\mathfrak{K}$ con la quale due masse che si trovano nel potenziale $c$ a distanza $r$ si attraggono, è data in prima approssimazione da

$$\mathfrak{K} = ck\frac{mm'}{4\pi r^2} \ .$$

Dunque anche questa forza è proporzionale a $c$. Immaginiamoci inoltre un "orologio gravitazionale" formato da una massa $m$ che circola intorno a una massa fissa $m'$ a distanza costante $R$ sotto la sola azione della forza gravitazionale, così ciò succede secondo la ($6b$) in prima approssimazione secondo le equazioni

$$m\ddot{x} = c\mathfrak{K}_x \text{ etc.}$$

Da qui segue

$$m\omega^2 R = c^2 k\frac{mm'}{4\pi R^2} \ .$$

La velocità di funzionamento $\omega$ dell'orologio gravitazionale è dunque proporzionale a $c$, come ciò dev'essere il caso per ogni orologio di tale fattura.

# § 4. Commenti generali sullo spazio e sul tempo.

In quale rapporto si colloca ora la teoria presentata con la vecchia teoria della relatività (cioè con la teoria in cui $c$ è universale)? Secondo l'opinione di Abraham, le equazioni di trasformazione di Lorentz devono valere come prima nell'infinitamente piccolo, cioè dev'esserci una trasformazione $x - t$ tale che valgano

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ ,$$

$$dt' = \frac{-\frac{v}{c^2}dx + dt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ .$$

$dx'$ e $dt'$ devono essere differenziali completi. Dunque devono valere le equazioni

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right\} \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right\} \ ,$$

Sia ora nel sistema non primato il campo gravitazionale statico. Allora $c$ è un'arbitraria funzione di $x$, ma indipendente da $t$. Se il sistema primato dovesse essere un sistema in movimento "uniforme", allora $v$ dovrebbe essere in ogni caso indipendente da $t$ per $x$ fissato. Perciò il membri sinistri delle equazioni dovrebbero essere zero, e così anche i membri destri. Quest'ultimo fatto però è impossibile perché per $c$ funzione di $x$ data arbitrariamente, entrambi i membri destri non possono essere messi a zero scegliendo $v$ come un'opportuna funzione di $x$. Così è dunque dimostrato che anche per regioni infinitamente piccole dello spazio-tempo non ci si può attenere alle trasformazioni di Lorentz, non appena si desiste della costanza universale di $c$.

Mi sembra che il problema dello spazio-tempo si stipuli come segue. Limitandosi a una regione di potenziale gravitazionale costante, le leggi della natura diventano così di forma notevolmente più semplice e più invariante, se le si riferisce a un sistema spazio-temporale di quelle varietà che sono tra loro legate da trasformazioni di Lorentz con $c$ costante. Non limitandosi a regioni di $c$ costante, allora diventa la varietà dei sistemi equivalenti, così come la varietà dei sistemi che lasciano le leggi della natura invariate, più grande, ma perciò le leggi diventeranno più complesse.

Praga, febbraio 1912.

(Ricevuto il 26 febbraio 1912.)