3. Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento*

di A. Einstein

Che l'elettrodinamica di Maxwell, - come viene intesa oggigiorno - nella sua applicazione a corpi in movimento, porti ad asimmetrie che sembrano non essere legate ai fenomeni, è noto. Si pensi, per esempio, all'interazione elettrodinamica tra una calamita e un conduttore. Il fenomeno osservabile dipende qui solamente dal movimento relativo tra conduttore e calamita, mentre, secondo l'interpretazione comune, i due casi, che uno o l'altro di questi due corpi sia in movimento, devono essere rigorosamente separati tra di loro. Difatti, se la calamita si trova in movimento e il conduttore a riposo, si genera nell'intorno della calamita un campo elettrico di un certa energia, che, nelle regioni dove si trovano parti del conduttore, produce una corrente elettrica. Tuttavia, se la calamita si trova a riposo e il conduttore si muove, allora non si genera nessun campo elettrico nell'intorno della calamita, ma si sviluppa invece nel conduttore una forza elettromotrice, alla quale non corrisponde una energia, ma che - supposta l'uguaglianza del movimento relativo per i due casi considerati - origina delle correnti elettriche della stessa grandezza e con lo stesso andamento di quelle prodotte nel primo caso dalle forze elettriche.

Esempi dello stesso tipo, così come tentativi falliti di rilevare un movimento della Terra relativamente al "mezzo di propagazione della luce", portano a supporre che nessuna delle caratteristiche dei fenomeni corrisponda al concetto di riposo assoluto, non solo in meccanica, ma anche in elettrodinamica, e che, per giunta, per tutti i sistemi di coordinate a cui si applicano le equazioni della meccanica, valgano le stesse leggi dell'elettrodinamica e dell'ottica, come è già stato dimostrato per quantità del primo ordine. Vogliamo promuovere questa ipotesi (il cui contenuto sarà chiamato "principio di relatività" in seguito) a postulato e includere anche il postulato, apparentemente incompatibile con il primo, che la luce si propaga nello spazio vuoto sempre con una certa velocità V, indipendentemente dallo stato di movimento del corpo che la emette. Questi due postulati sono sufficienti per arrivare a un'elettrodinamica dei corpi in movimento semplice e priva di contraddizioni, basata sulla teoria di Maxwell per corpi in riposo. L'introduzione di un "etere di luce" si rivelerà non necessaria, poiché, secondo l'interpretazione che svilupperemo qui, non viene introdotto uno "spazio di riposo assoluto" con proprietà straordinarie, né un vettore di velocità associato a un punto nello spazio vuoto in cui si verificano processi elettromagnetici.

La teoria che svilupperemo si basa - come qualsiasi altra elettrodinamica - sulla cinematica dei corpi rigidi, dato che le affermazioni di ogni teoria riguardano le relazioni tra corpi rigidi (sistemi di coordinate), orologi e processi elettromagnetici.

*Titolo originale: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Pubblicato in: *Annalen der Physik* 17 (1905): 891–921. Tradotto da Oliver F. Piattella.

La non sufficiente considerazione di questa circostanza è la radice delle difficoltà con le quali l'elettrodinamica dei corpi in movimento deve al momento lottare.

I. Parte cinematica.

§ 1. Definizione di simultaneità.

Si consideri un sistema di coordinate in cui siano valide le equazioni della meccanica newtoniana. Chiamiamo questo sistema di coordinate "sistema di riposo" in modo da distinguerlo, a parole, dagli altri sistemi di coordinate che saranno introdotti più avanti, e per rappresentarlo precisamente.

Se un punto materiale si trova in quiete rispetto a questo sistema di coordinate, allora la sua posizione relativamente a quello può essere determinata per mezzo di righelli rigidi e l'utilizzo dei metodi della geometria euclidea e venire espressa in coordinate cartesiane.

Se vogliamo descrivere *il movimento* di un punto materiale, allora diamo i valori delle sue coordinate in funzione del tempo. Ora, bisogna prestare attenzione al fatto che una tale descrizione matematica ha senso fisico solamente se prima si è chiarito che cosa si intende qui con "tempo". Dobbiamo considerare il fatto che tutte le nostre asserzioni, nelle quali entra il tempo, sono sempre asserzioni su *eventi simultanei*. Quando dico, per esempio: "questo treno arriva qui alle 7", ciò significa qualcosa come: "la lancetta piccola del mio orologio sul 7 e l'arrivo del treno sono eventi simultanei".[1]

Potrebbe sembrare che tutte le difficoltà incontrate dalla definizione di "tempo" si potrebbero superare se io usassi, invece di "tempo", "la posizione della lancetta piccola del mio orologio". Tale definizione è, difatti, sufficiente quando si tratta di definire un tempo esclusivamente per la posizione in cui si trova l'orologio stesso; la definizione però non è più sufficiente nel momento in cui si tratta di combinare temporalmente tra di loro serie di eventi che avvengono in luoghi diversi, o - che è la stessa cosa - valutare temporalmente eventi che accadono in luoghi lontani dall'orologio.

D'altra parte, potremmo accontentarci di valutare temporalmente gli eventi attraverso un osservatore che si trova nell'origine del sistema di coordinate insieme all'orologio, e che associa la corrispondente posizione delle lancette dell'orologio a ogni segnale luminoso che gli arriva attraverso lo spazio vuoto e che rappresenta un evento che deve essere valutato. Una siffatta associazione porta con sé, tuttavia, l'inconveniente di non essere indipendente dal punto di vista dell'osservatore provvisto dell'orologio, come sappiamo per esperienza. Arriviamo a una determinazione molto più pratica attraverso la seguente considerazione.

Nel punto A dello spazio sia presente un orologio, di modo che un osservatore che si trovi in A possa valutare temporalmente eventi che accadono nell'immediata prossimità di A rilevando la posizione delle lancette dell'orologio che è simultanea con questi eventi. Anche nel punto B dello spazio sia presente un orologio - voglia-

[1] L'imprecisione insita nel concetto di simultaneità di due eventi che avvengono (approssimativamente) nello stesso luogo, e che pure deve essere superata con un'astrazione, non sarà discussa qui.

mo aggiungere “un orologio costruito esattamente allo stesso modo di quello che si trova in A” - cosicché una valutazione temporale degli eventi è possibile anche nell’intorno immediato di B, da parte di un osservatore che si trovi in B. Tuttavia, non è possibile, senza un’ulteriore imposizione, paragonare un evento in A con un evento in B; finora abbiamo definito solamente un “tempo-A” e un “tempo-B”, ma non un tempo complessivo per A e B. Quest’ultimo può essere ora determinato stabilendo *per definizione* che il “tempo” che la luce richiede per andare da A a B è lo stesso di quello che la luce richiede per andare da B a A. Ovvero, un raggio di luce parte da A verso B al “tempo-A” t_A, viene riflesso in B verso A al “tempo-B” t_B, e ritorna in A al “tempo-A” t'_A. Per definizione, i due orologi sono sincronizzati se:[2]

$$t_B - t_A = t'_A - t_B \; . \tag{1}$$

Supponiamo che questa definizione di sincronismo sia possibile in una maniera priva di contraddizioni e, certamente, per molti punti arbitrari, e che quindi siano valide, in generale, le relazioni:

1. Se l’orologio in B è sincronizzato con l’orologio in A, allora l’orologio in A è sincronizzato con l’orologio in B.

2. Se l’orologio in A è sincronizzato tanto con l’orologio in B quanto con l’orologio in C, allora gli orologi in B e C sono pure sincronizzati tra loro.

Abbiamo quindi stabilito, con l’aiuto di un certo esperimento fisico (pensato), che cosa si intende per orologi sincronizzati che si trovano a riposo in posizioni differenti e con ciò, evidentemente, abbiamo ottenuto una definizione di “simultaneità” e “tempo”. Il “tempo” di un evento è l’indicazione, simultanea all’evento, di un orologio che si trova a riposo nella posizione dell’evento e che è sincronizzato con un determinato orologio a riposo, e che, chiaramente, si mantiene sincronizzato con questo per tutte le determinazioni di tempo.

Basandoci sull’esperienza, possiamo inoltre stabilire che la grandezza:

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V \tag{2}$$

è una costante universale (la velocità della luce nel vuoto).

È essenziale l’aver definito il tempo attraverso orologi a riposo in un sistema di riposo; chiamiamo questo tempo che abbiamo appena definito “il tempo del sistema di riposo”, per via del fatto che corrisponde al sistema di riposo.

§ 2. Sulla relatività delle lunghezze e dei tempi.

Le seguenti considerazioni si basano sul principio di relatività e sul principio della costanza della velocità della luce, i quali definiamo nella seguente maniera.

1. Le leggi secondo cui gli stati dei sistemi fisici cambiano sono indipendenti da quale di due sistemi di coordinate, che si trovano in movimento di traslazione uniforme uno relativo all’altro, si usa per descrivere questi cambiamenti di stato.

[2] [N.d.T.] Nell’articolo originale di Einstein le equazioni non sono numerate. Qui ho preferito numerarle in modo da rendere più pratiche eventuali discussioni tra studenti.

2. Ogni raggio di luce si muove in un sistema di coordinate "di riposo" con la velocità definita V, indipendentemente dal fatto che questo raggio di luce venga emesso da un corpo in quiete o in movimento. Riguardo a ciò si ha

$$\text{Velocità} = \frac{\text{Percorso della luce}}{\text{Intervallo temporale}}, \tag{3}$$

dove "intervallo temporale" deve essere inteso nel senso della definizione del § 1.

Sia data un'asta rigida a riposo; la medesima possiede una lunghezza l, misurata con un righello che pure si trova in quiete. Immaginiamoci ora che l'asse dell'asta giaccia sull'asse X del sistema di coordinate di riposo e dopodiché impartiamo all'asta un movimento uniforme di traslazione parallela (con velocità v) lungo l'asse X nel senso di x crescente. Ci chiediamo ora quale sia la lunghezza dell'asta *in movimento*, che immaginiamo determinata attraverso le due seguenti operazioni:

a) L'osservatore si muove, equipaggiato col righello menzionato prima, con l'asta che deve essere misurata e ne misura la lunghezza direttamente, accostandoci il righello, così come se l'asta, il righello e l'osservatore si trovassero in quiete.

b) L'osservatore determina, per un certo tempo t, con degli orologi in quiete posizionati nel sistema di riposo e sincronizzati secondo il § 1, in quali punti del sistema di riposo si trovano le estremità dell'asta che deve essere misurata.

La distanza tra le estremità, misurata col righello già utilizzato, però questa volta in quiete, é anche una lunghezza che si può definire come "lunghezza dell'asta".

Secondo il principio di relatività la lunghezza trovata attraverso il procedimento a), che chiamiamo "lunghezza dell'asta nel sistema in movimento", deve essere uguale alla lunghezza l dell'asta in quiete.

Determineremo, basandoci sui nostri due principi, la lunghezza che si trova col procedimento b), che chiamiamo "la lunghezza dell'asta (in movimento) nel sistema di riposo", e troveremo che questa è diversa da l.

La cinematica che si usa solitamente suppone tacitamente che le lunghezze determinate attraverso i due procedimenti descritti sopra siano esattamente uguali una all'altra, o, in altre parole, che nell'istante di tempo t un corpo rigido in movimento sia geometricamente completamente sostituibile dallo *stesso* corpo, quando questo si trova *in quiete* in una certa posizione.

Inoltre, immaginiamoci degli orologi fissati alle due estremità dell'asta (A e B), che siano sincronizzati con gli orologi del sistema di riposo, cioè, le cui letture corrispondano ogni volta al "tempo del sistema di riposo", nelle posizioni in cui momentaneamente si trovano; questi orologi sono dunque "sincronizzati nel sistema di riposo".

Immaginiamoci ancora che insieme ad ogni orologio si trovi un osservatore con esso in movimento e che questi osservatori usino per entrambi gli orologi il criterio formulato nel § 1 per l'andamento sincronizzato. Al tempo[3] t_A parte un raggio di luce da A, viene riflesso al tempo t_B in B, e ritorna in A al tempo t'_A. Per il principio della costanza della velocità della luce troviamo:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v} \tag{4}$$

[3] "Tempo" qui significa "tempo nel sistema di riposo" e anche "posizione delle lancette dell'orologio in movimento che si trova nel luogo in questione".

e

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v} \,, \tag{5}$$

dove r_{AB} rappresenta la lunghezza dell'asta in quiete - misurata nel sistema di riposo. Osservatori in movimento insieme all'asta troverebbero quindi che i due orologi non sono sincronizzati, mentre osservatori che si trovano nel sistema di riposo dichiarerebbero che gli orologi sono sincronizzati.

Vediamo dunque che non possiamo attribuire al concetto di simultaneità alcun significato *assoluto*, giacché due eventi simultanei in un certo sistema di coordinate, non possono più essere considerati tali quando esaminati da un sistema in movimento relativo rispetto a quello.

§ 3. Teoria della trasformazione delle coordinate e del tempo del sistema di riposo verso un sistema che si trova rispetto a questo in movimento di traslazione uniforme.

Siano dati nello spazio "di riposo" due sistemi di coordinate, ossia, due sistemi cadauno con tre linee materiali, ortogonali tra loro, che si dipartono da un punto. Gli assi X dei due sistemi possono coincidere e i loro assi Y e Z possono essere rispettivamente paralleli. Ciascun sistema sia provvisto di un righello rigido e di un certo numero di orologi, e siano i due righelli, così come tutti gli orologi dei due sistemi, esattamente identici l'uno all'altro.

Si impartisca ora all'origine di uno dei due sistemi (k) una velocità v (costante) nella direzione degli x crescenti dell'altro sistema in quiete (K), la quale velocità si trasmetta anche agli assi coordinati, al corrispettivo righello, così come agli orologi. Ad ogni tempo t del sistema di riposo K corrisponde quindi una determinata posizione degli assi del sistema in movimento e, per ragioni di simmetria, siamo autorizzati a supporre che il movimento di k possa essere realizzato in tal modo che gli assi del sistema in movimento siano al tempo t (con "t" sempre è indicato un tempo del sistema di riposo) paralleli agli assi del sistema di riposo.

Immaginiamoci ora di misurare lo spazio tanto dal sistema di riposo K, per mezzo del righello in quiete, così come dal sistema in movimento k, per mezzo del righello in movimento con esso, e quindi consideriamo determinate le coordinate x, y, z e ξ, η, ζ, rispettivamente. Inoltre sia determinato il tempo t del sistema di riposo per tutti i punti di questo sistema dotati di orologi in quiete attraverso segnali luminosi, nella maniera spiegata nel § 1; sia determinato allo stesso modo il tempo τ del sistema in movimento, per tutti i suoi punti in cui si trovano orologi in riposo rispetto ad esso, attraverso il metodo descritto nel § 1, scambiando segnali di luce tra i punti nei quali si trovano gli orologi menzionati.

Per ogni insieme di valori x, y, z, t, che determina completamente la posizione e il tempo di un evento nel sistema di riposo, corrisponde un insieme di valori ξ, η, ζ, τ che determina quell'evento relativamente al sistema k, e ora il nostro compito è quello di trovare il sistema di equazioni che lega queste quantità.

In primo luogo, è chiaro che le equazioni debbano essere *lineari*, per via della proprietà di omogeneità che attribuiamo allo spazio e al tempo.

Stabilendo $x' = x - vt$, è chiaro che a un punto in riposo nel sistema k corrisponde un sistema di valori x', y, z determinato e indipendente dal tempo. Determiniamo per prima cosa τ come funzione di x', y, z e t. A tal proposito dobbiamo esprimere nelle equazioni che τ non è altri che l'incarnazione dei dati degli orologi in quiete nel sistema k, che sono stati sincronizzati di accordo con la regola data nel § 1.

Sia inviato un raggio di luce dall'origine del sistema k al tempo τ_0 lungo l'asse X verso x' e qui al tempo τ_1 venga riflesso verso l'origine delle coordinate, dove arriva al tempo τ_2; si deve quindi avere che:

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1 \tag{6}$$

o, introducendo gli argomenti della funzione τ e usando il principio della costanza della velocità della luce nel sistema di riposo:

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t) + \tau\left(0,0,0,\left\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\right\}\right)\right] = \tau\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{V-v}\right) . \tag{7}$$

Di qui segue, scegliendo x' infinitamente piccolo:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v}\frac{\partial\tau}{\partial t} , \tag{8}$$

o

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0 . \tag{9}$$

Bisogna sottolineare che, invece dell'origine delle coordinate, avremmo potuto scegliere un qualunque altro punto come sorgente del raggio di luce e, perciò, l'equazione che abbiamo appena trovato vale per tutti i valori di x', y, z.

Un ragionamento analogo - applicato agli assi H e Z - risulta, considerando che la luce osservata dal sistema di riposo si propaga lungo questi assi sempre con velocità $\sqrt{V^2 - v^2}$, in:

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial z} = 0 . \tag{11}$$

Siccome τ è una funzione *lineare*, da queste equazioni segue che:

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right) , \tag{12}$$

dove a è una funzione $\varphi(v)$ per il momento ignota, e per brevità si è assunto che nell'origine di k si abbia $t = 0$ quando $\tau = 0$.

Con l'ausilio di questo risultato è facile determinare le quantità ξ, η, ζ, esprimendo in equazioni il fatto che la luce si propaga con velocità V anche rispetto al sistema in movimento (come richiede il principio della costanza della velocità della luce in concomitanza col principio di relatività). Per un raggio di luce emesso al tempo $\tau = 0$ nella direzione di ξ crescente vale:

$$\xi = V\tau , \tag{13}$$

o

$$\xi = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right) \ . \tag{14}$$

Ora, il raggio di luce si muove relativamente all'origine di k con velocità $V - v$, misurata nel sistema di riposo, cosicché vale:

$$\frac{x'}{V - v} = t \ . \tag{15}$$

Inserendo questo valore di t nell'equazione per ξ otteniamo quindi:

$$\xi = a\frac{V^2}{V^2 - v^2}x' \ . \tag{16}$$

Allo stesso modo, attraverso l'analisi di raggi di luce che si propagano lungo gli altri due assi, otteniamo:

$$\eta = V\tau = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right) \ , \tag{17}$$

dove

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t \ ; \quad x' = 0 \ ; \tag{18}$$

quindi

$$\eta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}y \tag{19}$$

e

$$\zeta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}z \ . \tag{20}$$

Sostituendo a x' il suo valore, otteniamo:

$$\tau = \varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right) \ , \tag{21}$$

$$\xi = \varphi(v)\beta(x - vt) \ , \tag{22}$$

$$\eta = \varphi(v)y \ , \tag{23}$$

$$\zeta = \varphi(v)z \ , \tag{24}$$

dove

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \tag{25}$$

e φ è una funzione di v per il momento ignota. Non facendo nessuna ipotesi sulla posizione iniziale del sistema in movimento e sul punto zero di τ, bisognerebbe allora aggiungere ad ogni membro destro di queste equazioni una costante additiva.

Dobbiamo ora provare che ogni raggio di luce, considerato dal sistema in movimento, si propaga con velocità V, se questo succede nel sistema di riposo, come abbiamo postulato; difatti, non abbiamo ancora fornito la prova che il principio della costanza della velocità della luce sia compatibile col principio di relatività.

Al tempo $t = \tau = 0$ venga inviata dall'origine delle coordinate di ambedue i sistemi, che in questo istante coincidono, un'onda sferica che si propaga nel sistema

K con velocità V. Se (x, y, z) è un punto appena raggiunto da quest'onda, allora si ha

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2 \; . \tag{26}$$

Trasformiamo questa equazione con l'aiuto delle nostre equazioni di trasformazione e otteniamo, dopo un semplice calcolo:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2 \; . \tag{27}$$

L'onda considerata è quindi un'onda sferica con velocità di propagazione V anche quando osservata nel sistema in movimento. Pertanto, è mostrato che i nostri due principi fondamentali sono compatibili uno con l'altro.

Nell'equazioni di trasformazione ottenute appare ancora una funzione sconosciuta di v, φ, che vogliamo ora determinare.

A tal proposito introduciamo ancora un terzo sistema di coordinate K' che sia concepito in movimento di traslazione parallelo all'asse Ξ del sistema k in modo tale che l'origine delle coordinate di K' si muova con velocità $-v$ lungo l'asse Ξ. Al tempo $t = 0$ tutte e tre le origini dei sistemi di coordinate coincidano e sia per $t = x = y = z = 0$ il tempo t' del sistema K' uguale a zero. Chiamiamo x', y', z' le coordinate misurate nel sistema K' e otteniamo, usando due volte le nostre equazioni di trasformazione:

$$t' = \varphi(-v)\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right\} \qquad = \varphi(v)\varphi(-v)t \; , \tag{28}$$

$$x' = \varphi(-v)\beta(-v)\{\xi + v\tau\} \qquad = \varphi(v)\varphi(-v)x \; , \tag{29}$$

$$y' = \varphi(-v)\eta \qquad = \varphi(v)\varphi(-v)y \; , \tag{30}$$

$$z' = \varphi(-v)\zeta \qquad = \varphi(v)\varphi(-v)z \; . \tag{31}$$

Siccome le relazioni tra x', y', z' e x, y, z non contengono il tempo t, i sistemi K e K' sono quindi in riposo relativo ed è chiaro che la trasformazione di K a K' debba essere la trasformazione identità. Si ha quindi:

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1 \; . \tag{32}$$

Ora investighiamo il significato di $\varphi(v)$. Concentriamoci sulla porzione dell'asse H del sistema k compresa tra $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ e $\xi = 0$, $\eta = l$, $\zeta = 0$. Questa parte dell'asse H è come un'asta in movimento relativo al sistema K con velocità v ortogonale al suo asse, le cui estremità possiedono in K le coordinate:

$$x_1 = vt \; , \quad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)} \; , \quad z_1 = 0 \tag{33}$$

e

$$x_2 = vt \; , \quad y_2 = 0 \; , \quad z_2 = 0 \; . \tag{34}$$

La lunghezza dell'asta misurata in K è quindi $l/\varphi(v)$; questo è il significato della funzione φ. Per ragioni di simmetria è ora plausibile che la lunghezza, misurata nel sistema di riposo, di una data asta che si trova in movimento ortogonalmente al suo asse, dipenda solamente dalla velocità, ma non dalla direzione e dal verso del movimento. Quindi, la lunghezza dell'asta in movimento, misurata nel sistema di riposo, non cambia se v è sostituita da $-v$. Da qui segue:

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)} \;, \tag{35}$$

o

$$\varphi(v) = \varphi(-v) \;. \tag{36}$$

Da questa relazione e da quella trovata poco fa segue che deve essere $\varphi(v) = 1$, cosicché le equazioni di trasformazione trovate diventano:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right) \;, \tag{37}$$

$$\xi = \beta(x - vt) \;, \tag{38}$$

$$\eta = y \;, \tag{39}$$

$$\zeta = z \;, \tag{40}$$

dove

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \;, \tag{41}$$

§ 4. Significato fisico delle equazioni ottenute, riguardando corpi rigidi e orologi in movimento.

Esaminiamo una sfera rigida[4] di raggio R, che si trova in riposo relativamente al sistema in movimento k e il cui centro giace nell'origine delle coordinate di k. L'equazione della superficie di questa sfera, che si muove con velocità v rispetto al sistema K, è:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2 \;. \tag{42}$$

L'equazione di questa superficie, espressa in x, y, z nel tempo $t = 0$ è:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2 \;. \tag{43}$$

Un corpo rigido che in stato di quiete ha la forma di una sfera, possiede quindi, in stato di movimento - analizzato dal sistema di riposo - la forma di un ellissoide di rotazione con assi:

$$R\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}, R, R \;. \tag{44}$$

Mentre le dimensioni Y e Z della sfera (e anche di ogni corpo rigido di forma arbitraria) appaiono quindi immutate dal movimento, la dimensione X appare accorciata in ragione di $1 : \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}$, e quindi tanto più fortemente accorciata quanto maggiore v. Per $v = V$ tutti gli oggetti in movimento - analizzati dal

[4] Cioè un corpo che possiede forma sferica, quando analizzato in riposo.

sistema "di riposo" - collassano in strutture piane. Per velocità superluminali i nostri ragionamenti perdono senso; d'altra parte, troveremo nelle considerazioni a seguire che la velocità della luce svolge nella nostra teoria fisica il ruolo delle velocità infinitamente grandi.

È chiaro che gli stessi risultati valgono per corpi in riposo nel sistema "di riposo", quando sono osservati da un sistema in movimento uniforme. -

Immaginiamoci inoltre che uno degli orologi che sono in grado di fornire il tempo t rimanendo in quiete rispetto al sistema di riposo, e il tempo τ rimanendo in quiete rispetto al sistema in movimento, si trovi nell'origine delle coordinate di k e sia configurato in modo tale che mostri il tempo τ. Quanto rapidamente batte il tempo questo orologio, quando viene osservato nel sistema di riposo?

Tra le grandezze x, t e τ, che si riferiscono alla posizione di questo orologio, valgono evidentemente le equazioni:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right) \tag{45}$$

e

$$x = vt\ . \tag{46}$$

Quindi abbiamo

$$\tau = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1 - \sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right) t\ , \tag{47}$$

da cui segue che la lettura dell'orologio (osservato nel sistema di riposo) per ogni secondo rimane indietro di $(1-\sqrt{1-(\frac{v}{V})^2})$ secondi, o di $\frac{1}{2}(v/V)^2$ secondi - se trascuriamo grandezze di ordine quattro e superiori.

Da qui risulta la seguente conseguenza peculiare. Essendo dati nei punti A e B di K orologi sincronizzati, in quiete quando osservati nel sistema di riposo, e muovendo l'orologio in A con velocità v verso B lungo la linea che unisce i due, allora dopo l'arrivo di questo in B i due orologi non sono più sincronizzati, ma quello che è stato spostato da A a B ritarda di $\frac{1}{2}tv^2/V^2$ secondi (trascurando quantità di ordine quattro e superiori) rispetto a quello che sin dal principio si trova in B, dove t è il tempo che l'orologio necessita per andare da A a B.

Si vede immediatamente che questo risultato continua a valere anche se l'orologio si muove da A a B lungo una linea poligonale arbitraria e persino se i punti A e B coincidono.

Assumendo che il risultato mostrato per una linea poligonale sia valido anche per una linea curva continua, si arriva così all'affermazione: se in A si trovano due orologi sincronizzati e si muove uno dei due con velocità costante lungo una curva chiusa fino ritornare di nuovo in A, il che richiede, diciamo, t secondi, allora al suo arrivo in A quell'orologio ritarda rispetto a quello che è stato fermo di $\frac{1}{2}t(v/V)^2$ secondi. Si conclude che un orologio con bilanciere a ruota che si trova sull'equatore terrestre deve battere il tempo un po' più lentamente rispetto a un orologio esattamente identico, e soggetto alle stesse condizioni, che si trova in uno dei poli terrestri.

§ 5. Teorema di addizione delle velocità.

Nel sistema k in movimento con velocità v lungo l'asse X del sistema K si muove un punto secondo le equazioni:

$$\begin{aligned} \xi &= w_\xi \tau & (48)\\ \eta &= w_\eta \tau \,, & (49)\\ \zeta &= 0 \,, & (50) \end{aligned}$$

dove w_ξ e w_η sono costanti.

Si cerca il movimento del punto rispetto al sistema K. Introducendo le quantità x, y, z, t nelle equazioni di movimento del punto, e con l'aiuto delle equazioni di trasformazione trovate nel § 3, si ottiene:

$$\begin{aligned} x &= \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} t \,, & (51)\\ y &= \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} w_\eta t \,, & (52)\\ z &= 0 \,. & (53) \end{aligned}$$

La legge del parallelogramma applicata alle velocità vale quindi, secondo la nostra teoria, solamente in prima approssimazione. Definiamo:

$$\begin{aligned} U^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \,, & (54)\\ w^2 &= w_\xi^2 + w_\eta^2 & (55) \end{aligned}$$

e

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{w_y}{w_x} \,; \qquad (56)$$

α deve quindi essere visto come l'angolo tra le velocità v e w. Dopo un semplice calcolo risulta:

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw\cos\alpha) - \left(\frac{vw\sin\alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{vw\cos\alpha}{V^2}} \,. \qquad (57)$$

È notevole che v e w entrino in maniera simmetrica nell'espressione per la velocità risultante. Se anche w possiede la direzione dell'asse X (asse Ξ) otteniamo:

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}} \,. \qquad (58)$$

Da questa equazione segue che dalla composizione di due velocità minori di V risulta sempre una velocità minore di V. Infatti, ponendo $v = V - \chi$, $w = V - \lambda$, dove χ e λ sono positivi e minori di V, si ha:

$$U = V \frac{2V - \chi - \lambda}{2V - \chi - \lambda + \frac{\chi\lambda}{V}} < V \ . \tag{59}$$

Segue inoltre che la velocità della luce non può essere alterata dalla composizione con una "velocità subluminale". In questo caso si ottiene:

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V \ . \tag{60}$$

Avremmo potuto ottenere la formula per U nel caso in cui v e w abbiano la stessa direzione anche attraverso la combinazione di due trasformazioni, secondo il § 3. Introducendo insieme ai sistemi K e k che appaiono nel § 3 ancora un terzo sistema k' in movimento parallelo rispetto a k, la cui origine si muove lungo l'asse Ξ con velocità w, otteniamo così equazioni per le grandezze x, y, z, t e le corrispondenti grandezze di k' che si distinguono da quelle trovate nel § 3 solo per il fatto che al posto di "v" entra la grandezza

$$\frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}} \ ; \tag{61}$$

Da qui si vede che tali trasformazioni parallele formano un gruppo - come dev'essere. -

Abbiamo derivato le necessarie proposizioni della cinematica corrispondente ai nostri due principi e ora passiamo a mostrare il loro uso nell'elettrodinamica.

II. Parte elettrodinamica.

§ 6. Trasformazione delle equazioni di Maxwell-Hertz per lo spazio vuoto. Sulla natura delle forze elettromotrici che sorgono dal movimento in un campo magnetico.

Siano valide le equazioni di Maxwell-Hertz per lo spazio vuoto per il sistema di riposo K, quindi sia:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \ , \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \ , \tag{62}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \ , \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \ , \tag{63}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \ , \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \ , \tag{64}$$

dove (X, Y, Z) rappresenta il vettore della forza elettrica e (L, M, N) quello della forza magnetica.

Usando in queste equazioni le trasformazioni sviluppate nel § 3, nel senso che relazioniamo i processi elettromagnetici al sistema di coordinate in movimento con velocità v là introdotto, otteniamo quindi le equazioni:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \zeta}\,, \tag{65}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \xi}\,, \tag{66}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta}\,, \tag{67}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \eta}\,, \tag{68}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta}\,, \tag{69}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \xi}\,, \tag{70}$$

dove

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}\,. \tag{71}$$

Il principio di relatività richiede ora che se le equazioni di Maxwell-Hertz sono valide nel sistema K, allora devono essere valide anche nel sistema k, cioè per i vettori della forza elettrica e della forza magnetica ((X', Y', Z') e (L', M', N')) del sistema in movimento k, definiti qui attraverso gli effetti ponderomotori su masse elettriche e magnetiche,[5] sono valide le equazioni:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X'}{\partial \tau} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}\,, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}\,, \tag{72}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y'}{\partial \tau} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}\,, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}\,, \tag{73}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z'}{\partial \tau} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}\,, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}\,, \tag{74}$$

Ora, evidentemente i due sistemi di equazioni trovati in k devono esprimere esattamente la stessa fisica, poiché ambedue sono equivalenti alle equazioni di Maxwell-Hertz per il sistema K. Inoltre, siccome le equazioni dei due i sistemi coincidono, a parte i simboli che rappresentano i vettori, segue quindi che le funzioni che appaiono nelle posizioni corrispondenti devono coincidere a meno di un fattore $\psi(v)$, comune a tutte le funzioni di uno dei due sistemi di equazioni, indipendente da

[5][N.d.T.] Una forza ponderomotrice è una forza non-lineare prodotta da un campo elettromagnetico non-omogeneo oscillante.

ξ, η, ζ e τ e eventualmente dipendente da v. Valgono quindi le relazioni:

$$X' = \psi(v)X \;, \qquad\qquad L' = \psi(v)L \;, \tag{75}$$
$$Y' = \psi(v)\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) \;, \qquad\qquad M' = \psi(v)\beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right) \;, \tag{76}$$
$$Z' = \psi(v)\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right) \;, \qquad\qquad N' = \psi(v)\beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right) \;. \tag{77}$$

Costruendo ora l'inversione di questo sistema di equazioni, per prima cosa risolvendo le equazioni trovate, poi attraverso l'applicazione delle equazioni nella trasformazione inversa (da k a K), che è caratterizzata dalla velocità $-v$, segue quindi, considerando che entrambi i sistemi di equazioni ottenuti devono essere identici[6]

$$\varphi(v) \cdot \varphi(-v) = 1 \;. \quad [\psi(v) \cdot \psi(-v) = 1 \;.] \tag{78}$$

Inoltre, segue per ragioni di simmetria che[7]

$$\varphi(v) = \varphi(-v) \;; \quad [\psi(v) = \psi(-v) \;;] \tag{79}$$

e quindi abbiamo

$$\varphi(v) = 1 \;, \quad [\psi(v) = 1 \;,] \tag{80}$$

e le nostre equazioni assumono la forma:

$$X' = X \;, \qquad\qquad L' = L \;, \tag{81}$$
$$Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) \;, \qquad\qquad M' = \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right) \;, \tag{82}$$
$$Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right) \;, \qquad\qquad N' = \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right) \;. \tag{83}$$

Per l'interpretazione di queste equazioni consideriamo quanto segue. Sia data una carica elettrica[8] puntiforme che, misurata nel sistema di riposo K, sia di grandezza "uno", ossia, stando in quiete nel sistema di riposo esercita la forza di 1 dina su di una carica elettrica identica a una distanza di 1 cm. Secondo il principio di relatività questa carica elettrica è di grandezza "uno" anche quando misurata nel sistema in movimento. Essendo questa carica elettrica in quiete relativamente al sistema di riposo, il vettore (X, Y, Z) è quindi per definizione uguale alla forza che sgisce su di essa. Se la carica elettrica si trova in quiete rispetto al sistema in movimento (per lo meno nell'istante considerato), allora la forza che agisce su di essa e misurata nel sistema in movimento è uguale al vettore (X', Y', Z'). Le prime tre delle equazioni sopra posso essere espresse in parole nelle due seguenti forme:

1. Se un monopolo elettrico puntiforme si trova in movimento in un campo elettromagnetico, su di esso agisce, oltre alla forza elettrica, una "forza elettromotrice" che, trascurando termini moltiplicati da potenze di v/V di ordine due e

[6][N.d.T.] Nel testo originale, nelle tre equazioni che seguono, è usata la lettera greca φ, ma questo è un errore tipografico poiché dovrebbe essere invece usata la ψ, come posto tra parentesi quadre.

[7]Essendo, per esempio, $X = Y = Z = L = M = 0$ e $N \neq 0$, è chiaro quindi, per ragioni di simmetria, che cambiando il segno di v senza alterarne il valore numerico, anche Y' deve cambiare di segno senza cambiare il suo valore numerico.

[8][N.d.T.] Il vocabolo tedesco usato qui da Einstein è *Elektrizitätsmenge*, che letteralmente si traduce con "quantità di elettricità". Ho preferito usare il termine "carica elettrica".

superiori, è uguale al prodotto vettoriale della velocità di movimento del monopolo e della forza magnetica, diviso per la velocità della luce. (Formulazione antica.)

2. Se un monopolo elettrico puntiforme si trova in movimento in un campo elettromagnetico, la forza che agisce su di esso è uguale quindi alla forza elettrica esistente nella posizione del monopolo elettrico, che si ottiene attraverso la trasformazione del campo ad un sistema di coordinate in quiete relativamente al monopolo elettrico. (Formulazione nuova.)

L'analogo vale per le "forze magnetomotrici". Si vede che nella teoria sviluppata la forza elettromotrice svolge solamente il ruolo di un concetto ausiliario, la cui introduzione si deve al fatto che la forze elettrica e quella magnetica non possiedono un'esistenza indipendente dallo stato di movimento del sistema di coordinate.

Inoltre, è chiaro che viene meno l'asimmetria menzionata nell'introduzione, riguardo l'osservazione di correnti generate dal movimento relativo di una calamita e di un conduttore. Anche le questioni sul "sito" delle forze elettromagnetiche elettromotrici (macchine unipolari) diventano senza fondamento.

§ 7. Teoria del principio di Doppler e dell'aberrazione.

Nel sistema K si trovi, molto lontano dall'origine delle coordinate, una sorgente di onde elettromagnetiche che, nella parte di spazio che contiene l'origine delle coordinate, è rappresentata con sufficiente approssimazione dalle equazioni:

$$X = X_0 \sin\Phi\ , \qquad L = L_0 \sin\Phi\ , \tag{84}$$

$$Y = Y_0 \sin\Phi\ , \qquad M = M_0 \sin\Phi\ , \qquad \Phi = \omega\left(t - \frac{ax+by+cz}{V}\right)\ . \tag{85}$$

$$Z = Z_0 \sin\Phi\ , \qquad N = N_0 \sin\Phi\ , \tag{86}$$

Qui (X_0, Y_0, Z_0) e (L_0, M_0, N_0) sono i vettori che determinano le ampiezze dei fronti d'onda, a, b, c sono i coseni direttori delle normali delle onde.

Ci interroghiamo sulla natura di queste onde quando esse vengono studiate da un osservatore in quiete nel sistema in movimento k. - Attraverso l'uso delle equazioni di trasformazione per le forze elettriche e magnetiche, trovate nel § 6, e le equazioni di trasformazione per le coordinate e il tempo, trovate nel S 3, otteniamo immediatamente:

$$X' = X_0 \sin\Phi'\ , \qquad L' = L_0 \sin\Phi'\ , \tag{87}$$

$$Y' = \beta\left(Y_0 - \frac{v}{V}N_0\right)\sin\Phi'\ , \qquad M' = \beta\left(M_0 + \frac{v}{V}Z_0\right)\sin\Phi'\ , \tag{88}$$

$$Z' = \beta\left(Z_0 + \frac{v}{V}M_0\right)\sin\Phi'\ , \qquad N' = \beta\left(N_0 - \frac{v}{V}Y_0\right)\sin\Phi'\ , \tag{89}$$

$$\Phi' = \omega'\left(\tau - \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{V}\right)\ , \tag{90}$$

dove si definisce

$$\begin{aligned}
\omega' &= \omega\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right) , && (91) \\
a' &= \frac{a - \dfrac{v}{V}}{1 - \dfrac{v}{V}} , && (92) \\
b' &= \frac{b}{\beta\left(1 - a\dfrac{v}{V}\right)} , && (93) \\
c' &= \frac{c}{\beta\left(1 - a\dfrac{v}{V}\right)} . && (94)
\end{aligned}$$

Dall'equazione per ω' segue: se un osservatore si trova in movimento con velocità v relativamente a una sorgente di luce infinitamente distante di frequenza ν, di modo che la linea di unione "sorgente di luce-osservatore" formi l'angolo φ con la velocità dell'osservatore riferita al sistema di coordinate in quiete rispetto alla sorgente di luce, allora la frequenza ν' della luce percepita dall'osservatore è data dall'equazione:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos\varphi \dfrac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{V}\right)^2}} . \tag{95}$$

Questo è il principio di Doppler per velocità arbitrarie. Per $\varphi = 0$ l'equazione si semplifica:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \dfrac{v}{V}}{1 + \dfrac{v}{V}}} . \tag{96}$$

Si vede che - contrariamente alla comprensione comune - per $v = -\infty$ si ha $\nu = \infty$.

Chiamando φ' l'angolo tra la normale di onda (la direzione del raggio) nel sistema in movimento e la linea di unione "sorgente di luce-osservatore", l'equazione per a' acquisisce la forma:

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \dfrac{v}{V}}{1 - \dfrac{v}{V}\cos\varphi} . \tag{97}$$

Questa equazione esprime la legge di aberrazione nella sua forma più generale. Ponendo $\varphi = \pi/2$, l'equazione si semplifica:

$$\cos\varphi' = -\frac{v}{V} . \tag{98}$$

Dobbiamo ancora cercare come appare l'ampiezza dell'onda nel sistema in movimento. Chiamando l'ampiezza della forza elettrica o magnetica A, se misurata nel sistema di riposo, e A', se misurata nel sistema in movimento, si ottiene:

$$A'^2 = A^2 \frac{\left(1 - \dfrac{v}{V}\cos\varphi\right)^2}{1 - \left(\dfrac{v}{V}\right)^2} , \tag{99}$$

la quale equazione, per $\varphi = 0$, si semplifica:

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}} \,. \tag{100}$$

Segue dalle equazioni sviluppate che, per un osservatore che si avvicina con velocità V a una sorgente di luce, questa deve apparire infinitamente intensa.

§ 8. Trasformazione dell'energia dei raggi di luce. Teoria della pressione di radiazione esercitata su specchi perfetti.

Siccome l'energia della luce per unità di volume è uguale a $A^2/8\pi$, dobbiamo quindi considerare, per il principio di relatività, $A'^2/8\pi$ come l'energia della luce nel sistema in movimento. Quindi A'^2/A^2 sarebbe il rapporto dell'energia di un certo complesso di luce[9] "misurata in movimento" con quella "misurata in quiete", se il volume di un complesso di luce misurato in K e il volume misurato in k fossero uguali. Questo però non è il caso. Se a, b, c sono i coseni direttori della normale di onda della luce nel sistema di riposo, allora nessuna energia passa attraverso gli elementi d'area della superficie sferica

$$(x - Vat)^2 + (y - Vbt)^2 + (z - Vct)^2 = R^2 \tag{101}$$

che si muove con la velocità della luce; possiamo quindi dire che questa superficie contiene permanentemente lo stesso complesso di luce. Cerchiamo la quantità di energia che questa superficie possiede nel sistema k, ovvero, l'energia del complesso di luce relativamente al sistema k.

La superficie sferica è - osservata nel sistema in movimento - una superficie ellissoidale, descritta, al tempo $\tau = 0$, dall'equazione:

$$\left(\beta\xi - a\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\eta - b\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\zeta - c\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 = R^2 \,. \tag{102}$$

Chiamando S il volume della sfera e S' quello dell'ellissoide si ha quindi, come mostra un semplice calcolo:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi} \,. \tag{103}$$

Chiamando quindi E l'energia misurata nel sistema di riposo e E' quella misurata nel sistema in movimento, la quale è contenuta dalla superficie considerata, si ottiene:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi}S'}{\frac{A^2}{8\pi}S} = \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \,, \tag{104}$$

[9] [N.d.T.] In tedesco, *Lichtkomplex.* Si può interpretare come un insieme di onde elettromagnetiche contenute in un dato volume.

la quale formula si scrive, per $\varphi = 0$, più semplicemente:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{V}}}{\sqrt{1 + \frac{v}{V}}} \,. \tag{105}$$

È notevole che l'energia e la frequenza di un complesso di luce cambino in relazione allo stato del movimento dell'osservatore secondo le stesse leggi.

Sia ora il piano di coordinate $\xi = 0$ una superficie perfettamente riflettente sulla quale le onde piane considerate nell'ultimo paragrafo vengono riflesse. Analizziamo la pressione di luce esercitata sulla superficie riflettente e la direzione, frequenza e intensità della luce riflessa.

Sia la luce incidente definita dalle quantità A, $\cos\varphi$, ν (riferite al sistema K). Le quantità corrispondenti considerate in k sono:

$$A' = A\frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \,, \tag{106}$$

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi} \,, \tag{107}$$

$$\nu' = \nu\frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \,. \tag{108}$$

Per la luce riflessa otteniamo, se riferiamo il processo al sistema k:

$$A'' = A' \,, \tag{109}$$

$$\cos\varphi'' = -\cos\varphi' \,, \tag{110}$$

$$\nu'' = \nu' \,. \tag{111}$$

Infine, si ottiene per la luce riflessa, trasformando di nuovo al sistema di riposo K:

$$A''' = A''\frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = A\frac{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} \,, \tag{112}$$

$$\cos\varphi''' = \frac{\cos\varphi'' + \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''} = -\frac{\left(1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2\right)\cos\varphi - 2\frac{v}{V}}{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2} \,, \tag{113}$$

$$\nu''' = \nu''\frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = \nu\frac{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2} \,. \tag{114}$$

L'energia (misurata nel sistema di riposo) che incide per unità di tempo sulla superficie dello specchio è evidentemente $A^2/8\pi(V\cos\varphi - v)$. L'energia che si allontana dalla superficie dello specchio per unità di tempo è $A'''^2/8\pi(-V\cos\varphi''' + v)$. La differenza di queste due espressioni è, secondo il principio dell'energia, il lavoro eseguito per unità di tempo dalla pressione della luce. Uguagliando questo lavoro al prodotto $P \cdot v$, dove P è la pressione della luce, si ottiene:

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\frac{\left(\cos\varphi - \frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} \; . \tag{115}$$

in prima approssimazione si ottiene, in conformità con l'esperienza e con altre teorie

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\varphi \; . \tag{116}$$

Tutti i problemi dell'ottica dei corpi in movimento possono essere risolti secondo il metodo usato qui. L'essenziale è che la forza elettrica e quella magnetica della luce, che è influenzata da un corpo in movimento, siano trasformate ad un sistema di coordinate in riposo relativamente al corpo. Così, ogni problema dell'ottica dei corpi in movimento è ricondotto a una sequenza di problemi dell'ottica dei corpi in riposo.

§ 9. Trasformazione delle equazioni di Maxwell-Hertz considerando le correnti di convezione.

Cominciamo dalle equazioni:

$$\frac{1}{V}\left\{u_x\varrho + \frac{\partial X}{\partial t}\right\} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \, , \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \, , \tag{117}$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_y\varrho + \frac{\partial Y}{\partial t}\right\} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \, , \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \, , \tag{118}$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_z\varrho + \frac{\partial Z}{\partial t}\right\} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \, , \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \, , \tag{119}$$

dove

$$\varrho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \tag{120}$$

rappresenta la densità dell'elettricità moltiplicata per 4π e (u_x, u_y, u_z) il vettore velocità dell'elettricità. Immaginando le masse elettriche legate invariabilmente a corpi rigidi e piccoli (ioni, elettroni), queste equazioni sono la base elettromagnetica dell'elettrodinamica di Lorentz e dell'ottica dei corpi in movimento.

Trasformando queste equazioni, che sono valide nel sistema K, al sistema k con l'aiuto delle equazioni di trasformazione del § 3 e del § 6, si ottengono le equazioni:

$$\frac{1}{V}\left\{u_\xi \varrho' + \frac{\partial X'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}, \tag{121}$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\eta \varrho' + \frac{\partial Y'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}, \tag{122}$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\zeta \varrho' + \frac{\partial Z'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}, \tag{123}$$

dove

$$\frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{V^2}} = u_\xi , \tag{124}$$

$$\frac{u_y}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\eta , \quad \varrho' = \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta} = \beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)\varrho . \tag{125}$$

$$\frac{u_z}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\zeta . \tag{126}$$

Essendo - come segue dal teorema di addizione delle velocità (§ 5) - il vettore (u_ξ, u_η, u_ζ) nient'altro che la velocità delle masse elettriche misurata nel sistema k, si mostra con ciò che, con base nei nostri principi cinematici, il fondamento elettrodinamico della teoria elettrodinamica di Lorentz dei corpi in movimento corrisponde al principio di relatività.

Si noti ancora rapidamente che dalle equazioni sviluppate può essere facilmente dedotta la seguente importante affermazione: se un corpo elettricamente carico si muove liberamente nello spazio e durante ciò la sua carica, osservata da un sistema di coordinate in movimento col corpo, non varia, essa rimane costante anche secondo il sistema K "di riposo".

§ 10. Dinamica dell'elettrone (lentamente accelerato).

In un campo elettromagnetico si muova una particella puntiforme dotata di una carica elettrica ε (da qui in avanti chiamata "elettrone"), sulla cui legge del moto supponiamo solamente quanto segue:

Se l'elettrone si trova in quiete in una data epoca, allora il suo moto nell'intervallo di tempo seguente avviene secondo le equazioni:

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon X \tag{127}$$

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} = \varepsilon Y \tag{128}$$

$$\mu \frac{d^2 z}{dt^2} = \varepsilon Z , \tag{129}$$

$$\tag{130}$$

fintanto che l'elettrone si muove lentamente. Qui x, y, z rappresentano le coordinate dell'elettrone, μ la massa dell'elettrone.

In secondo luogo, supponiamo che l'elettrone possieda velocità v in un dato istante di tempo. Cerchiamo la legge secondo la quale l'elettrone si muove nell'istante di tempo immediatamente successivo.

Senza influenzare la generalità dell'argomento, possiamo e vogliamo supporre che l'elettrone, nel momento in cui lo osserviamo, si trovi nell'origine delle coordinate e che si muova lungo l'asse X del sistema K con velocità v. È quindi ovvio che l'elettrone si trovi in quiete nell'istante menzionato ($t = 0$) relativamente a un sistema di coordinate k in movimento parallelo con velocità costante v lungo l'asse X.

Dai presupposti fatti qui sopra è chiaro, in relazione al principio di relatività, che l'elettrone osservato dal sistema k si muove nell'istante di tempo immediatamente successivo (per piccoli valori di t) secondo le equazioni:

$$\mu \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \varepsilon X' , \tag{131}$$

$$\mu \frac{d^2\eta}{d\tau^2} = \varepsilon Y' , \tag{132}$$

$$\mu \frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \varepsilon Z' , \tag{133}$$

$$\tag{134}$$

Dove i simboli $\xi, \eta, \zeta, \tau, X', Y', Z'$ si riferiscono al sistema k. Stabilendo ancora che, per $t = x = y = z = 0$ debba essere $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$, cosicché le equazioni di trasformazione dei §§ 3 e 6 siano valide, si ha quindi:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right) , \tag{135}$$

$$\xi = \beta(x - vt) , \qquad X' = X , \tag{136}$$

$$\eta = y , \qquad Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) , \tag{137}$$

$$\zeta = z , \qquad Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right) . \tag{138}$$

Con l'aiuto di queste equazioni trasformiamo le equazioni del movimento sopra, dal sistema k al sistema K, e otteniamo:

$$(A) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{\varepsilon}{\mu}\dfrac{1}{\beta^3}X , \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{\varepsilon}{\mu}\dfrac{1}{\beta}\left(Y - \dfrac{v}{V}N\right) , \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{\varepsilon}{\mu}\dfrac{1}{\beta}\left(Z + \dfrac{v}{V}M\right) . \end{cases} \tag{139}$$

Cerchiamo ora, secondo l'approccio usuale, la massa "longitudinale" e quella "trasversale" dell'elettrone in movimento. Scriviamo le equazioni (A) nella forma

$$\mu\beta^3 \frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon X = \varepsilon X' \,, \tag{140}$$

$$\mu\beta^2 \frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon\beta \left(Y - \frac{v}{V}N\right) = \varepsilon Y' \,, \tag{141}$$

$$\mu\beta^2 \frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon\beta \left(Z + \frac{v}{V}M\right) = \varepsilon Z' \tag{142}$$

$$\tag{143}$$

e notiamo in primo luogo che $\varepsilon X', \varepsilon Y', \varepsilon Z'$ sono le componenti della forza ponderomotrice che agisce sull'elettrone, e osservata in un sistema in movimento che, nell'istante considerato, possiede proprio la stessa velocità dell'elettrone. (Questa forza potrebbe essere misurata in questo sistema per esempio con una bilancia a molla.) Se ora chiamiamo questa forza semplicemente "la forza che agisce sull'elettrone" e manteniamo l'equazione

$$\text{Valore della massa} \times \text{valore dell'accelerazione} = \text{valore della forza} \,, \tag{144}$$

e se, oltre a questo, stabiliamo che le accelerazioni devono essere misurate nel sistema di riposo K, otteniamo dalle equazioni sopra:

$$\text{Massa longitudinale} = \frac{\mu}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^3} \,, \tag{145}$$

$$\text{Massa trasversale} = \frac{\mu}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} \,. \tag{146}$$

Naturalmente si otterrebbero altri valori per le masse usando un'altra definizione della forza e dell'accelerazione; da ciò si apprende che si deve procedere con molta cautela nel paragonare diverse teorie del movimento dell'elettrone.

Notiamo che questi risultati sulle masse sono validi anche per i punti materiali ponderabili; dato che un punto materiale ponderabile può diventare, attraverso l'introduzione di una carica elettrica arbitrariamente piccola, un elettrone (nel nostro senso).

Determiniamo l'energia cinetica dell'elettrone. Muovendosi un elettrone dall'origine delle coordinate del sistema K lungo l'asse X con velocità iniziale 0 e costantemente soggetto all'effetto di una forza elettrostatica X, è chiaro allora che l'energia sottratta al campo elettrostatico ha il valore $\int \varepsilon X dx$. Siccome l'elettrone deve essere lentamente accelerato e perciò non può emettere nessuna energia sotto forma di radiazione, allora l'energia sottratta al campo elettrostatico deve essere uguagliata all'energia del movimento W dell'elettrone. Da questo si ottiene, considerando che durante tutto il processo di movimento osservato vale la prima delle equazioni (A):

$$W = \int \varepsilon X dx = \int_0^v \beta^3 v dv = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\} \,. \tag{147}$$

W diventa allora, per $v = V$, infinitamente grande. Velocità superluminali non possiedono - come nei nostri risultati anteriori - possibilità di esistere.

Anche questa espressione per l'energia cinetica deve, secondo l'argomento fornito sopra, valere per masse ponderabili.

Vogliamo ora numerare le proprietà del movimento dell'elettrone che risultano dal sistema di equazioni (A) e che sono accessibili all'esperimento:

1. Dalla seconda equazione del sistema (A) segue che una forza elettrica Y e una forza magnetica N possiedono dunque un effetto deflettente ugualmente forte per un elettrone in movimento con velocità v, se $Y = N \cdot v/V$. Si deduce quindi che la determinazione della velocità dell'elettrone è possibile, secondo la nostra teoria, a partire dal rapporto tra la deviazione magnetica A_m e quella elettrica A_e, per velocità arbitrarie, attraverso l'uso della legge:

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V} \, . \tag{148}$$

Questa relazione può essere provata sperimentalmente, poiché la velocità dell'elettrone può essere misurata direttamente, per esempio per mezzo di campi elettrici e magnetici rapidamente oscillanti.

2. Dalla derivazione dell'energia cinetica dell'elettrone segue che deve valere la seguente relazione tra la differenza di potenziale attraversata e la velocità v raggiunta dall'elettrone:

$$P = \int X dx = \frac{\mu}{\varepsilon} V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\} \, . \tag{149}$$

3. Calcoliamo il raggio di curvature della traiettoria, R, nel caso sia data una forza magnetica N (come unica forza deflettente) agendo perpendicolarmente alla velocità dell'elettrone. Dalla seconda delle equazioni (A) otteniamo:

$$-\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{v}{V} N \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} \tag{150}$$

o

$$R = V^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \cdot \frac{1}{N} \, . \tag{151}$$

Queste tre relazioni sono un'espressione completa per le leggi secondo le quali l'elettrone deve muoversi, in accordo con la teoria presentata.

Per concludere, faccio notare che nell'elaborazione dei problemi trattati qui il mio amico e collega M. Besso è stato sempre fedelmente al mio fianco e gli sono grato per i molti importanti suggerimenti.

Berna, Giugno 1905

(Ricevuto il 30 de giugno de 1905)