# Spazio e tempo.*

di HERMANN MINKOWSKI a Gottinga.†

Miei Signori! Le concezioni sullo spazio e sul tempo che io vorrei sviluppare qui per voi sono maturate sul terreno della fisica sperimentale. Qui si trova la loro forza. La loro tendenza è radicale. D'ora in avanti le nozioni di spazio e tempo come entità separate dovrebbero decadere nell'ombra e solamente una specie di unione di entrambi i concetti dovrebbe mantenere autonomia.

## I.

Vorrei prima di tutto esporre come si potrebbe arrivare dalla Meccanica oggigiorno accettata a concezioni diverse di spazio e tempo solamente attraverso un puro raziocinio matematico. Le equazioni della Meccanica newtoniana mostrano una duplice invarianza. In primo luogo, la loro forma rimane inalterata se si sottopone un prefissato sistema di coordinate spaziali ad un arbitrario *cambio di posizione*, e in secondo luogo, se si cambia il suo stato di movimento, nel senso che gli si impartisce un qualunque movimento di *traslazione uniforme*; anche l'origine del tempo non svolge alcun ruolo. Si è abituati a considerare gli assiomi della geometria come superflui quando ci si sente maturi per gli assiomi della Meccanica e perciò quelle due invarianze vengono menzionate brevemente e piuttosto raramente. Ciascuna di loro implica un certo gruppo di trasformazioni per le equazioni differenziali della Meccanica. L'esistenza del primo gruppo si considera come una caratteristica fondamentale dello spazio. Il secondo gruppo lo si penalizza preferibilmente ignorandolo, in modo da passare a cuor leggero sopra il fatto che uno non può mai decidere, a partire dai fenomeni fisici, se lo spazio che ha presupposto essere a riposo non si trovi invece alla fine in un movimento di traslazione uniforme. Così quei due gruppi conducono uno accanto all'altro un'esistenza completamente separata. Il loro carattere totalmente eterogeneo può aver dissuaso dal comporli. Ma proprio il gruppo completo composto ci dà da pensare.

Vogliamo cercare di rappresentare graficamente le loro relazioni. Siano $x, y, z$ coordinate rettangolari per lo spazio, e $t$ indichi il tempo. Secondo la nostra percezione, solo posizioni e tempi sono sempre legati. Nessuno determina una posizione, se non a un certo tempo, e un tempo, se non in una certa posizione. Però io rispetto ancora il dogma per cui spazio e tempo hanno ciascuno un significato indipendente. Voglio chiamare un punto nello spazio a un dato istante di tempo, cioè un sistema

*Seminario tenuto in occasione dell'80-esimo incontro di Fisica (*Naturforscher*, naturalisti, oggi fisici, *NdT*) a Colonia il 21 settembre 1908.

†Titolo originale: *Raum und Zeit.* Pubblicato in: *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Leipzig, 1909.* Tradotto da Oliver F. Piattella.

di valori $x, y, z, t$, un *evento*.[1] La molteplicità di tutti i possibili sistemi di valori $x, y, z, t$ sarà chiamato *spaziotempo*.[2] Potrei arditamente tracciare con un gessetto sulla lavagna i quattro assi dello spaziotempo. Già *un* asse disegnato consiste in molecole che oscillano fortemente e in più viaggia con la Terra nello spazio, dando quindi già abbastanza da astrarre; l'astrazione un po' maggiore in relazione al numero 4 non fa male al matematico. Per non lasciare da nessuna parte un noioso vuoto, vogliamo immaginare che ci sia qualcosa di percepibile in tutte le posizioni e a tutti i tempi. Per non dire materia o elettricità, avrò bisogno per questo qualcosa della parola "sostanza". Dirigiamo la nostra attenzione al punto sostanziale nell'evento $x, y, z, t$ e immaginiamoci di essere in grado di riconoscere questo punto sostanziale ad ogni altro tempo. Ad un elemento di tempo $dt$ corrispondano le variazioni $dx, dy, dz$ delle coordinate spaziali di questo punto sostanziale. Otteniamo quindi come immagine della vita eterna, per così dire, del punto sostanziale una curva nello spaziotempo, una *linea di universo*,[3] i cui punti si possono mettere in corrispondenza univoca con il parametro $t$ da $-\infty$ a $\infty$. L'intero spaziotempo appare risolto in tali linee di universo e io vorrei anche anticipare che secondo la mia opinione le leggi fisiche potrebbero trovare la loro più completa espressione come relazioni di scambio tra queste linee di universo.

Attraverso i concetti di spazio e tempo si separano la varietà $x, y, z$ a $t = 0$ e i suoi due lati $t > 0$ e $t < 0$. Considerando per semplicità l'origine dello spazio e del tempo, il gruppo della Meccanica menzionato per primo implica che possiamo sottoporre gli assi $x, y, z$ in $t = 0$ ad un'arbitraria rotazione intorno all'origine, il che corrisponde alle trasformazioni lineari e omogenee dell'espressione

$$x^2 + y^2 + z^2 \tag{1}$$

in se stessa. Il secondo gruppo però dice che, anche qui senza modificare l'espressione delle leggi meccaniche, possiamo sostituire

$$x, y, z, t \text{ per } x - \alpha t, y - \beta t, z - \gamma t, t \tag{2}$$

con arbitrarie costanti $\alpha, \beta, \gamma$. Conseguentemente, all'asse temporale può essere data una direzione completamente arbitraria verso la metà superiore dello spaziotempo $t > 0$. Cos'ha a che fare la richiesta di ortogonalità nello spazio con questa completa libertà dell'asse temporale verso l'alto?

Per creare una connessione, prendiamo un parametro positivo $c$ e consideriamo la struttura

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1\ . \tag{3}$$

Essa consiste di due falde separate da $t = 0$, secondo l'analogia con un iperboloide a due falde. Consideriamo la falda nella regione $t > 0$ e diamo ora un'interpretazione a quella trasformazione omogenea lineare di $x, y, z, t$ in quattro nuove variabili $x', y', z', t'$, per cui questa falda si esprimerà corrispondentemente nelle nuove variabili. A queste trasformazioni corrispondono evidentemente le rotazioni dello spazio

[1] NdT. Minkowski scrive: *Weltpunkt*, cioè un *punto di universo*. Uso però in questa traduzione la terminologia corrente, traducendo in nota a piè di pagina quella originale minkowskiana.

[2] NdT. *Welt*, cioè il mondo.

[3] NdT. *Weltlinie*, che in italiano mantiene la traduzione letterale.

intorno all'origine. Una comprensione completa delle trasformazioni restanti la otteniamo non appena osserviamo una di queste, per cui $y$ e $z$ rimangono inalterati. Disegniamo (Fig. 1) la sezione di quella falda con il piano degli assi $x$ e $t$, ovvero il ramo superiore dell'iperbole $c^2t^2 - x^2 = 1$, con i suoi asintoti.

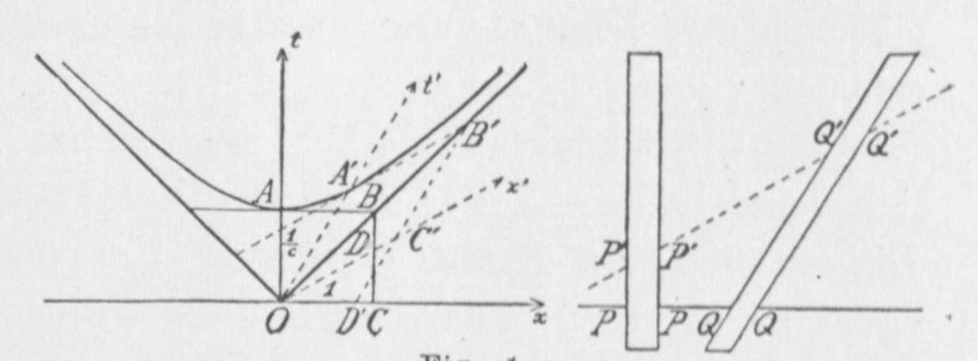


Fig. 1.

Inoltre, si disegni un arbitrario raggio vettore $OA'$ di questo ramo di iperbole dall'origine $O$, si disegni anche la tangente in $A'$ all'iperbole fino all'intersezione $B'$ con l'asintoto che giace a destra, si completi $OA'B'$ nel parallelogramma $OA'B'C'$, e infine, ci servirà dopo, si prolunghi $B'C'$ fino al intersecare in $D'$ l'asse $x$. Prendiamo ora $OC'$ e $OA'$ come assi per delle nuove coordinate $x'$ e $t'$ con unità di misura $OC' = 1$ e $OA' = 1/c$, cosicché quel ramo di iperbole ottiene nuovamente l'espressione $c^2t'^2 - x'^2 = 1$, $t' > 0$, e il passaggio da $x, y, z, t$ a $x', y', z', t'$ è una delle trasformazioni in questione.[4] Aggiungiamo ora alle trasformazioni descritte sopra gli arbitrari spostamenti delle origini dello spazio e del tempo e costituiamo così un gruppo di trasformazioni che evidentemente dipende dal parametro $c$ e che indico con $G_c$.

Facciamo ora crescere $c$ all'infinito, dunque $1/c$ converge a zero, così appare chiaro dalla figura descritta che il ramo di iperbole aderisce sempre più all'asse $x$, l'angolo degli asintoti si allarga fino a divenire un angolo piatto, quella trasformazione speciale diventa nel limite tale per cui l'asse $t'$ può avere una direzione arbitraria verso l'alto e $x'$ si avvicina con precisione sempre maggiore a $x$. Rispetto a quanto visto sopra è chiaro che il gruppo $G_c$ nel limite per $c = \infty$, dunque il gruppo $G_\infty$, diventa proprio quel gruppo completo relativo alla meccanica newtoniana. Dato ciò, siccome $G_c$ è matematicamente più comprensibile di $G_\infty$, un matematico avrebbe ben potuto fantasticare sull'idea che i fenomeni naturali alla fine possiedono davvero una invarianza non sotto il gruppo $G_\infty$, ma anzi sotto un gruppo $G_c$ con un $c$ determinato e finito, *estremamente grande* solamente nelle usuali unità di misura. Una tale intuizione sarebbe stato un trionfo della pura matematica. Ora, la matematica qui preannuncia solo trabocchetti, però le rimane la soddisfazione di essere in grado di comprendere, grazie alle sue felici esperienze

[4]NdT. L'equazione dell'iperbole rimane $c^2t'^2 - x'^2 = 1$ anche nel sistema primato perché questo è stato costruito di modo tale che l'asintoto continui a essere $ct' = x'$.

passate con i suoi sensi affinati nella libera lungimiranza, le profonde conseguenze di una tale riformulazione della nostra comprensione della natura.

Voglio subito notare di quale valore di $c$ si tratterà alla fine. Per $c$ entrerà *la velocità di propagazione della luce nello spazio vuoto.* Per non parlare né di spazio né di vuoto, possiamo caratterizzare questa grandezza nuovamente come il rapporto tra l'unità elettrica e quella magnetica della quantità di elettricità.[5]

L'esistenza dell'invarianza delle leggi della natura sotto il gruppo $G_c$ sarebbe ora da esprimersi così:

Dalla totalità dei fenomeni naturali, attraverso approssimazioni successive via via più esatte, si può dedurre un sistema di riferimento $x, y, z$ e $t$, spazio e tempo, per mezzo del quale questi fenomeni si rappresentano secondo determinate leggi. Però, durante tale procedimento, questo sistema di riferimento non è in alcun modo univocamente determinato dai fenomeni naturali. *Si può cambiare il sistema di riferimento a piacere, in maniera corrispondente alle trasformazioni del gruppo chiamato $G_c$, senza che l'espressione delle leggi della natura cambi al contempo.*

Per esempio, si può chiamare tempo anche il $t'$ della figura descritta sopra, ma si deve però necessariamente definire allo stesso tempo lo spazio con la varietà dei tre parametri $x', y, z$, in modo che le leggi fisiche si possano esprimere ora con $x', y, z, t'$ esattamente nello stesso modo di come si esprimono con $x, y, z, t$. Da qui si deduce che non avremmo più *lo* spazio nello spaziotempo, ma infiniti spazi, di modo analogo come nello spazio tridimensionale abbiamo infiniti piani. La geometria tridimensionale diventa un capitolo della fisica quadridimensionale. Capite ora perché io, nell'introduzione, dissi che spazio e tempo dovrebbero sparire nell'ombra e dovrebbe esistere al loro posto solo uno spaziotempo.

# II.

La questione è ora: quali circostanze ci costringono ad accettare l'interpretazione modificata di spazio e tempo? Questa nuova interpretazione non contraddice proprio mai i fenomeni fisici e garantisce, in fin dei conti, dei vantaggi per la descrizione dei fenomeni fisici?

Prima di occuparci di ciò, si premetta una osservazione importante. Avendo, in un qualche modo, individualizzato spazio e tempo, ad un punto sostanziale in quiete corrisponde dunque, come linea di universo, una linea retta parallela all'asse $t$, ad un punto sostanziale che si muove uniformemente corrisponde una retta inclinata rispetto all'asse $t$, ad un punto sostanziale in movimento non uniforme una linea di universo incurvata in un qualche modo. Immaginando in un evento arbitrario $x, y, z, t$ la linea di universo che lo attraversa, e trovandola lì parallela ad un qualche raggio vettore $OA'$ del ramo di iperbole prima menzionato, allora possiamo introdurre $OA'$ come nuovo asse temporale e secondo i nuovi concetti di spazio e tempo dati la sostanza nell'evento in questione sembra essere a riposo. Vogliamo ora introdurre questo assioma fondamentale:

*La sostanza data in un generico evento può sempre essere interpretata come a riposo stabilendo opportunamente spazio e tempo.*

[5]NdT. Ovvero $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, dove $\epsilon_0$ è la costante dielettrica del vuoto e $\mu_0$ è la permeabilità magnetica del vuoto (quindi il concetto di vuoto entra comunque).

L'assioma significa che in ogni evento l'espressione

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{4}$$

è sempre positiva o, equivalentemente, che ogni velocità $v$ è sempre minore di $c$. Dunque $c$ costituirebbe un limite superiore per tutte le velocità sostanziali e proprio qui si troverebbe il significato più profondo della grandezza $c$. In quest'ultima interpretazione l'assioma sembra avere di primo acchito qualcosa che non va. Bisogna però pensare che ora prende piede una Meccanica modificata in cui entra la radice quadrata di quella relazione differenziale di secondo ordine, cosicché casi con velocità superluminale ora svolgeranno solamente un ruolo più simile a quello che, per esempio, figure con coordinate immaginarie svolgono nella geometria.

L'*incentivo* e vero motivo *per la supposizione del gruppo $G_c$* venne solamente dal fatto che l'equazione differenziale per la propagazione delle onde luminose nel vuoto possiede quel gruppo $G_c$.[6]) D'altra parte, il concetto di corpo rigido ha senso solamente in una Meccanica col gruppo $G_\infty$. Ora, avendo un'ottica con $G_c$ ed esistendo d'altra parte corpi rigidi, è facile prevedere che attraverso i due rami di iperbole, appartenenti a $G_c$ e a $G_\infty$, si distinguerebbe *una* direzione temporale, e ciò avrebbe inoltre la conseguenza che con opportuni strumenti ottici rigidi in laboratorio si dovrebbe poter percepire un cambiamento nei fenomeni naturali a seconda di un diverso orientamento rispetto alla direzione di movimento della Terra. Tutti gli sforzi diretti a questo obiettivo, in particolare un famoso esperimento di interferenza di Michelson, ebbero tuttavia un esito negativo. Per chiarire questo fatto, H. A. Lorentz costruì un'ipotesi il cui successo si trova proprio nell'invarianza dell'ottica sotto il gruppo $G_c$. Secondo Lorentz, ogni corpo in movimento dovrebbe sperimentare un accorciamento nella direzione del movimento, e precisamente, nel caso di una velocità $v$, di un rapporto

$$1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{5}$$

Questa ipotesi sembra estremamente fantastica. Perché la contrazione non è da pensarsi come per esempio conseguenza della resistenza dell'etere, ma puramente come un regalo dall'alto, come circostanza concomitante allo stato di movimento.

Voglio mostrare ora nella nostra figura che l'ipotesi lorentziana è totalmente equivalente alla nuova interpretazione di spazio e tempo, per mezzo della quale diventa molto più comprensibile. Per semplicità, trascuriamo $y$ e $z$ e immaginiamoci uno spaziotempo con una dimensione spaziale, così un fascio di parallele erette come l'asse $t$ e un fascio di parallele inclinate rispetto all'asse $t$ (vedasi Fig. 1) sono rappresentazioni per l'evoluzione, rispettivamente, di un corpo a riposo e di un corpo in movimento uniforme, il quale ha una estensione spaziale costante. Se $OA'$ è parallelo alla seconda linea, allora possiamo introdurre $t'$ come coordinata temporale e $x'$ come coordinata spaziale, e quindi sembra che il secondo corpo sia a riposo e che il primo si muova uniformemente. Ipotizziamo ora che il primo corpo abbia lunghezza $l$ quando considerato a riposo, ovvero la larghezza $PP$ del primo fascio lungo l'asse $x$ è $= l \cdot OC$, dove $OC$ rappresenta l'unità di misura sull'asse $x$,

[6]Un utilizzo essenziale di questo fatto si trova già in W. Voigt, Göttinger Nachr. 1887, p. 41.

e d'altra parte ipotizziamo che il secondo corpo abbia la stessa lunghezza $l$ *quando considerato a riposo*; quest'ultima ipotesi vuol dire che la larghezza del secondo fascio misurata *parallela all'asse* $x'$ è $Q'Q' = l \cdot OC'$. Abbiamo ormai in questi due corpi rappresentazioni di due *identici* elettroni lorentziani, uno a riposo e uno in movimento uniforme.[7] Se ci atteniamo però alle coordinate originarie $x, t$, allora si deve dare come estensione del secondo elettrone la larghezza $QQ$ del suo fascio corrispondente *parallelo all'asse* $x$. È ora evidente che $QQ = l \cdot OD'$, dato che $Q'Q' = l \cdot OC'$. Un semplice calcolo dà, se $dx/dt = v$ per il secondo fascio, $OD' = OC \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, dunque anche $PP : QQ = 1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Ma questa è proprio l'ipotesi lorentziana della contrazione degli elettroni in movimento. Considerando d'altra parte il secondo elettrone come a riposo, adottando dunque il sistema di riferimento $x', t'$, allora bisogna indicare come lunghezza del primo la larghezza $P'P'$ del suo fascio parallelo $OC'$ e troveremmo il primo elettrone accorciato rispetto al secondo esattamente nello stesso rapporto; poiché nella figura si ha

$$P'P' : Q'Q' = OD : OC' = OD' : OC = QQ : PP\,. \tag{6}$$

Lorentz chiamò la dipendenza di $t'$ da $x$ e $t$ *tempo locale* dell'elettrone in movimento uniforme e associò una costruzione fisica di questo concetto per una migliore comprensione dell'ipotesi della contrazione. Tuttavia, l'aver riconosciuto nitidamente che il tempo di un elettrone è tanto buono quanto quello dell'altro, cioè che $t$ e $t'$ sono da trattarsi allo stesso modo, è merito innanzitutto di A. Einstein.[8]) Per prima cosa era ora il tempo non più da considerarsi come un concetto determinato in maniera univoca dai fenomeni naturali. Né Einstein né Lorentz modificarono nulla in relazione al concetto di spazio, forse perché, secondo le trasformazioni speciali menzionate, dove il piano $x'$, $t'$ si copre col piano $x$, $t$ è possibile un'interpretazione secondo cui l'asse $x$ dello spazio viene mantenuto al suo posto. Calpestare il concetto di spazio in un modo corrispondente a quello fatto per il concetto di tempo, è da giudicarsi un bene solo dal punto di vista della temerarietà della cultura matematica. Per questo pur indispensabile passo in avanti per una vera comprensione del gruppo $G_c$ mi sembra però la parola *principio di relatività* molto debole per esprimere una richiesta di invarianza sotto il gruppo $G_c$. Siccome il senso del postulato diventa che attraverso i fenomeni naturali solo il mondo quadridimensionale nello spazio e nel tempo viene dato, ma la proiezione nello spazio e nel tempo può essere effettuata ancora con una certa libertà, Vorrei dare piuttosto a questa affermazione il nome di *postulato dello spaziotempo assoluto* (o, in breve, postulato dello spaziotempo).[9]

# III.

Grazie al postulato dello spaziotempo diventa possibile un trattamento equivalente delle quattro componenti $x, y, z, t$. Con questo postulato, come ora vo-

[7] NdT. Certamente non elettroni nel senso moderno del termine. Oggi usiamo espressioni come "righelli", "aste" o "bastoni".

[8] A. Einstein, Ann. d. Phys. 17, 1905, p. 891; Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik 4, 1907, p. 411.

[9] NdT. *Postulat der absoluten Welt*, "postulato dell'universo assoluto", o, *Weltpostulat*, "postulato dell'universo".

glio mostrare, le forme, sotto cui le leggi fisiche si presentano, ci guadagnano in comprensibilità. Soprattutto il concetto di *accelerazione* ottiene un tratto molto prominente.

Farò uso di un modo di esprimermi geometrico, che si presta subito allo scopo, se si omette tacitamente $z$ dalla tripla $x, y, z$. Penso ad un evento arbitrario $O$ dello spaziotempo come origine dello spazio e del tempo. Il *cono* $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ con $O$ come punta (Fig. 2) è fatto di due parti, una con valori $t > 0$ e l'altra con valori $t < 0$.

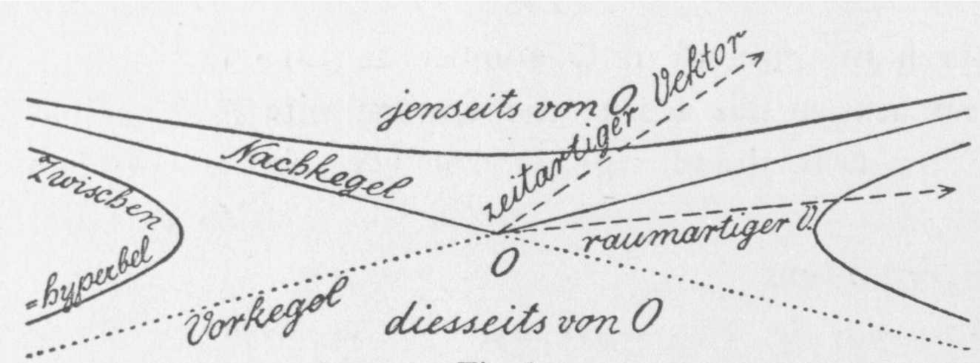

Fig. 2.

La prima, *il cono di luce passato di O* è formato,[10] per così dire, da tutti gli eventi che "mandano luce verso $O$", mentre il secondo, *il cono di luce futuro di* $O$,[11] è formato da tutti gli eventi che "ricevono luce da $O$". La regione limitata solamente dal cono di luce passato si chiami *passato assoluto di* $O$,[12] mentre quella limitata dal cono di luce futuro si chiami *futuro assoluto di* $O$.[13] Nel futuro assoluto di $O$ si trova il ramo di iperbole già considerato

$$F = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1 \;, \qquad t > 0 \;. \tag{7}$$

La regione *tra i coni* viene riempita dalla famiglia di iperboloidi a una falda

$$-F = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = k^2 \;, \tag{8}$$

per tutti i valori positivi costanti di $k^2$. Sono importanti per noi le iperboli con punto medio $O$, che possiedono quest'ultima forma.

I singoli rami di queste iperboli possono chiamarsi, per brevità, *infraiperboli con centro* $O$.[14] Un tale ramo di iperbole rappresenterebbe, se pensato come la

[10] NdT. *Vorkegel*, il "precono".
[11] NdT. *Nachkegel*, il "postcono".
[12] NdT. *diesseits von* $O$, "di qua di $O$".
[13] NdT. *jenseits von* $O$, "aldilà di $O$".
[14] NdT. Non sono al corrente di una nomenclatura specifica per queste iperboli e quindi ho tradotto letteralmente quella di Minkowski.

linea di universo di un punto sostanziale, il movimento la cui velocità tende per $t = -\infty$ e $t = +\infty$ alla velocità della luce $c$.

Se adesso chiamiamo *quadrivettore*,[15] in analogia al concetto di vettore nello spazio, un segmento con direzione nella varietà dei $x, y, z, t$, allora dobbiamo distinguere tra i quadrivettori *di tipo tempo*, con direzioni da $O$ verso il ramo di iperbole $+F = 1$, $t > 0$ e i quadrivettori *di tipo spazio*, con direzioni da $O$ verso $-F = 1$. L'asse temporale può correre parallelo a ogni vettore del primo tipo. Ogni evento tra il cono di luce passato e il cono di luce futuro di $O$ può diventare, attraverso una scelta opportuna del sistema di riferimento, *simultaneo* a $O$, ma anche *anteriore* o *posteriore* a $O$. Ogni evento nel passato assoluto di $O$ è sempre necessariamente anteriore a $O$, mentre ogni evento nel futuro assoluto di $O$ è sempre necessariamente posteriore. Il processo di limite a $c = \infty$ corrisponderebbe a una completa chiusura della porzione a forma di cuneo che si trova tra i due coni, nel piano $t = 0$ della varietà. Nelle figure, questa porzione è mostrata di proposito con varie aperture.

Scomponiamo un quadrivettore arbitrario da $O$ verso $x, y, z, t$ nelle quattro *componenti* $x, y, z, t$. Se le direzioni di due quadrivettori sono, nello specifico, quella di un quadrivettore raggio $OR$ da $O$ a una delle superfici $\mp F = 1$ e inoltre quella della tangente $RS$ nel punto $R$ della superficie incontrata, allora i due quadrivettori si diranno *normali* uno all'altro. Da qui si evince che

$$c^2 t t_1 - x x_1 - y y_1 - z z_1 = 0 \tag{9}$$

è la condizione per cui i quadrivettori con componenti $x, y, z, t$ e $x_1, y_1, z_1, t_1$ sono normali uno all'altro.

Per i *moduli* di quadrivettori di diverse direzioni le *unità di misura* devono essere prima fissate in modo che a un quadrivettore di tipo spazio da $O$ verso $-F = 1$ venga attribuito sempre modulo 1 e a un quadrivettore di tipo tempo da $O$ verso $+F = 1$, $t > 0$, venga attribuito sempre modulo $1/c$.

Immaginiamoci ora la linea di universo di un punto sostanziale che passi attraverso un evento $P(x, y, z, t)$; allora corrisponde all'elemento quadrivettoriale di tipo tempo nella direzione della linea il modulo

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}\,. \tag{10}$$

Chiamiamo l'integrale $\int d\tau = \tau$ di questo modulo sulla linea di universo, esteso da un qualunque punto iniziale $P_0$ fissato fino ad un punto finale arbitrario $P$, *tempo proprio* del punto sostanziale in $P$.

Consideriamo sulla linea di universo $x, y, z, t$, che sono le componenti del vettore $OP$, come funzioni del tempo proprio $\tau$, e denotiamo le derivate prime di queste rispetto a $\tau$ con $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$, le loro derivate seconde rispetto a $\tau$ con $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$, e chiamiamo i quadrivettori corrispondenti, ovvero la derivazione del vettore $OP$ rispetto a $\tau$, la *quadrivelocità in* $P$ e, la derivazione di questa quadrivelocità rispetto a $\tau$,

[15]NdT. Minkowski usa *Vektor*, cioè vettore, ma è comune oggi usare il prefisso "quadri-" per caratterizzare un vettore nello spaziotempo e distinguerlo così dai vettori usuali, a volte chiamati anche "trivettori", della meccanica non relativistica.

la *quadriaccelerazione in $P$*. Allora vale

$$c^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 = c^2 \ , \qquad (11)$$

$$c^2\dot{t}\ddot{t} - \dot{x}\ddot{x} - \dot{y}\ddot{y} - \dot{z}\ddot{z} = 0 \ , \qquad (12)$$

ovvero, la quadrivelocità è il quadrivettore di tipo tempo nella direzione della linea di universo in $P$ di modulo 1 e la quadriaccelerazione in $P$ è normale alla quadrivelocità in $P$, dunque in ogni caso un quadrivettore di tipo spazio.

Ora esiste, come si capisce facilmente, un certo ramo di iperbole che ha in comune con la linea di universo in $P$ tre punti infinitamente prossimi e i cui asintoti sono generatori di un cono di luce passato e di un cono di luce futuro (si veda in basso alla Fig. 3). Chiamiamo questa iperbole *iperbole di curvatura* in $P$. Se $M$ è il centro di questa iperbole, allora si tratta dunque qui di una infraiperbole di centro $M$. Sia $\varrho$ il modulo del quadrivettore $MP$, *riconosciamo così la quadriaccelerazione in $P$ come il quadrivettore nella direzione $MP$ di modulo $c^2/\varrho$.*

Se $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$ sono tutti zero, allora l'iperbole di curvatura si riduce alla retta tangente in $P$ alla linea di universo e bisogna porre $\varrho = \infty$.

# IV.

Per provare che l'assunzione del gruppo $G_c$ per le leggi fisiche non porta in nessun modo ad una contraddizione, è inevitabile l'intraprendere una revisione della Fisica intera sulla base dell'impiego di questo gruppo. Questa revisione è già riuscita, fino a un certo punto con successo, per questioni di termodinamica e irraggiamento del calore[16]), per processi elettromagnetici, e infine per la meccanica, sotto la validità del concetto di massa.[17])

Per l'ultima area bisogna sollevare soprattutto la questione: se una forza con componenti $X, Y, Z$ lungo gli assi spaziali agisce ad un evento $P(x, y, z, t)$, dove c'è la quadrivelocità $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$, sotto un arbitrario cambiamento del sistema di riferimento come quale tipo di forza bisogna interpretare quella? Ora, esistono certi approcci comprovati sulla forza ponderomotrice[18] nel campo elettromagnetico nei quali bisogna senza dubbio implementare il gruppo $G_c$. Questi approcci conducono alla semplice regola: *sotto un cambiamento del sistema di riferimento la forza esistente deve applicarsi nelle nuove coordinate spaziali in modo tale che il corrispondente quadrivettore con componenti*

$$\dot{t}X, \quad \dot{t}Y, \quad \dot{t}Z, \quad \dot{t}T \ , \qquad (13)$$

*dove*

$$T = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{x}}{\dot{t}}X + \frac{\dot{y}}{\dot{t}}Y + \frac{\dot{z}}{\dot{t}}Z\right) \qquad (14)$$

[16]M. Planck, Sulla dinamica di sistemi in movimento, Berliner Ber. 1907, p. 542 (anche in Ann. d. Phys. 26, 1908, p. 1).

[17]H. Minkowski, Le equazioni fondamentali per processi elettromagnetici in corpi in movimento, Göttinger Nachr. 1908, p. 53.

[18]NdT. Essenzialmente, qui, la forza di Lorentz.

*è il lavoro eseguito dalla forza, diviso per $c^2$, nell'evento, si mantiene invariato.* Questo quadrivettore è sempre normale alla quadrivelocità in $P$. Un tale quadrivettore di forza appartenente a una forza in $P$ si chiamerà *quadrivettore di forza motrice in $P$*.

Ora si descriva la linea di universo attraverso $P$ di un punto sostanziale con *massa meccanica $m$* costante. La quadrivelocità in $P$ moltiplicata per $m$ si chiami *quadrimomento in $P$* e la quadriaccelerazione in $P$ moltiplicata per $m$ si chiami *quadriforza in $P$*. Secondo queste definizioni la legge secondo cui avviene il movimento di un punto massivo sotto azione di un dato quadrivettore di forza motrice dice:[19])

*La quadriforza è uguale al quadrivettore di forza motrice.*

Questa affermazione riassume quattro equazioni per le componenti secondo i quattro assi, dove la quarta, dato che entrambi i suddetti quadrivettori sono normali alla quadrivelocità, si può vedere come conseguenza delle prime tre. Secondo l'espressione data sopra per $T$ la quarta equazione rappresenta indubbiamente la legge dell'energia. Come *energia cinetica* del punto massivo si deve quindi definire *la componente del quadrimomento secondo l'asse $t$ moltiplicata per $c^2$*. Da qui viene l'espressione

$$mc^2 \frac{dt}{d\tau} = mc^2 \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ , \tag{15}$$

che è, dopo aver rimosso la costante additiva $mc^2$, l'espressione $\frac{1}{2}mv^2$ della meccanica newtoniana, a meno di grandezze di ordine $1/c^2$. Appare qui molto evidente la *dipendenza dell'energia dal sistema di riferimento.* Ora, siccome l'asse $t$ può essere posto nella direzione di un qualunque quadrivettore di tipo tempo, la legge dell'energia contiene d'altra parte, per ogni possibile sistema di riferimento eretto, già il sistema completo delle equazioni di movimento. Questo fatto mantiene, nel processo al limite $c = \infty$ discusso, il suo significato anche per la costruzione assiomatica della meccanica newtoniana ed è in tal senso qui già stata notata dal Sig. J. R. Schütz[20]).

Si può sin dal principio scegliere la relazione tra unità di lunghezza e di tempo in modo tale che il limite naturale di velocità diventi $c = 1$. Introducendo quindi ancora $\sqrt{-1} \cdot t = s$ al posto di $t$, l'espressione differenziale quadratica diventa

$$d\tau^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - ds^2 \ , \tag{16}$$

dunque completamente simmetrica in $x, y, z, s$ e questa simmetria si traspone su ogni legge che non contraddica il postulato dello spaziotempo. Si può quindi vestire l'essenza di questo postulato in modo matematicamente molto significativo nella formula mistica:

$$3.10^5 \text{ km} = \sqrt{-1} \text{ s} \ . \tag{17}$$

# V.

[19]H. Minkowski, a. a. O p. **107**. — Si veda anche M. Planck, Verh. d. Physik. Ges. **4**, p. 136, **1906**.

[20]J. R. Schütz, Il principio della conservazione assoluta dell'energia. Göttinger Nachr. **1897**, p. 110.

I vantaggi che si ottengono col postulato dello spaziotempo diventano forse convincenti come non mai nel caso degli effetti descritti dalla teoria di Maxwell-Lorentz di una *carica puntiforme in movimento arbitrario.* Immaginiamoci la linea di universo di un tale elettrone puntiforme con carica $e$ e a partire da un qualunque punto iniziale introduciamo su di essa il tempo proprio $\tau$. Per avere il campo generato dall'elettrone in un evento arbitrario $P_1$, costruiamo il cono di luce futuro appartenente a $P_1$ (Fig. 4).

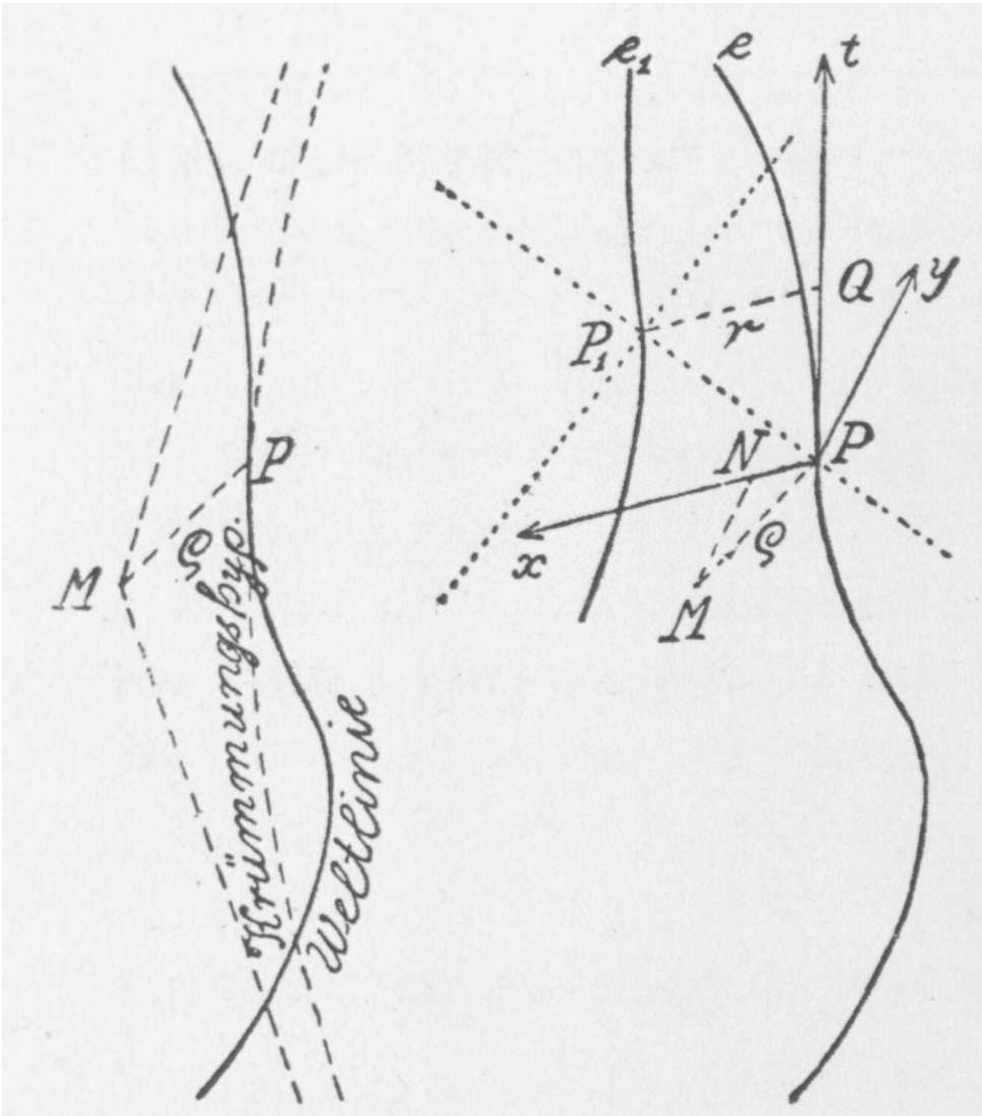


Fig. 3. Fig. 4.

Questo incontra la linea di universo dell'elettrone, illimitata, in un unico evento $P$, perché le direzioni di quella sono dappertutto quadrivettori di tipo tempo. Tracciamo in $P$ la tangente alla linea di universo e costruiamo attraverso $P_1$ la normale $P_1Q$ a questa tangente. Sia $r$ il modulo di $P_1Q$. Il modulo di $PQ$ è quindi

$r/c$, secondo la definizione di un cono di luce futuro. *Ora il quadrivettore con direzione $PQ$ di modulo $e/r$ presenta nelle sue componenti lungo gli assi $x, y, z$ il potenziale vettore moltiplicato per c, e nella componente lungo l'asse $t$ il potenziale scalare del campo generato da $e$ per l'evento $P_1$.* Qui si trovano le leggi elementari stabilite da A. Liénard e da E. Wiechert.[21])

Dalla descrizione del campo generato da un elettrone risulta quindi da sé che la separazione del campo in forza elettrica e magnetica è relativa, cioè dipende da come sia stato stabilito l'asse temporale; in modo più chiaro possibile bisogna descrivere entrambe le forze assieme, in una certa analogia, anche se non completa, con la teoria della torsione in meccanica.

Voglio ora descrivere l'*effetto poderomotore esercitato da una carica puntiforme in movimento arbitrario su di un'altra carica puntiforme in movimento arbitrario.* Immaginiamoci la linea di universo di un secondo elettrone puntiforme di carica $e_1$ passando attraverso l'evento $P_1$. Determiniamo $P, Q, r$ come prima, costruiamo quindi il punto medio dell'iperbole di curvatura in $P$ (Fig. 4), e infine la normale $MN$ da $M$ su di una retta immaginaria parallela a $QP_1$ passante per $P$. Impostiamo ora, con $P$ come origine, un sistema di riferimento della seguente forma, l'asse $t$ nella direzione $PQ$, l'asse $x$ nella direzione $QP_1$, l'asse $y$ nella direzione $MN$, per cui alla fine anche la direzione dell'asse $z$, come normale agli assi $t, x, y$, è determinata. La quadriaccelerazione in $P$ sia $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$, la quadrivelocità in $P_1$ sia $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{t}_1$. *Ora, il quadrivettore di forza motrice esercitata dal primo elettrone e in movimento arbitrario sul secondo elettrone $e_1$ in movimento arbitrario in $P_1$ si scrive:*

$$-ee_1\left(\dot{t}_1 - \frac{\dot{x}_1}{c}\right)\mathfrak{R}\,, \tag{18}$$

*dove per le componenti $\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_z, \mathfrak{R}_t$ del quadrivettore $\mathfrak{R}$ valgono le tre relazioni:*

$$c\mathfrak{R}_t - \mathfrak{R}_x = \frac{1}{r^2}\,, \qquad \mathfrak{R}_y = \frac{\ddot{y}}{c^2 r}\,, \qquad \mathfrak{R}_z = 0 \tag{19}$$

*e, come quarta, questo quadrivettore $\mathfrak{R}$ è normale alla quadrivelocità in $P_1$ e perciò ne dipende.*

Paragonando con questa affermazione le formulazioni correnti della propria legge elementare sull'effetto ponderomotore di cariche puntiforme in movimento le une sulle altre,[22] non si potrà fare a meno di ammettere che qui le relazioni prese in considerazione svelano la loro intima essenza in piena semplicità solo in quattro dimensioni, e gettano solamente una proiezione molto confusa su di uno spazio tridimensionale stabilito da principio.

Nella meccanica riformata secondo il postulato dello spaziotempo spariscono da sé le disarmonie che hanno creato scompiglio tra meccanica newtoniana ed elettrodinamica moderna. Voglio toccare ora ancora l'impiego della legge di attrazione newtoniana in relazione a questo postulato. Voglio supporre che, quando due masse puntiformi $m, m_1$ descrivono le loro linee di universo, venga esercitato da $m$ su di

[21] A. Liénard, Campo elettrico e magnetico prodotto da una carica concentrata in un punto e animata da un movimento arbitrario, L'Éclairage électrique **16** (1898), p. 5, 53, 106; Wiechert, leggi elementari elettrodinamiche, Arch. néerl. (2), 5, (1900), p. 549.

[22] K. Schwarzschild, Göttinger Nachr. 1903, p. 132. — H. A. Lorentz, Enzykl. d. math. Wissensch., Art. V, 14, p. 199.

$m_1$ un quadrivettore di forza motrice esattamente della stessa espressione di quello del caso sopra per gli elettroni, solo che invece di $-ee_1$ deve apparire ora $+mm_1$. Trattiamo, in particolare, il caso in cui la quadriaccelerazione di $m$ sia costante e nulla, cosicché sia possibile introdurre $t$ in modo tale che $m$ si consideri come a riposo e che quindi il movimento di $m_1$ avvenga solamente in presenza di quel quadrivettore di forza motrice derivante da $m$. Modifichiamo ora questo quadrivettore prima di tutto introducendo il fattore $\dot{t}^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, che a parte grandezze di ordine $1/c^2$ risulta essere 1, così si mostra[23]) che per le posizioni $x_1, y_1, z_1$ di $m_1$ e le loro evoluzioni temporali si ritroverebbero nuovamente esattamente le leggi di Keplero, solo che al posto dei tempi $t_1$ entrerebbero i tempi propri $\tau_1$ di $m_1$. Sulla base di questo semplice commento si può quindi capire che la legge di attrazione suggerita in combinazione con la nuova meccanica non è meno adatta a spiegare le osservazioni astronomiche della legge di attrazione di Newton legata con la meccanica newtoniana.

Anche le equazioni fondamentali per i processi elettromagnetici in corpi ponderabili si ottengono attraverso il postulato dello spaziotempo. Addirittura la erudita derivazione di Lorentz di queste equazioni sulla base dei presupposti della teoria dell'elettrone alla fine non ha alcun bisogno di essere abbandonata, come mostrerò altrove.

La ineccepibile validità del postulato dello spaziotempo è, così vorrei credere, il vero nocciolo di una concezione del mondo elettromagnetico, quello trovato da Lorentz, da Einstein ulteriormente sviluppato, fino a trovarsi allo stato attuale. Con la costruzione di ulteriori conseguenze matematiche verranno trovati abbastanza suggerimenti per verifiche sperimentali del postulato, affinché anche coloro per i quali un abbandono delle vecchie interpretazioni è antipatico o doloroso, si consolino con l'idea di una prestabilita armonia tra Matematica pura e Fisica.

[23]H. Minkowski, loc. cit., p. 110.