

# Sulla teoria della legge di distribuzione dell'energia nello spettro normale; di M. Planck\*

(esposto nella riunione del 14 dicembre 1900.)

(si veda a pagina 235 sopra.)

---

Miei Signori! Quando ebbi l'onore diverse settimane fa di dirigere la vostra attenzione su di una nuova formula che mi sembrava adatta ad esprimere la legge di distribuzione dell'energia irradiata per tutte le regioni dello spettro normale<sup>1)</sup>,<sup>2</sup> la mia opinione sull'utilità della formula si fondava, come già allora esposi, non solamente sull'apparente concordanza dei pochi numeri che io potei allora comunicarvi con i risultati delle misurazioni fino ad allora effettuate<sup>3)</sup>, ma principalmente sulla semplice costruzione della formula e in modo particolare sul fatto che la stessa fornisse un'espressione logaritmica molto semplice per la dipendenza dell'entropia di un risonatore irraggiato che oscilla in maniera monocromatica<sup>4</sup> dalla sua energia di oscillazione, la quale espressione sembrava promettere la possibilità di una interpretazione generale, per lo meno più generale di ogni altra formula fino ad allora suggerita, con eccezione di quella di WIEN, che però non è confermata dai fatti.

Entropia presuppone disordine, ed io credetti di dover scorgere questo disordine nell'irregolarità con la quale le oscillazioni del risonatore cambiano la loro ampiezza e la loro fase anche in un campo di radiazione perfettamente stazionario, fintanto che si considerano periodi di tempo grandi rispetto al tempo di una oscillazione, ma piccoli rispetto al tempo di una misura. L'energia costante del risonatore che oscilla in modo stazionario deve essere quindi intesa solamente come un valore medio nel tempo, o, il che risulta essere la stessa cosa, come il valore medio istantaneo delle energie di un grande numero di risonatori identici, che si trovano nel suddetto

---

\*Titolo originale: *Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum*. Pubblicato in: *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*. 2: 237. Tradotto da Oliver F. Piattella.

<sup>1</sup>M. PLANCK, *Verhandl. der Deutschen Physikal. Gesellsch.* 2. p. 202. 1900.

<sup>2</sup>[N.d.T.] "Spettro normale" si riferisce allo spettro di corpo nero, ossia allo spettro della radiazione emessa da un corpo in equilibrio termico e capace di assorbire completamente la radiazione su di esso incidente.

<sup>3</sup>Nel frattempo i Signori H. RUBENS e F. KURLBAUM hanno dato una conferma diretta per onde molto lunghe (*Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin* del 25 ottobre 1900, p. 929).

<sup>4</sup>[N.d.T.] La materia che costituisce il corpo nero è considerata formata, a livello microscopico, da questi risonatori, che oscillano quando sono eccitati da un'onda elettromagnetica. Nel caso considerato qui, essi oscillano monocromaticamente, ovvero con un'unica frequenza.

campo di radiazione stazionario sufficientemente lontani l'uno dall'altro in modo da non influenzarsi reciprocamente. Siccome l'entropia di un risonatore è legata al modo in cui l'energia viene distribuita allo stesso tempo su molti risonatori, io supposi che questa grandezza si dovesse calcolare nella teoria elettromagnetica della radiazione attraverso l'introduzione di considerazioni probabilistiche, il cui significato per la seconda legge fondamentale della termodinamica il Sig. L. BOLTZMANN<sup>5</sup>) ha scoperto per primo. Questa supposizione si è confermata; mi è stato possibile calcolare in modo deduttivo un'espressione per l'entropia di un risonatore che oscilla in maniera monocromatica e quindi anche per la distribuzione dell'energia in condizione di irraggiamento stazionario, cioè nello spettro normale,<sup>6</sup> per cui diventa solamente necessario dare un'interpretazione un po' più elaborata di quella attuale all'ipotesi "della radiazione naturale" da me introdotta nella teoria elettromagnetica.<sup>7</sup> Inoltre, in questo processo sono risultate tuttavia anche altre relazioni che sembrano avere una notevole portata per altri campi della fisica e anche della chimica.

Tuttavia, oggi non mi interessa tanto realizzare qui, sistematicamente in tutti i dettagli, quella deduzione, che si basa sulle leggi della radiazione elettromagnetica, della termodinamica e del calcolo delle probabilità, bensì mi interessa esporvi il vero nocciolo dell'intera teoria nel modo più chiaro possibile, e questo può avvenire al meglio se io vi descrivo qui un processo nuovo e totalmente elementare, attraverso il quale, senza conoscere nulla di una forma spettrale o anche di una qualche teoria, con l'aiuto di un'unica costante della natura si può calcolare la distribuzione di una data quantità di energia sui colori individuali dello spettro normale,<sup>8</sup> e quindi per mezzo di una seconda costante della natura si può anche calcolare numericamente la temperatura di questa radiazione di energia. Ci saranno diverse parti del procedimento che presenterò che vi sembreranno arbitrarie e complicate, ma, come detto, non mi importa qui della prova della necessità e della facile e pratica realizzabilità delle prescrizioni date, ma solamente della loro chiarezza e della loro evidenza per la soluzione del problema.

In un mezzo diatermico,<sup>9</sup> racchiuso da pareti riflettenti e con velocità di propagazione della luce pari a  $c$ , si trovano a grande distanza gli uni dagli altri, e in gran numero, dei risonatori lineari che oscillano in maniera monocromatica,<sup>10</sup> in particolare  $N$  con frequenza  $\nu$  (al secondo),  $N'$  con frequenza  $\nu'$ ,  $N''$  con frequenza  $\nu''$ , etc., dove tutti gli  $N$  sono numeri grandi. Il sistema contiene una certa quan-

---

<sup>5</sup>L. BOLTZMANN, namentlich Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien (II) 76. p. 373. 1877.

<sup>6</sup>[N.d.T.] Qui si trova un'altra definizione di "spettro normale", equivalente a quella data precedentemente, ossia: la distribuzione di energia in condizione di irraggiamento stazionario, che significa che i risonatori e la radiazione contenuta nel corpo nero scambiano energia in modo equilibrato.

<sup>7</sup>[N.d.T.] L'ipotesi di "radiazione naturale" consiste nel supporre che l'energia dell'onda elettromagnetica si distribuisce in modo aleatorio tra le sue frequenze. Questa ipotesi crea un ponte tra termodinamica ed elettromagnetismo che verrà usato in seguito.

<sup>8</sup>[N.d.T.] Ho tradotto con "colori", letteralmente, il tedesco *Farbe*. Si intende con ciò "frequenze".

<sup>9</sup>[N.d.T.] Un mezzo diatermico è un conduttore di calore.

<sup>10</sup>[N.d.T.] Un risonatore è detto lineare quando la sua forza di richiamo è una funzione lineare dello spostamento dalla posizione di equilibrio. In altre parole, il risonatore è un oscillatore armonico smorzato e forzato dalla radiazione elettromagnetica esterna.

tità di energia: l'energia totale  $E_t$ , in erg, che si presenta parte nel mezzo sotto forma di radiazione che si propaga, e parte nei risonatori come oscillazione stessa. La questione è come, in condizione di stazionarietà, questa energia si distribuisce sulle oscillazioni dei risonatori e sui singoli colori della radiazione che si trova nel mezzo, e quale temperatura possiede quindi il sistema.

Per rispondere a questa domanda, prendiamo prima in considerazione solamente le frequenze dei risonatori e conferiamo loro provvisoriamente certe energie arbitrarie, ovvero agli  $N$  risonatori  $\nu$ , ad esempio, l'energia  $E$ , agli  $N'$  risonatori  $\nu'$  l'energia  $E'$ , etc. Naturalmente la somma:

$$E + E' + E'' + \dots = E_0$$

deve essere minore di  $E_t$ . La restante energia  $E_t - E_0$  spetta quindi alla radiazione che si trova nel mezzo. Ora bisogna ancora definire la distribuzione dell'energia sui singoli risonatori all'interno di ogni specie, per prima la distribuzione dell'energia  $E$  sugli  $N$  risonatori con frequenza  $\nu$ . Se  $E$  viene vista come una grandezza che si può suddividere indefinitamente, la distribuzione è possibile in infiniti modi. Noi però consideriamo  $E$  - e questo è il punto essenziale di tutto il calcolo - come composta di un numero ben determinato di parti uguali e finite e ci serviamo per tale scopo della costante della natura  $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$  [erg  $\times$  sec].<sup>11</sup> Questa costante, moltiplicata per la frequenza comune  $\nu$  dei risonatori, dà l'elemento di energia  $\varepsilon$  in erg, e per mezzo della divisione di  $E$  per  $\varepsilon$  otteniamo il numero  $P$  degli elementi di energia che devono essere distribuiti tra gli  $N$  risonatori. Se il quoziente così calcolato non è un numero intero allora si prende per  $P$  il numero intero più vicino.

Ora, è chiaro che la distribuzione dei  $P$  elementi di energia sugli  $N$  risonatori può avvenire solamente in un numero ben determinato, e finito, di modi. Chiamiamo ciascuno di tali modi un "complexion", secondo un'espressione usata dal Sig. BOLTZMANN per un concetto simile. Denotando i risonatori con le cifre  $1, 2, 3, \dots$ , scrivendo queste in fila una accanto all'altra e collocando sotto ciascun risonatore il numero degli elementi di energia che gli spettano, si ottiene così per ogni complexion un simbolo della seguente forma:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 7 & 38 & 11 & 0 & 9 & 2 & 20 & 4 & 4 & 5 \end{array}$$

Qui si è supposto  $N = 10$  e  $P = 100$ . Il valore di tutti i possibili complexion è chiaramente uguale al valore di tutte le possibili sequenze di numeri che si possono ottenere per la fila di basso in questo modo, con  $N$  e  $P$  determinati. Per evitare ogni malinteso si noti che due complexion devono considerarsi come distinti anche quando le corrispondenti sequenze di numeri contengono le stesse cifre, ma poste in ordine diverso. Dal calcolo combinatorio, il valore di tutti i possibili complexion risulta in

$$\frac{N \cdot (N+1) \cdot (N+2) \cdot \dots \cdot (N+P-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot P} = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!P!}$$

<sup>11</sup>[N.d.T] Ecco la famosa costante di Planck. Il suo valore moderno è  $6,626196(50) \times 10^{-27}$  erg s.

e con sufficiente approssimazione<sup>12</sup>

$$= \frac{(N + P)^{N+P}}{N^N P^P} .$$

Eseguiamo lo stesso calcolo per i risonatori delle specie rimanenti, determinando per ognuna di queste il numero dei complexion possibili secondo l'energia assegnata a quei risonatori. La moltiplicazione di tutti i valori così ottenuti dà quindi il numero complessivo  $\mathfrak{R}$  dei possibili complexion per tutti i risonatori presi insieme, per la distribuzione di energia provvisoriamente ipotizzata.

Così anche a ogni altra distribuzione arbitrariamente presupposta di energia  $E$ ,  $E'$ ,  $E''$ , ... corrisponde un numero  $\mathfrak{R}$  di possibili complexion da determinarsi nel modo spiegato sopra. Ora, tra tutte le distribuzioni di energia che sono possibili mantenendo  $E_0 = E + E' + E'' + \dots$  costante ce n'è un'unica ben precisa per la quale il numero di possibili complexion è maggiore di ogni altra; ricerchiamo questa distribuzione di energia, eventualmente anche per tentativi; poiché è proprio quella che i risonatori in un campo di radiazione stazionario assumono quando possiedono complessivamente l'energia  $E_0$ . Dunque siano tutte le grandezze  $E$ ,  $E'$ ,  $E''$  ... espresse attraverso l'unica grandezza  $E_0$ . Attraverso la divisione di  $E$  per  $N$ , di  $E'$  per  $N'$ , etc. si ottiene quindi il valore stazionario dell'energia  $U_\nu$ ,  $U'_\nu$ ,  $U''_\nu$  ... di un singolo risonatore di ciascuna specie e da ciò anche la densità spaziale dell'energia irradiata nel mezzo diatermico appartenente alla regione spettrale  $\nu$  fino a  $\nu + d\nu$ :

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot U_\nu d\nu ,$$

per cui anche l'energia contenuta nel mezzo è determinata.

Di tutte le grandezze citate appare ora solamente  $E_0$  ancora come scelta arbitrariamente. Si vede però facilmente come pure  $E_0$  si calcoli dall'energia totale data  $E_t$ . Poiché se il valore scelto di  $E_0$  dovesse risultare in un valore un po' troppo grande di  $E_t$ , allora sarebbe corrispondentemente da ridurre, e viceversa.

Dopo che così, con l'aiuto di una costante  $h$ , si calcola la distribuzione stazionaria dell'energia, si trova la corrispondente temperatura in gradi Celsius per mezzo di una seconda costante della natura  $k = 1,346 \cdot 10^{-16}$  [erg:grad] attraverso l'equazione:<sup>13</sup>

$$\frac{1}{\vartheta} = k \frac{d \log \mathfrak{R}_0}{dE_0} .$$

Il prodotto  $k \log \mathfrak{R}_0$  è l'entropia del sistema di risonatori; essa è la somma delle entropie di tutti i singoli risonatori.

Sarebbe ora davvero molto scomodo esporre effettivamente i calcoli indicati, sebbene certamente non sarebbe senza interesse esaminare una volta per un caso semplice il grado di avvicinamento alla verità che così si raggiungerebbe. Un calcolo più generale, realizzato esattamente seguendo le prescrizioni date e totalmente senza sforzo, mostra molto più direttamente che la distribuzione di energia normale

<sup>12</sup>[N.d.T.] Questa è chiamata "approssimazione di Stirling". Vale per  $N$  e  $P$  grandi.

<sup>13</sup>[N.d.T.] Qui appare la famosa costante di Boltzmann  $k$ , che, nonostante il nome, fu di fatto introdotta da Planck. Il suo valore moderno è  $1,380622(59) \times 10^{-16}$  erg K<sup>-1</sup>.

in tal modo determinata nel mezzo irraggiato è rappresentata dall'espressione:

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{d\nu}{e^{k\nu} - 1},$$

la quale corrisponde esattamente alla forma spettrale da me stabilita precedentemente:

$$E_\lambda d\lambda = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{c_2} \cdot d\lambda \cdot \frac{1}{e^{\lambda\theta} - 1}$$

Le variazioni formali sono legate alla differenza nella definizione di  $u_\nu$  e  $E_\lambda$ . La formula superiore è perciò un po' più generale in quanto vale per un mezzo diatermico completamente arbitrario e con velocità di propagazione della luce  $c$ . Ho calcolato i valori numerici dati precedentemente per  $h$  e  $k$  da questa formula a partire dalle misurazioni di F. KURLBAUM<sup>14</sup>), e di O. LUMMER e E. PRINGSHEIM<sup>15</sup>).

Mi rivolgo ora con qualche piccola osservazione alla questione della necessità della deduzione presentata. Che l'elemento di energia  $\varepsilon$  ipotizzato per una specie di risonatore debba essere proporzionale alla frequenza  $\nu$ , si deduce immediatamente dalla legge fondamentale, cosiddetta dello spostamento, di WIEN. La relazione tra  $u$  e  $U$  è una delle equazioni fondamentali della teoria elettromagnetica della radiazione. Per il resto, tutta la deduzione si basa sull'unica supposizione che l'entropia di un sistema di risonatori con energia data è proporzionale al logaritmo del numero complessivo dei complexion che sono possibili data questa energia, e questa supposizione si può a sua volta scomporre in altre due: 1. che l'entropia del sistema in un certo stato è proporzionale al logaritmo della probabilità di questo stato, e 2. che la probabilità di ciascuno stato è proporzionale al numero dei complexion corrispondenti, o in altre parole, che un certo complexion è tanto probabile quanto qualunque altro. La proposizione 1., applicata a processi radiativi, ha senso solo se c'è una definizione della probabilità di uno stato, per questo per la radiazione di energia sin dall'inizio non si possiede davvero altro mezzo per definire la probabilità, se non come la propria entropia. Qui risiede una delle differenze in confronto alle relazioni corrispondenti nella teoria cinetica dei gas. La proposizione 2. costituisce il nocciolo di tutta la teoria presentata; la sua prova può essere fornita completamente solo attraverso l'esperienza. La proposizione 2. si può anche interpretare come una più dettagliata precisazione dell'ipotesi della radiazione naturale da me introdotta, e che io finora ho espresso solamente sotto forma del fatto che l'energia della radiazione si distribuisce in maniera completamente "irregolare" sulle singole frequenze parziali in essa contenute.<sup>16</sup>)

<sup>14</sup>F. KURLBAUM, Wied. Ann. 65. p. 759. 1898 ( $S_{100} - S_0 = 0,0731$  Watt:cm<sup>2</sup>).

<sup>15</sup>O. LUMMER e E. PRINGSHEIM, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 2. p. 176. 1900 ( $\lambda_m\theta = 2940$   $\mu \times \text{grad}$ ).

<sup>16</sup>M. PLANCK, Ann. d. Phys. 1. p. 73. 1900. Quando il Sig. W. WIEN nel suo Pariser Rapport (II p. 38, 1900) sulle leggi teoriche della radiazione trova perciò la mia teoria dei processi radiativi irreversibili non soddisfacente, perché essa non apporta la prova che l'ipotesi della radiazione naturale è l'unica che conduca all'irreversibilità, egli pretende secondo la mia opinione certo un po' troppo da questa ipotesi. Poiché se si potesse dimostrare l'ipotesi, allora non sarebbe proprio più un'ipotesi, e non ci sarebbe assolutamente nessun bisogno di formularne una.

Per concludere vorrei richiamare l'attenzione ancora su di una importante conseguenza della teoria sviluppata, che rende possibile allo stesso tempo un'ulteriore prova della sua validità. Il Sig. BOLTZMANN<sup>17)</sup> ha mostrato che l'entropia di un gas monoatomico in equilibrio è uguale a  $\omega R \log \mathfrak{P}_0$ , dove  $\mathfrak{P}_0$  rappresenta il numero dei possibili complexion per la distribuzione di probabilità della velocità (la "permutabilità"),  $R$  rappresenta la nota costante dei gas ( $8,31 \cdot 10^7$  per  $O = 16$ ),  $\omega$  rappresenta il rapporto, uguale per tutte le sostanze, della massa di una molecola effettiva per la massa di una grammo-molecola.<sup>18</sup> Sono presenti ora nel gas anche risonatori irraggianti, così secondo la teoria sviluppata qui l'entropia del sistema totale è proporzionale al logaritmo del numero di tutti i possibili complexion, velocità e radiazione presi insieme. Siccome però, secondo la teoria elettromagnetica della radiazione, le velocità degli atomi sono totalmente indipendenti dalla distribuzione dell'energia irradiata, così il numero complessivo dei complexion è semplicemente uguale al prodotto dei valori relativi alle velocità con quelli relativi alla radiazione, per cui l'entropia globale, se  $f$  è un fattore di proporzionalità, si rappresenta come:

$$f \log(\mathfrak{P}_0 \mathfrak{N}_0) = f \log \mathfrak{P}_0 + f \log \mathfrak{N}_0 .$$

Il primo sommando è l'entropia cinetica, il secondo è l'entropia di radiazione. Attraverso il paragone con l'espressione precedente si ottiene da qui:

$$f = \omega R = k ,$$

o

$$\omega = \frac{k}{R} = 1,62 \cdot 10^{-24} ,$$

cioè una molecola effettiva è  $1,62 \cdot 10^{-24}$  volte una grammo-molecola, o: un atomo di idrogeno pesa  $1,62 \cdot 10^{-24}$  g, dunque  $H = 1,01$ , o: ad una grammo-molecola di ciascuna sostanza corrispondono  $1/\omega = 6,175 \cdot 10^{23}$  molecole effettive. Il Sig. O. E. MEYER<sup>19)</sup> calcola questo valore a  $640 \cdot 10^{21}$ , quindi è in stretto accordo.

La costante di LOSCHMIDT  $\mathfrak{N}$ , cioè il numero di molecole di gas in 1 cm cubico a 0 gradi C e alla pressione di 1 atm è:

$$\mathfrak{N} = \frac{1013200}{R \cdot 273 \cdot \omega} = 2,76 \cdot 10^{19} .$$

Il Sig. DRUDE<sup>20)</sup> trova  $\mathfrak{N} = 2,1 \cdot 10^{19}$ .

La costante di BOLTZMANN-DRUDE  $\alpha$ , cioè la forza viva media di un atomo alla temperatura assoluta di 1 è:

$$\alpha = \frac{3}{2} \omega R = \frac{3}{2} k = 2,02 \cdot 10^{-16} .$$

---

Allora però non si potrebbe nemmeno dedurre qualcosa di essenzialmente nuovo. Dallo stesso punto di vista allora anche la teoria cinetica dei gas dovrebbe essere giudicata insoddisfacente, perché non viene ancora addotta la prova che l'ipotesi atomica è l'unica che spiega l'irreversibilità, e un'accusa corrispondente potrebbe interessare più o meno tutte le teorie ottenute per vie induttive.

<sup>17</sup>L. BOLTZMANN, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien (II) 76. p. 428. 1877.

<sup>18</sup>[N.d.T.] Una grammo-molecola di una sostanza ha un peso in grammi uguale al peso molecolare di quella sostanza. Questo  $\omega$  è il reciproco del numero di Avogadro.

<sup>19</sup>O. E. MEYER, La teoria cinetica dei gas, 2. Aufl. p. 337. 1899.

<sup>20</sup>P. DRUDE, Ann. d. Phys. 1. p. 578. 1900.

Il Sig. DRUDE<sup>21)</sup> trova  $\alpha = 2,65 \cdot 10^{-16}$ .

Il quanto elementare dell'elettricità  $e$ , cioè la carica elettrica di uno ione positivo monovalente, o dell'elettrone, è, se  $\varepsilon$  rappresenta la nota carica di uno grammo-ione monovalente:

$$e = \varepsilon\omega = 4,69 \cdot 10^{-10} \text{ elettrostatico .}$$

Il Sig. F. RICHARZ<sup>22)</sup> trova  $1,29 \cdot 10^{-10}$ , il Sig. J. J. THOMSON<sup>23)</sup> recentemente  $6,5 \cdot 10^{-10}$ .<sup>24)</sup>

Tutte queste relazioni, a patto che la teoria sia corretta, reclamano una validità non approssimata, ma assoluta. Siccome l'esattezza dei valori calcolati coincide essenzialmente con quella della costante di irraggiamento  $k$ , che è relativamente la più incerta, tale esattezza supera così di molto quella di tutte le determinazioni di queste grandezze fatte finora. La verifica di queste relazioni attraverso metodi più diretti sarà un compito di ulteriore ricerca tanto importante quanto necessario.

---

<sup>21)</sup> l. c.

<sup>22)</sup> F. RICHARZ, Wied. Ann. 52. p. 397. 1894.

<sup>23)</sup> J. J. THOMSON, Phil. Mag. (5) 46. p. 258. 1898.

<sup>24)</sup> [N.d.T] Ho tradotto letteralmente *elektrostaticsch* con "elettrostatico". Questa unità di misura si chiama oggi "statcoulomb" (statC), o unità di carica elettrostatica (esu). Il valore più attuale della carica dell'elettrone è  $4,80320425(10) \times 10^{-10}$  esu.