4. Sull'influenza della forza di gravità sulla diffusione della luce;*

di A. Einstein.

Ho già cercato di rispondere alla questione sulla possibilità che la diffusione della luce venga influenzata dalla gravità in un trattato pubblicato tre anni fa.[1]) Ritorno di nuovo su questo tema perché la mia interpretazione di allora del fenomeno non mi soddisfa, ma ancora di più perché riconosco ora che una delle più importanti conseguenze di quello studio è accessibile alla prova sperimentale. Risulta infatti, secondo la teoria che verrà formulata, che i raggi di luce che passano nella vicinanza del Sole sperimentano una deviazione causata dal campo gravitazionale dello stesso, cosicché si manifesta un apparente aumento della distanza angolare dal Sole di quasi un secondo d'arco per una stella fissa che compare nella vicinanza di questo.

Durante lo sviluppo delle riflessioni sono sorti anche altri risultati legati alla gravità. Siccome però la presentazione dello studio diventerebbe un po' confusionaria, nel seguito verranno date solamente alcune riflessioni completamente elementari a partire dalle quali ci si può comodamente orientare sui presupposti e i ragionamenti della teoria. Le relazioni qui derivate sono valide solamente in prima approssimazione, anche supponendo corretta la base teorica.

§ 1. Ipotesi sulla natura fisica del campo gravitazionale.

In un campo gravitazionale omogeneo (con accelerazione gravitazionale γ) si trova un sistema di coordinate K a riposo che è orientato in modo tale per cui le linee di forza del campo gravitazionale corrono nella direzione negativa dell'asse z. In uno spazio in cui campi gravitazionali sono assenti si trova un secondo sistema di coordinate K' che compie un movimento uniformemente accelerato (con accelerazione γ) nella direzione positiva del suo asse z. Per non complicare inutilmente la trattazione, trascuriamo per il momento la teoria della relatività e trattiamo dunque entrambi i sistemi e gli stati di movimento in cui si trovano secondo la Cinematica e la Meccanica usuali.

---

*Titolo originale: *Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes.* Pubblicato in: *Annalen der Physik* **35** (1911): 898–908. Tradotto da Oliver F. Piattella.

[1]A. Einstein, Jahrb. f. Radioakt. u. Elektronik IV. 4.

Relativamente a K, così come relativamente a K', si muovono punti materiali, che non sono soggetti all'azione di altri punti materiali, secondo le equazioni:

$$\frac{d^2x_\nu}{dt^2} = 0 \; , \qquad \frac{d^2y_\nu}{dt^2} = 0 \; , \qquad \frac{d^2z_\nu}{dt^2} = -\gamma \; .$$

Ciò segue, per il sistema accelerato K', dal principio di Galileo, ma per il sistema K a riposo in un campo gravitazionale omogeneo ciò segue dall'esperienza per cui tutti i corpi vengono accelerati allo stesso modo e con la stessa intensità. Questa esperienza della caduta libera identica per tutti i corpi in un campo gravitazionale è una delle più generali che la natura ci abbia consegnato; ciononostante questa legge non ha ricevuto nessun posto nei fondamenti della nostra descrizione fisica dell'universo.

Arriviamo però a una interpretazione molto soddisfacente del principio empirico se assumiamo che i sistemi K e K' siano esattamente equivalenti, cioè se assumiamo che si possa adottare anche K allo stesso modo come sistema che si trova nello spazio privo di campo gravitazionale; per questo però dobbiamo considerare K come uniformemente accelerato. Nell'ambito di questa interpretazione non si può parlare di *accelerazione assoluta* del sistema di riferimento, così come nella usuale teoria della relatività non si può parlare di *velocità assoluta* del sistema.[2]) In questa interpretazione la caduta libera identica per tutti i corpi è evidente.

Fintanto che ci limitiamo a processi puramente meccanici nel regime di validità della Meccanica newtoniana, siamo sicuri della equivalenza tra K e K'. La nostra interpretazione avrà tuttavia significato più profondo se i sistemi K e K' sono equivalenti rispetto a tutti i processi fisici, cioè quando le leggi della natura espresse in K coincidono completamente con quelle espresse in K'. Se ipotizziamo ciò otteniamo un principio che, se veramente valido, ha un grosso significato euristico. Infatti dall'osservazione teorica di processi che si svolgono in un sistema di riferimento uniformemente accelerato otteniamo conclusioni sullo svolgimento di fenomeni in un campo gravitazionale omogeneo.[3]) Nel seguito verrà mostrata per prima cosa quanto la nostra ipotesi ha una probabilità considerevole di essere vera, dal punto di vista della usuale teoria della relatività.

§ 2. Sul peso dell'energia.

La teoria della relatività implica che la massa inerziale di un corpo cresce con il contenuto energetico dello stesso; se l'aumento di energia ammonta a E, allora l'aumento di massa inerziale è E/c^2, dove c rappresenta la velocità della luce. Ora però, a questo aumento di massa inerziale corrisponde un aumento della massa gravitante? Se no, allora un corpo cadrebbe nello stesso campo gravitazionale con accelerazione diversa a seconda del suo contenuto energetico. Il risultato così soddisfacente della teoria della relatività, secondo cui la legge di conservazione della

[2]Naturalmente non si può sostituire un *arbitrario* campo gravitazionale per uno stato di movimento di un sistema in assenza di campo gravitazionale, così come non si può portare in riposo tutti i punti di un mezzo in movimento arbitrario con una trasformazione relativistica.

[3]In una trattazione successiva verrà mostrato che il campo gravitazionale qui considerato è omogeneo solamente in prima approssimazione.

massa viene incorporata nella legge di conservazione dell'energia, non si otterrebbe direttamente; perché così bisognerebbe abbandonare la legge di conservazione della massa nella sua antica formulazione certamente per la massa *inerziale*, ma sarebbe da mantenere direttamente per quella gravitazionale.

Ciò dev'essere considerato molto improbabile. D'altra parte la usuale teoria della relatività non ci fornisce alcun argomento dal quale potremmo concludere che il peso di un corpo dipende dal suo contenuto energetico. Mostreremo però che la nostra ipotesi di equivalenza dei sistemi K e K' porta come conseguenza necessaria il peso dell'energia.

Si considerino due sistemi (corpi) S_1 e S_2 sull'asse z di K separati da una distanza h e provvisti entrambi di apparati di misurazione[4]), in modo tale che il potenziale gravitazionale in S_2 sia maggiore di γh di quello in S_1.

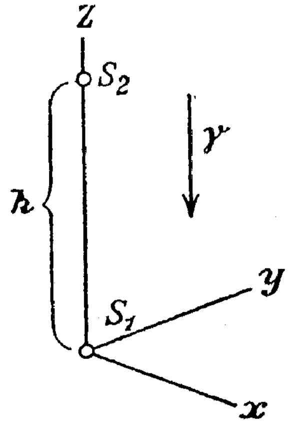

Fig 1.

Viene inviata da S_2 a S_1 una certa quantità di energia E sotto forma di radiazione. Le quantità di energia possono essere misurate in S_1 e S_2 con apparati che — se portati in *un* punto z del sistema e là confrontati — sono completamente identici. Sul processo di questo trasferimento di energia attraverso la radiazione non si può in principio affermare nulla perché non conosciamo l'influsso del campo gravitazionale sulla radiazione e sugli strumenti di misurazione in S_1 e S_2.

Secondo il nostro presupposto di equivalenza di K e K' possiamo, invece del sistema K che si trova nel campo gravitazionale omogeneo, impiegare il sistema K' in assenza di gravità e in movimento accelerato uniforme nella direzione positiva dell'asse z, al quale sono solidamente fissati i corpi S_1 e S_2.

Il processo di trasferimento di energia per mezzo di radiazione da S_2 a S_1 lo valutiamo da un sistema K_0, non in accelerazione. Rispetto a K_0, K' possiede velocità nulla nell'istante in cui l'energia di radiazione E_2 viene inviata da S_2 verso S_1. La radiazione verrà ricevuta in S_1 quando sarà trascorso il tempo h/c (in prima approssimazione). In questo momento però S_1 possiede, rispetto a K_0, velocità $\gamma h/c = v$. Perciò, secondo la usuale teoria della relatività la radiazione che arriva in S_1 non possiede energia E_2, ma un'energia maggiore che è legata a

[4]S_1 e S_2 sono da considerarsi infinitamente più piccoli di h.

E_2 in prima approssimazione dall'equazione[5]):

$$E_1 = E_2 \left(1 + \frac{v}{c}\right) = E_2 \left(1 + \frac{\gamma h}{c^2}\right) \ . \tag{1}$$

Secondo la nostra ipotesi la stessa relazione vale esattamente se lo stesso processo avviene nel sistema K non accelerato ma provvisto di campo gravitazionale. In questo caso possiamo sostituire γh con il potenziale Φ della forza gravitazionale in S_2, se l'arbitraria costante di Φ in S_1 viene posta uguale a zero. Vale dunque l'equazione:

$$E_1 = E_2 + \frac{E_2}{c^2}\Phi \ . \tag{1a}$$

Questa equazione afferma la legge dell'energia per il processo considerato. L'energia E_1 in arrivo a S_1 è maggiore dell'energia E_2, misurata allo stesso modo, che è stata emessa in S_2, e proprio dell'energia potenziale della massa E_2/c^2 nel campo gravitazionale. Si vede dunque che, affinché il principio dell'energia sia soddisfatto, all'energia E prima della sua emissione in S_2 va attribuita un'energia potenziale gravitazionale, che corrisponde a quella della massa E/c^2. La nostra ipotesi di equivalenza di K e K' rimuove quindi la difficoltà descritta all'inizio di questo paragrafo, che la usuale teoria della relatività lascia senza spiegazione.

Il senso di questo di risultato si mostra particolarmente significativo considerando il seguente processo ciclico:

1. Si manda l'energia E (misurata in S_2) sotto forma di radiazione da S_2 a S_1 dove, secondo il risultato appena ottenuto, viene registrata l'energia $E(1 + \gamma h/c^2)$ (misurata in S_1).

2. Si cala un corpo W di massa (gravitazionale, NdT) M da S_2 a S_1, per cui viene rilasciato un lavoro $M\gamma h$.

3. Si trasferisce l'energia E da S_1 al corpo W mentre questo si trova in S_1. Quindi la massa gravitazionale M cambia, acquisendo il valore M'.

4. Si issa W di nuovo verso S_2, per cui bisogna impiegare il lavoro $M'\gamma h$.

5. Si trasferisce E da W nuovamente a S_2.

L'effetto di questo processo ciclico consiste solamente nel fatto che S_1 ha subito un aumento di energia $E(\gamma h/c^2)$ e che al sistema è stata fornita la quantità di energia

$$M'\gamma h - M\gamma h$$

sotto forma di lavoro meccanico. Secondo il principio dell'energia si deve dunque avere

$$E\frac{\gamma h}{c^2} = M'\gamma h - M\gamma h$$

o

$$M' - M = \frac{E}{c^2} \ . \tag{1b}$$

[5]A. Einstein, ann. d. Phys. **17.** p. 903 **u.** 914. 1905.

L'aumento della massa *gravitazionale* è dunque uguale a E/c^2, quindi uguale a quello della massa *inerziale* che risulta dalla teoria della relatività.

Ancora più facilmente si ottiene dall'equivalenza dei sistemi K e K' il risultato per cui la massa *gravitazionale* rispetto a K è completamente uguale alla massa *inerziale* rispetto a K'; perciò l'energia deve possedere una massa *gravitazionale* che è uguale alla sua massa *inerziale*. Se, nel sistema K' si appende una massa M_0 ad una bilancia a molla questa mostrerà, a causa dell'inerzia di M_0, il peso apparente $M_0\gamma$. Trasferendo la quantità di energia E a M_0, la bilancia a molla mostrerà $\left(M_0 + \frac{E}{c^2}\right)\gamma$, secondo la legge dell'inerzia dell'energia. Secondo la nostra ipotesi fondamentale deve succedere lo stesso ripetendo l'esperimento nel sistema K, cioè in presenza di un campo gravitazionale.

§ 3. Tempo e velocità della luce nel campo gravitazionale.

Se la radiazione emessa da S_2 verso S_1 nel sistema K' in accelerazione uniforme possedeva frequenza ν_2, rispetto a un orologio che si trova in S_2, allora essa, rispetto a un orologio che si trova in S_1, non possiede più frequenza ν_2 rispetto a S_1, al suo arrivo in S_1, ma una frequenza maggiore ν_1, tale che in prima approssimazione

$$\nu_1 = \nu_2 \left(1 + \frac{\gamma h}{c^2}\right) . \tag{2}$$

Infatti, introducendo nuovamente il sistema di riferimento non accelerato K_0, relativamente al quale il sistema K' possiede velocità nulla all'istante dell'emissione della luce, allora S_1 ha relativamente a K_0 velocità $\gamma(h/c)$ al momento dell'arrivo della radiazione in S_1, per cui risulta immediatamente la relazione data, in virtù del principio Doppler.

Secondo il nostro presupposto di equivalenza dei sistemi K e K' questa equazione vale anche per il sistema di coordinate K in riposo, provvisto di un campo gravitazionale uniforme, quando in questo avviene lo scambio di radiazione descritto. Risulta quindi che per un raggio di luce emesso in S_2 in presenza di un certo potenziale gravitazionale, che al momento dell'emissione — rispetto ad un orologio che si trova in S_2 — possiede frequenza ν_2, al suo arrivo in S_1 possiederà un'altra frequenza ν_1, se questa viene misurata in S_1 con un orologio esattamente identico al primo. Sostituiamo γh con il potenziale gravitazionale Φ in S_2, che ha il suo zero in S_1 e ipotizziamo che la relazione che abbiamo derivato per il caso di un campo gravitazionale *omogeneo* valga anche per altri tipi di campi; si ha quindi

$$\nu_1 = \nu_2 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) . \tag{2a}$$

Questo risultato (valido in prima approssimazione, secondo la nostra derivazione) permette per prima cosa la seguente applicazione. Sia ν_0 la frequenza di una fonte di luce elementare, misurata con un orologio U che si trova nella stessa posizione. Questa frequenza è quindi indipendente da dove viene posta insieme all'orologio. Vogliamo pensare entrambi piazzati ad esempio sulla superficie solare (là si trova il nostro S_2). Della luce là emessa, una parte arriva sulla Terra (S_1) dove noi, con un orologio esattamente della stessa fattura di U, misuriamo la frequenza della luce in arrivo. Quindi, secondo la ($2a$)

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) ,$$

dove Φ rappresenta la differenza di potenziale (negativa) tra la superficie del Sole e la Terra. Secondo la nostra interpretazione le linee spettrali della luce solare devono quindi essere spostate un po' verso il rosso rispetto alle linee spettrali corrispondenti di una sorgente di luce terrestre, e proprio dell'ammontare relativo:

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = \frac{-\Phi}{c^2} = 2 \cdot 10^{-6} .$$

Se le condizioni sotto le quali le linee spettrali solari sono generate fossero conosciute esattamente, questo spostamento sarebbe accessibile alla misura. Però siccome ci sono altri fattori (pressione, temperatura) che influenzano la posizione delle linee spettrali, è difficile constatare se l'influsso del campo gravitazionale qui derivato esiste veramente.[6])

Da un'osservazione superficiale l'equazione (2) o la ($2a$) sembrano affermare un'assurdità. Come può un continuo trasferimento di luce da S_2 a S_1 avere in S_1 un numero di oscillazioni per secondo diverso da quello che viene emesso in S_2? La risposta è però semplice. Non possiamo interpretare ν_2 o ν_1 semplicemente come frequenze (numero di oscillazioni per secondo), dato che non abbiamo ancora stabilito un tempo nel sistema K. ν_2 rappresenta il numero di oscillazioni rispetto all'unità di tempo dell'orologio U in S_2, mentre ν_1 il numero di oscillazioni rispetto all'unità di tempo dell'identico orologio in S_1. Niente ci obbliga ad assumere che orologi U che si trovano in potenziali gravitazionali diversi debbano essere considerati battere il tempo ugualmente. Al contrario, dobbiamo definire il tempo in K in maniera sicura, cosicché il numero dei picchi e delle gole dell'onda che si trova tra S_2 e S_1 sia indipendente dal valore assoluto del tempo; questo perché il processo considerato è, per sua propria natura, stazionario. Se non soddisfacessimo questa condizione, arriveremmo a una definizione del tempo che, all'utilizzare, entrerebbe esplicitamente nelle leggi della natura, il che sarebbe sicuramente innaturale e inadeguato. Gli orologi in S_1 e S_2 non forniscono quindi entrambi il "tempo" correttamente. Se misuriamo il tempo in S_1 con l'orologio U, *allora dobbiamo misurare il tempo in S_2 con un orologio che corre più lentamente di U di un fattore $1 + \Phi/c^2$, quando paragonato con U nella stessa posizione.* Così la frequenza del raggio di luce considerato sopra misurata con un tale orologio al momento della sua emissione in S_2 sarebbe

$$\nu_2 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) ,$$

e quindi secondo la ($2a$) uguale alla frequenza ν_1 dello stesso raggio di luce al suo arrivo in S_1.

[6]L. F. Jewell (Journ. de phys. **6.** p. 84. 1897) e in modo particolare Ch. Fabry e H. Boisson (Compt. rend. **148.** p. 688 – 690. 1909) hanno di fatto constatato un tale spostamento verso il rosso delle linee spettrali dell'ordine di grandezza qui calcolato, lo hanno però attribuito a un effetto della pressione nello strato assorbente.

Da qui si ottiene una conseguenza di importanza fondamentale per questa teoria. Misurando infatti nel sistema K' accelerato in assenza di campo gravitazionale in diverse posizioni la velocità della luce usando orologi U identici, si ottiene così ovunque lo stesso valore. Lo stesso vale, secondo la nostra ipotesi fondamentale, anche per il sistema K. Secondo quanto detto dobbiamo però usare in posizioni di diverso potenziale gravitazionale orologi di diversa fattura per misurare il tempo. Dobbiamo impiegare per la misura del tempo in una posizione che possiede il potenziale gravitazionale Φ rispetto all'origine delle coordinate, un orologio che — se spostato all'origine delle coordinate — corre più lentamente di $(1+\Phi/c^2)$ di quello che viene usato per misurare il tempo all'origine delle coordinate. Chiamando c_0 la velocità della luce nell'origine delle coordinate, allora la velocità della luce c in una posizione di potenziale gravitazionale Φ sarà data dalla relazione

$$c = c_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) . \tag{3}$$

Il principio della costanza della velocità della luce non vale in questa teoria allo stesso modo in cui costituisce la base della usuale teoria della relatività.

§ 4. La deflessione dei raggi di luce in un campo gravitazionale.

Dall'affermazione mostrata sopra, secondo cui la velocità della luce in un campo gravitazionale è una funzione della posizione, si può facilmente concludere, usando il principio di Huygens, che raggi di luce che si propagano attraverso un campo gravitazionale devono sperimentare una deflessione. Sia infatti ε un fronte d'onda piano al tempo t, P_1 e P_2 due suoi punti, separati da una distanza 1. P_1 e P_2 giacciono nel piano della pagina, che è scelto in modo tale che la derivata direzionale di Φ lungo la sua normale (e quindi anche quella di c) è zero.[7] Otteniamo sul piano della pagina il fronte d'onda, o una sua parte, corrispondente al tempo $t + dt$ tracciando la tangente ai cerchi centrati in P_1 e P_2 e con raggi, rispettivamente, $c_1 dt$ e $c_2 dt$, dove c_1 e c_2 sono, rispettivamente, la velocità della luce in P_1 e in P_2. L'angolo di deflessione del raggio di luce su di un cammino cdt è quindi

$$\frac{(c_1 - c_2)dt}{1} = -\frac{\partial c}{\partial n'} dt ,$$

se calcoliamo l'angolo di deflessione positivamente, quando il raggio di luce viene deviato nella direzione degli n' positivi.

L'angolo di deflessione per unità di cammino percorso del raggio di luce è dunque:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial n'}$$

o, secondo la (3)

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial n'} .$$

[7] NdT. Per semplicità (grafica, immagino, vista la figura seguente) Einstein sta supponendo che il potenziale gravitazionale vari solamente nel piano della pagina.

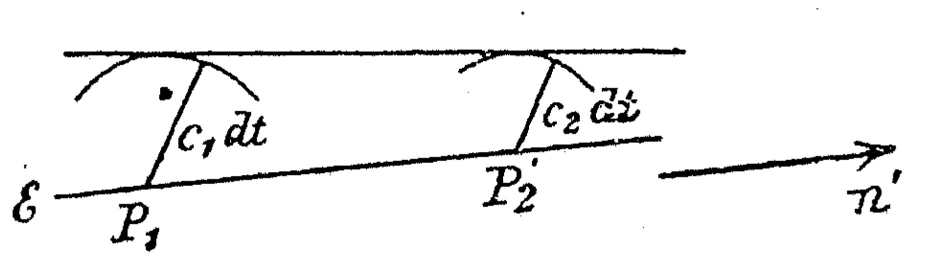

Fig. 2.

Infine otteniamo per la deviazione α subita da un raggio di luce verso n' lungo un cammino arbitrario (s) l'espressione

$$\alpha = -\frac{1}{c^2}\int \frac{\partial\Phi}{\partial n'}ds\ . \tag{4}$$

Avremmo potuto ottenere lo stesso risultato dall'immediata osservazione della propagazione di un raggio di luce nel sistema uniformemente accelerato K' e dalla trasposizione del risultato al sistema K, e da qui al caso in cui il campo gravitazionale sia arbitrario.

Secondo l'equazione (4) un raggio di luce che passa in prossimità di un corpo celeste subisce una deviazione nella direzione in cui il potenziale gravitazionale decresce, dunque nella direzione del corpo celeste, della grandezza

$$\alpha = \frac{1}{c^2}\int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta=+\frac{\pi}{2}} \frac{kM}{r^2}\cos\vartheta \cdot ds = \frac{2kM}{c^2\Delta}\ ,$$

dove k è la costante gravitazionale, M la massa del corpo celeste, Δ la distanza del raggio di luce dal punto centrale del corpo celeste. *Un raggio di luce che passa in prossimità del Sole subisce quindi una deviazione di* $4 \cdot 10^{-6} = 0,83$ *secondi d'arco.* Di questa quantità appare aumentata la distanza angolare delle stelle dal punto centrale del Sole, a causa della deflessione dei raggi di luce. Siccome le stelle fisse che si trovano nella direzione del Sole diventano visibili durante un'eclissi totale, si può paragonare questa conseguenza della teoria con l'osservazione. Per il pianeta Giove la deviazione aspettata raggiunge circa 1/100 del valore dato. È da desiderarsi con impellenza che gli astronomi si facciano carico della questione qui sviluppata, anche se le riflessioni presentate dovessero sembrare non sufficientemente fondate o addirittura avventurose. A prescindere di una qualunque teoria, bisogna chiedersi se con i mezzi odierni si possa constatare l'influsso del campo gravitazionale sula propagazione della luce.

Praga, giugno 1911.

(Ricevuto il 21 giugno 1911.)