Introdução dos tradutores

Um dos resultados mais importantes da cosmologia moderna foi obtido no início dos anos 20, estabelecendo como as galáxias se afastam de nós, sendo a velocidade de afastamento proporcional à distância que elas se encontram de nós. Este resultado é crucial para a construção do atual modelo cosmológico padrão. Ele foi primeiramente obtido pelo físico (e padre) belga Georges Lemaître em um artigo publicado em 1927. Seria posteriormente reobtido pelo astrônomo americano Edwin Hubble. A lei que rege este comportamento é conhecida hoje como *lei de Hubble-Lemaître*. **O artigo original de Lemaître é frequentemente citado hoje, mas raramente reproduzido. Apresentamos abaixo o que é provavelmente a primeria tradução deste artigo para o português.**

Georges Lemaître nasceu em 1894 em Charleroi, Bélgica. Quando a Primeira Guerra Mundial eclode, em 1914, Lemaître tem 20 anos, sendo convocado, servindo na artilharia, e recebendo condecorações por bravura. Em 1920 se graduou em Física pela *Université Catholique de Louvain*. Três anos depois se ordenaria padre, mas continuaria a se dedicar à Física e Astronomia.

Em 1927 ele publica o artigo cuja tradução é apresentada a seguir, no qual ele formula a ideia de um universo em expansão obedecendo ao que é conhecido hoje como *Lei de Hubble-Lemaître*. Ela estabelece que a velocidade de recessão das galáxias é proporcional à distância em que se encontra a galáxia. A constante de proporcionalidade é H_0, a constante de Hubble. Matematicamente, esta lei se expressa sob a forma

$$v = H_0 r, \tag{1}$$

sendo v a velocidade de recessão da galáxia e r sua distância até nós. A velocidade de recessão é medida pelo efeito Doppler devido à expansão do universo (o que é bem claramente explicado no artigo de Lemaître) e r por algum indicador de distância como, por exemplo, pela medida do período de variação de luminosidade das estrelas Cefeidas observadas nesta galáxia.[1] Obviamente, H_0 tem dimensão de inverso do tempo, e no modelo cosmológico padrão a idade do universo T_0 pode ser estimada por $T_0 \sim 1/H_0$. Nesta forma, a lei de Hubble-Lemaître é válida para galáxias próximas à nossa, mas ela pode ser também extrapolada para galáxias distantes. A lei de Hubble-Lemaître é um dos pilares da cosmologia moderna, e uma expressão eloquente da expansão do universo.

Lemaître aplica também a lei de expansão do universo aos dados disponíveis na época encontrando um valor para a constante de Hubble de 625 km por segundo por Mpc (o valor moderno fica em torno de 70).[2] Esse resultado foi obtido com dois anos de antecedência (em 1927) em relação ao trabalho do astrônomo estadunidense **Edwin Hubble, publicado em 1929 onde é também é apresentada a relação entre a velocidade de recessão das galáxias e sua distância até**

[1] Sobre as estrelas Cefeidas como indicadores de distância, ver D.I. Machado, *Cadernos de Astronomia* **2**, 170 (2021)

[2] O Mpc, *megaparsec*, é uma unidade de medida das distâncias tipicamente usada em astrofísica e corresponde aproximadamente a 3 milhões de anos-luz.

nós.[3] Apesar disso, a famosa lei que descreve a expansão do universo carregou por muito tempo apenas o nome de Hubble. Somente em 2018 foi proposto de mudar o nome em lei de Hubble-Lemaître, com o fim de homenagear o trabalho do físico **belga. No entanto, H_0 continua sendo denominada de** *constante de Hubble***.**

Mas porque não foi imediatamente dado crédito ao trabalho do Lemaître e teve-se que esperar tanto anos **para o reconhecimento de sua contribuição fundamental para o estabelecimento da lei que descreve a recessão das galáxias**? Talvez pelo fato da revista onde o artigo foi publicado (*Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*) não ser de ampla circulação no meio da Física e Astronomia? **Possivelmente este é o motivo principal. No entanto, o fato do artigo ter sido publicado em francês pode também ter desempenhado um papel para que o artigo fosse pouco conhecido: mesmo que a ciência utilizasse na época com frequência outras línguas além do inglês, a astronomia era fortemente dominada naquele início do século XX por cientistas anglo-saxões e nem todos, provavelmente, tinham familiaridade com o francês.**

Vale ressaltar que uma tradução do trabalho para o inglês foi providenciada pelo próprio Lemaître em março 1931,[4] mas, por algum motivo, a parte contendo a estimativa da constante de Hubble foi omitida. O motivo não é claro, tendo-se até especulado que Lemaître considerou irrelevante estes parágrafos pois novos dados haviam aparecido na literatura, tornando obsoletas algumas estimativas feitas na versão em francês de 1927. Deve-se salientar, no entanto, que mesmo com a omissão destes parágrafos na tradução para o inglês, a lei que rege a relação entre velocidade de recessão e distância das galáxias está claramente formulada. A decisão da IAU de incluir o nome de Lemaître, ao lado do de Hubble, corrige uma evidente injustiça.

A tradução do artigo de 1927 que apresentamos mostra a profunda compreensão que Lemaître tinha da teoria da Relatividade Geral e dos problemas da Astronomia, tanto do ponto de vista teórico quanto observacional. Curiosamente, no entanto, ele não faz referência ao artigo de 1922 de Alexander Friedmann, o primeiro a propor o cenário de um universo em expansão.[5] Lemaître parece apresentar sua proposta de um cenário de universo com *raio* dependente do tempo, conciliando aspectos das soluções de Einstein (universo estático) e de de Sitter (universo vazio, mas com constante cosmológica, em expansão) como uma novidade. O motivo desta omissão é pouco claro, já que Friedmann publicou seu artigo, em alemão, em uma das principais revistas da época, *Zeitschrift der Physik*.

Além do artigo traduzido a seguir, as contribuições científicas de Lemaître foram muitas. Ele formularia a proposta que o universo se iniciaria de um *átomo primitivo*, cuja desintegração geraria a expansão do universo. O artigo contendo essa proposta foi traduzido e comentado em edição anterior dos Cadernos de As-

[3] E. Hubble, *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*, Proc. Nat. Acad. Sci. **15** (1929), 168-173.

[4] G. Lemaitre, *A Homogeneous Universe of Constant Mass and Increasing Radius accounting for the Radial Velocity of Extra-galactic Nebulæ*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **91** (1931) no.5, 483-490

[5] Ver tradução e comentários em H. Velten e W. Zimdahl, *Cadernos de Astronomia*, **3**, 151 (2022).

tronomia.[6]

Lemaître também abordaria a questão dos buracos negros, tendo sido um dos primeiros a perceber as sutilezas da solução de Schwarzschild. Ainda na década de 30, ele alertou para a necessidade de se introduzir a constante cosmológica nas equações cosmológicas de maneira a evitar o cenário onde o universo seria mais jovem que alguns dos seus constituintes, como aglomerados globulares, em especial. Ele também abordou o problema do colapso gravitacional gerando objetos compactos relativistas.

Lemaître faleceu em 1966. O principal da sua contribuição científica foi feito antes da Segunda Guerra Mundial, mas ele permaneceu cientificamente ativo até o final de sua vida.

Júlio C. Fabris
Oliver F. Piattella

[6] F.T. Falciano e J.C. Fabris, *Cadernos de Astronomia* **4**, 165 (2023).

Um universo homogêneo de massa constante e raio crescente, explicando a velocidade radial das nebulosas extra-galácticas**

Nota do Sr. Abbé G. Lemaître

1 Generalidades.

A teoria da Relatividade Geral prevê a existência de um universo homogêneo onde não somente a distribuição de matéria é uniforme, mas também todas as posições no espaço são equivalentes: não existe um centro de gravidade. O raio R do espaço é constante, o espaço é elíptico de curvatura positiva uniforme $1/R^2$, as retas saindo de um mesmo ponto passam novamente pelo ponto de partida depois de um percurso igual a πR, o volume total do espaço é finito e igual a $\pi^2 R^3$,[1] as retas são linhas fechadas que percorrem o espaço todo sem encontrar fronteiras.[2]

Duas soluções têm sido propostas. Aquela de DE SITTER ignora a presença da matéria e supõe sua densidade ser nula. Essa solução conduz a algumas dificuldades de interpretação sobre as quais teremos ocasião de retornar, mas seu grande interesse é de explicar o fato que as nebulosas extra-galácticas parecem fugir de nós com uma velocidade enorme, como uma simples consequência das propriedades do campo de gravitação, sem supor que nós nos encontramos num ponto do universo dotado de propriedades especiais.

A outra solução é a de EINSTEIN. Essa leva em conta o fato evidente de que a densidade da matéria não é nula e ela conduz a uma relação entre esta densidade e o raio do universo. Esta relação prediz a existência de massas enormemente maiores de todas as conhecidas, uma vez que tem sido comparada pela primeira vez com as observações. Estas massas foram descobertas depois que as distâncias e as

**Título original: *Un universe homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale de nébuleuses extra-galactiques.* Publicado em: *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, A47, p. 49-59.* Traduzido por Júlio C. Fabris e Oliver F. Piattella.

[1] [N.d.T] Esse valor do volume poderia criar confusão, então vale a pena incluir aqui uma pequena explicação. Sabe-se que num espaço euclidiano em 3 dimensões, a área de uma superfície esférica bidimensional de raio R é de $4\pi R^2$ e o volume contido nela é de $4\pi R^3/3$. Porém, num espaço euclidiano em 4 dimensões uma superfície esférica de raio R é *tri*dimensional, sua área é $2\pi^2 R^3$ e o volume contido nela é $\pi^2 R^4/2$. O espaço-tempo tem 4 dimensões, mas não é euclidiano. Apesar disso, podemos mesmo assim usar o valor $2\pi^2 R^3$ para a superfície esférica tridimensional. Por fim, Lemaître usa o valor $\pi^2 R^3$ ao invés de $2\pi^2 R^3$, pois usa uma geometria elíptica em que os pontos antipodais são identificados (como ele mesmo especifica na nota de rodapé) e chama esse valor de volume, e não de área, pois é proporcional a R^3.

[2] Consideramos o espaço simplesmente elíptico, ou seja, sem antípodas.

dimensões das nebulosas extra-galácticas puderam ser estabelecidas. O raio do universo calculado a partir da fórmula de Einstein é, segundo dados recentes, algumas centenas de vezes maior que a distância dos objetos mais longínquos fotografados pelos nossos telescópios.[3]

As duas soluções possuem então suas vantagens. Uma está de acordo com a observação das velocidades radiais das nebulosas, a outra toma em conta a presença da matéria e fornece uma relação satisfatória entre o raio do universo e a massa que ele contém. Parece desejável obter uma solução intermediária que poderia combinar as vantagens de cada uma delas.

A primeira vista, tal solução intermediária não existe. Um campo de gravitação estático e com simetria esférica só admite duas soluções, a de Einstein e a de de Sitter, isto para o caso em que a matéria seja homogeneamente distribuída e não esteja submetida a nenhuma pressão ou tensão interna. O universo de de Sitter é vazio, e o de Einstein, de sua parte, pode conter tanta matéria quanto se queira. É surpreendente que a teoria não possa fornecer nenhuma configuração intermediária entre estes dois extremos.

O paradoxo pode ser compreendido quando se considera que a solução de de Sitter não responde a todas as necessidades do problema.[4] O espaço é homogêneo, de curvatura positiva constante; o espaço-tempo é também homogêneo, todos os pontos são perfeitamente equivalentes; mas a divisão em espaço e tempo não respeita mais a homogeneidade. As coordenadas escolhidas correspondem a um centro sem equivalente na realidade. Um ponto imóvel no centro descreve uma geodésica do universo, enquanto um ponto imóvel em qualquer outro lugar não descreve uma geodésica do universo. A escolha do sistema de coordenadas destrói a homogeneidade que existia na formulação do problema e daí surgem os resultados paradoxais que aparecem no "horizonte" do centro. Quando se introduz coordenadas e uma divisão correspondente do espaço e do tempo respeitando a homogeneidade do universo, encontra-se que o campo gravitacional não é mais estático. Obtém-se um universo semelhante ao de Einstein mas onde o raio espacial em vez de permanecer

[3]E. P. Hubble, *Extragalactic nebulae*, Astrophys. J. **64** (1926), 321-369.

[4]Cf. K. Lanczos, *Bermekung zur de Sitterschen Welt, Phys. Zeitschr.* **23** *539 (1922)* e H. Weyl, *Zur allgemeinen Relativitätstheorie, Id* **24**, *230(1923).* Nós seguimos aqui o ponto de vista de Lanczos. As linhas de universo das nebulosas formam um feixe de centro ideal e de hiperplano axial real. O espaço normal a estas linhas de universo é formado por hiperesferas equidistantes ao plano axial. Este espaço é elíptico, seu raio variável sendo mínimo no instante correspondente ao plano axial. Na hipótese de Weyl, as linhas de universo são paralelas no passado; as hipersuperfícies normais representando o espaço são horosferas, e a geometria do espaço é, então, euclideana. A distância entre as nebulosas aumenta à medida que as geodésicas paralelas que elas descrevem se afastam umas das outras proporcionalmente a e^{tR}, onde t é o tempo próprio e R o raio do universo. O efeito Doppler é igual a r/R, onde r é a distância à fonte no instante de observação. Cf. G. Lemaître, *Note on de Sitter's universe, Journal of mathematics and physics,* **4**, *número 3, maio de 1925* ou *Publications du Laboratoire dde Astronomie et Géodésie de l'Université de Louvain,* **2**, *37 (1925).* Para a discussão da divisão de de Sitter, ver P. du Val, *Geometrical note on de Sitter's world,* **2**, *Phil. Magn. (6)* **47**, *930 (1924).* O espaço é formado de hiperplanos normais a uma reta temporal descrita pelo centro introduzido, as trajetórias das nebulosas são ortogonais a estes planos, elas não são mais geralmente geodésicas e elas tendem a se tornar linhas de comprimento nulo assim que elas se aproximam do horizonte do centro, quer dizer, do hiperplano polar do eixo central em relação ao absoluto.

invariável, varia com o tempo segundo uma lei particular.[5]

Para encontrar uma solução que apresenta simultaneamente as vantagens da de Einstein e da de de Sitter, nós somos levados a estudar um universo de Einstein no qual o raio espacial varia de uma dada maneira.[6]

2 Universo de Einstein com raio variável. Equações de campo da gravitação. Conservação da energia.

Exatamente como feito na solução de Einstein nós consideramos o universo como um gás muito rarefeito do qual as nebulosas extra-galácticas formam as moléculas; suponhamos estas serem suficientemente numerosas para que um volume pequeno em relação às dimensões do universo contenha bastantes nebulosas para que possamos falar de densidade da matéria. Ignoramos a possível influência de condensações locais. Além disso, suponhamos que a repartição das nebulosas seja uniforme e então que a densidade seja independente da posição.

Para uma variação arbitrária do raio do universo a densidade, uniforme no espaço, varia no tempo. Além disso, a matéria é, em geral, submetida a umas tensões que, por causa da homogeneidade, se reduzem a uma simples pressão uniforme no espaço e variável no tempo. A pressão é igual a dois terços da energia cinética das moléculas, ela é negligenciável frente à energia condensada na matéria, o mesmo vale para as pressões internas das nebulosas ou das estrelas que estas contém; somos então levados a supor $p = 0$. Pode ser que seja necessário tomar em conta a pressão da radiação da energia irradiada circulante no espaço; esta energia é muito fraca, mas ela é repartida em todo o espaço e pode ser que forneça uma contribuição importante para a energia média. Manteremos o termo p nas equações gerais, interpretando-o como a pressão média de radiação da luz, mas imporemos $p = 0$ quando chegaremos à aplicação aos fenômenos astronômicos.

Indicamos com ρ a densidade de energia total, a densidade de energia irradiante será $3p$ e a densidade da energia concentrada na matéria é $\delta = \rho - 3p$.

É necessário identificar ρ e $-p$ com as componentes T_4^4 e $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$ do tensor da energia material e δ com T. Calculemos as componentes do tensor de

[5]Se nos limitarmos a duas dimensões, uma espacial e outra temporal, a divisão do espaço e tempo utilizada por de Sitter pode ser representada sobre uma esfera: as linhas espaciais são dadas pelos grande círculos que se cruzam em um mesmo diâmetro e as linhas temporais são paralelas que cortam perpendicularmente as linhas espaciais. Uma destas paralelas é um grande círculo e, portanto, uma geodésica, correspondendo ao centro espacial, ao passo que o polo deste grande círculo é um ponto singular correspondendo ao horizonte do centro. Esta representação deve, é claro, ser estendida a quatro dimensões e a coordenada temporal deve ser suposta imaginária, mas a ausência de homogeneidade resultante da escolha do sistema de coordenadas subsiste. As coordenadas respeitando a homogeneidade implicam usar como linhas temporais um sistema de meridianos e por linhas espaciais as paralelas correspondentes, e o raio do espaço varia com o tempo.

[6][N.d.T.] Isso já tinha sido feito pelo Friedmann em 1922.

Riemann contraído[7] para um universo de intervalo:[8]

$$ds^2 = -R^2 d\sigma^2 + dt^2 \tag{2}$$

$d\sigma$ é o elemento de comprimento de um espaço de raio igual a um; o raio R do espaço é uma função do tempo. As equações de campo da gravitação se escrevem:

$$3\frac{R'^2}{R^2} + \frac{3}{R^2} = \lambda + \kappa\rho \tag{3}$$

e

$$2\frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} = \lambda - \kappa p \tag{4}$$

As linhas indicam as derivadas com relação a t; λ é a constante cosmológica cujo valor é desconhecido e κ é a constante de Einstein, igual a $1,87 \times 10^{-27}$, em unidades C.G.S. (8π em unidades naturais).

As quatro identidades que expressam a conservação do momento e da energia se reduzem aqui a:

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3R'}{R}(\rho + p) = 0 \tag{5}$$

que exprime a conservação da energia. Esta equação pode então substituir a (3). Ela é suscetível de uma interpretação interessante. Introduzindo o volume do espaço $V = \pi^2 R^3$, ela pode se escrever:

$$d(V\rho) + pdV = 0 \tag{6}$$

e ela exprime que *a variação da energia total mais o trabalho efetuado pela pressão de radiação é igual a zero.*

3 Situação em que a massa total do universo permanece constante.

Procuremos uma solução para que a massa total $M = V\delta$ permaneça constante. Poderemos então colocar

$$\kappa\delta = \frac{\alpha}{R^3} \tag{7}$$

onde α é uma constante.[9] Tomando em conta a relação

$$\rho = \delta + 3p$$

[7] [N.d.T.] Este é o tensor di Ricci.

[8] [N.d.T.] O intervalo espaço-temporal, ou seja, a métrica.

[9] [N.d.T.] No trabalho do Lemaître tem-se α/R ao invés de α/R^3, mas isso deve ser um erro de digitação. As fórmulas que seguem são condizentes com a equação (6). Note-se que, nas unidades $c = 1$ que estão sendo usadas, $\kappa\delta$ tem dimensões do inverso de um comprimento ao quadrado e então α tem dimensões de um comprimento.

que existe entre as diversas formas de energia, o princípio de conservação da energia se torna:

$$3d(pR^3) + 3pR^2dR = 0 \tag{8}$$

cuja integração é imediata; chamando de β uma constante de integração, temos

$$\kappa p = \frac{\beta}{R^4} \tag{9}$$

e então

$$\kappa\rho = \frac{\alpha}{R^3} + \frac{3\beta}{R^4} \tag{10}$$

Substituindo na (2), temos que integrar

$$\frac{R'^2}{R^2} = \frac{\lambda}{3} - \frac{1}{R^2} + \frac{\kappa\rho}{3} = \frac{\lambda}{3} - \frac{1}{R^2} + \frac{\alpha}{3R^3} + \frac{\beta}{R^4} \tag{11}$$

ou

$$t = \int \frac{dR}{\sqrt{\frac{\lambda R^2}{3} - 1 + \frac{\alpha}{3R} + \frac{\beta}{R^2}}} \tag{12}$$

Para α e β iguais a zero encontramos a solução de de Sitter[10]

$$R = \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \cosh \frac{\lambda}{3}(t - t_0) \tag{13}$$

A solução de Einstein obtém-se colocando $\beta = 0$ e R constante. Colocando $R' = R'' = 0$ na (2) e na (3) tem-se

$$\frac{1}{R^2} = \lambda \qquad \frac{3}{R^2} = \lambda + \kappa\rho \qquad \rho = \delta$$

então

$$R = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \qquad \kappa\delta = \frac{2}{R^2} \tag{14}$$

e pela (6)

$$\alpha = \kappa\delta R^3 = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \tag{15}$$

A solução de Einstein não resulta da relação (14) sozinha, além dessa é necessário que a condição inicial sobre R' seja nula. De fato, escrevendo

$$\lambda = \frac{1}{R_0^2} \tag{16}$$

[10]Cfr. LANCZOS, l. c.

para simplificar a notação e colocando na (11) $\beta = 0$ e $\alpha = 2R_0$, tem-se

$$t = R_0\sqrt{3}\int \frac{dR}{R - R_0}\sqrt{\frac{R}{R + 2R_0}} \tag{17}$$

Para esta solução as duas equações (13) não serão naturalmente mais verificadas.[11] Se escrevemos

$$\kappa\delta = \frac{2}{R_E^2} \tag{18}$$

teremos da (14) e da (15)

$$R^3 = R_E^2 R_0 \tag{19}$$

O valor de R_E, o raio do universo deduzido pela densidade média por meio da fórmula de Einstein (17), tem sido estimado por Hubble como sendo

$$R_E = 8,5 \times 10^{28}\,\mathrm{cm} = 2,7 \times 10^{10}\,\mathrm{parsecs} \tag{20}$$

Vamos ver que o valor de R_0 pode ser deduzido da velocidade radial das nebulosas; R poderá então ser calculado através da fórmula (18). Mostraremos em seguida que uma solução que introduza uma relação sensivelmente diferente da (14) conduzirá a consequências dificilmente admissíveis.

4 Efeito Doppler devido à variação do raio do universo.

A partir da fórmula (2) do intervalo do universo, a equação do raio luminoso é

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{R} \tag{21}$$

onde σ_1 e σ_2 são os valores da coordenada caracterizando a posição espacial. Nós podemos falar do ponto σ_2 como a localização do observador e de σ_1 como a localização da fonte.

Um raio de luz emitido um pouco mais tarde partirá de σ_1 no tempo $t_1 + \delta t_1$ e chegará em σ_2 no tempo $t_2 + \delta t_2$. Temos então,

$$\frac{\delta t_2}{R_2} - \frac{\delta t_1}{R_1} = 0, \quad \frac{\delta t_2}{\delta t_1} - 1 = \frac{R_2}{R_1} - 1 \tag{22}$$

onde R_1 e R_2 designam respectivamente os valores de R nos tempos δt_1 e δt_2. t é o tempo próprio. Se δt_1 é o período da radiação emitida, δt_2 é o período da radiação recebida, δt_1 pode ser considerada como o período da luz emitida nas mesmas condições que na vizinhança do observador. Com efeito, o período da luz emitida

[11] [N.d.T.] Isso porque a solução de Einstein é instável. Podemos supor λ e δ serem na correta proporção como feito pelo Lemaître, mas se R' não é nulo então haverá uma evolução.

em condições físicas similares deve ser o mesmo em todos os lugares quando ela é expressa em tempo próprio. A relação

$$\frac{v}{c} = \frac{\delta t_2}{\delta t_1} - 1 = \frac{R_2}{R_1} - 1 \tag{23}$$

mede o efeito Doppler aparente devido à variação do raio do universo. *Ela é igual ao excesso em relação à unidade da relação dos raios do universo no instante em que a luz foi recebida e o instante em que ela foi emitida.* v é a velocidade do observador produzindo o mesmo efeito. Quando a fonte está suficientemente próxima, podemos escrever aproximadamente,

$$\frac{v}{c} = \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{dR}{R} = \frac{R'}{R}dt = \frac{R'}{R}r, \tag{24}$$

onde r é a distância da fonte. Temos então,[12]

$$\frac{R'}{R} = \frac{v}{cr}. \tag{25}$$

As velocidades radiais de 43 nebulosas extra-galáticas foram dadas por Strömberg.[13]

A grandeza aparente m dessas nebulosas se encontra no trabalho de Hubble. É possível deduzir suas distâncias, pois Hubble mostrou que as nebulosas extra-galáticas possuem magnitude absoluta aproximadamente iguais (magnitude $-15,2$ a 10 parsecs, os desvios individuais podendo atingir duas magnitudes para mais ou para menos), a distância r expressa em parsecs é então dada pela fórmula $\log r = 0,2m + 4,04$.

Encontra-se uma distância da ordem de 10^6 parsecs, variando de alguns décimos a 3,3 milhões de parsecs. O erro provável resultando da dispersão na magnitude absoluta é considerável. Para uma diferença de magnitude absoluta de duas magnitudes para mais ou para menos, a distância passa de 0,4 a 2,5 vezes a distância calculada. Além do mais, o erro que podemos cometer é proporcional à distância. Pode-se admitir que para uma distância de um milhão de parsecs, o erro resultante da dispersão em magnitude é da mesma ordem que o resultante na velocidade. Com efeito, uma diferença de brilho de uma magnitude corresponde a uma velocidade própria de 300 km, igual à velocidade própria do Sol em relação às nebulosas. Pode-se esperar de evitar um erro sistemático dando às observações um peso proporcional a $\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$ onde r é a distância em milhões de parsecs.

Utilizando as 42 nebulosas figurando nas listas de Hubble e de Strömberg,[14] e levando em conta a velocidade própria do Sol (300 km na direção $\alpha = 315^o, \delta = 62^o$), encontra-se uma distância média de 0,95 milhões de parsecs e uma velocidade

[12] [N.d.T.] Os parágrafos que seguem a equação, até a próxima nota de rodapé, não foram traduzidos para o inglês no artigo de 1931 em MNRAS.

[13] *Analysis of radial velocities of globular clusters and non galactic nebula*, Ap. J. **353**, 353. Mt Wilson Contr. 292.

[14] Não se leva em conta a NGC 5194 que é associada à NGC 5195. A introdução das nuvens de Magalhães não tem influência nestes resultados.

radial de 600 km/s, equivalente a 625 km/s a 10^6 parsecs.[15]

Nós adotamos então,[16]

$$\frac{R'}{R} = \frac{v}{rc} = \frac{625 \times 10^5}{10^6 \times 3,08 \times 10^{18} \times 3 \times 10^{10}} = 0,68 \times 10^{-27}\mathrm{cm}^{-1} \tag{26}$$

Esta relação nos permite calcular R_0. Temos, com efeito, usando (16),

$$\frac{R'}{R} = \frac{1}{R_0\sqrt{3}}\sqrt{1 - 3y^2 + 2y^3} \tag{27}$$

onde definimos,

$$y = \frac{R_0}{R}. \tag{28}$$

Por outro lado, a partir de (18) e (26)

$$R_0^2 = R_E^2 y^3 \tag{29}$$

resultando em,

$$3\left(\frac{R'}{R}\right)^2 R_E^2 = \frac{1 - 3y^2 + 2y^3}{y^3} \tag{30}$$

Introduzindo os valores numéricos de $\frac{R'}{R}$ (24) e de R_E (19), obtém-se:

$$y = 0,0465 \tag{31}$$

Tem-se então:

$$\begin{aligned} R &= R_E\sqrt{y} = 0,215 R_E = 1,83 \times 10^{28}\mathrm{cm} = 6 \times 10^9 && (32)\\ R_0 &= Ry = R_E y^{\frac{3}{2}} = 8,5 \times 10^{26}\mathrm{cm} = 2,7 \times 10^8 \mathrm{parsecs} && (33)\\ &= 9 \times 10^8 \text{anos-luzes.} && (34) \end{aligned}$$

A integral (16) se calcula facilmente. Definindo

$$x^2 = \frac{R}{R + 2R_0} \tag{35}$$

[15]Não se dando peso às observações, encontraríamos 670 km/s a $1,16 \times 10^6$ parsecs, 575 km/s a 10^6 parsecs. Alguns autores procuraram colocar em evidência a relação entre v e r e obtiveram apenas uma correlação muito fraca entre estas grandezas. O erro na determinação das distâncias individuais é da mesma ordem de grandeza que o intervalo que cobre as observações e a velocidade própria das nebulosas (em todas as direções) é grande (300 km/s, segundo Strömberg, parece então que estes resultados negativos não sejam nem favoráveis nem desfavoráveis à interpretação relativista do efeito Doppler. Tudo que a imprecisão das observações permite fazer é supor v proporcional a r e tentar evitar um erro sistemático na determinação da relação v/r. Cf. LUNDMARK, *The determination of the curvature of space-time in de Sitter world*, M.N. **84**, 747(1924), e Strömberg, l.c.

[16][N.d.T.] A partir deste paragrafo a tradução no artigo de 1931 volta a ser fiel.

ela se escreve

$$t = R_0\sqrt{3}\int \frac{4x^2dx}{(1-x^2)(3x^2-1)} = R_0\sqrt{3}\ln\frac{1+x}{1-x} + R_0\ln\frac{\sqrt{3}x-1}{\sqrt{3}x+1} + C. \qquad (36)$$

Se nós designamos por σ a fração do raio do universo percorrida pela luz no tempo t, temos também usando (20),

$$\sigma = \int \frac{t}{R} = \sqrt{3}\int \frac{2dx}{3x^1 - 1 = \ln\frac{\sqrt{3}x-1}{\sqrt{3}+1}} + C\,. \qquad (37)$$

Apresentamos embaixo uma tabela de σ e t em função de $\dfrac{R}{R_0}$.

$\frac{R}{R_0}$	$\frac{t}{R_0}$	σ (radianos)	σ (graus)	$\frac{v}{c}$
1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	19
2	$-4,31$	$-0,889$	-51^o	9
3	$-3,42$	$-0,521$	-30^o	5
4	$-2,86$	$-0,359$	-21^o	4
5	$-2,45$	$-0,266$	-15^o	3
10	$-1,21$	$-0,087$	-5^o	1
15	$-0,50$	$-0,029$	-1^o7	$\frac{1}{3}$
20	0	0	0^o	0
25	$-0,39$	$-0,017$	1^o	
∞	∞	$0,087$	5^o	

As constantes de integração são escolhidas de tal forma que σ e t são nulos para $\dfrac{R}{R_0} = 20$ em vez de $21,5$. A última coluna fornece o efeito Doppler calculado pela fórmula (22). A partir da fórmula aproximada (23) $\dfrac{v}{r}$ seria proporcional a r e, consequentemente, a σ. O erro cometido adotando esta equação é de cinco milésimos para $\dfrac{v}{c} = 1$. Ela pode ser empregada na medida que o espectro permaneça visível.

5 Significado da relação (14)

Nós introduzimos a relação (1) entre as constantes α e λ a partir da solução de Einstein. Esta relação é a condição para que a expressão sob o radical do denominador da integral (11) admita uma raiz dupla R_0 dando por integração um termo logarítmico. Para raízes simples, obteríamos por integração uma raiz quadrada e o valor de R correspondente seria um mínimo como na solução (12) de de Sitter. Este mínimo ocorreria geralmente em uma época da ordem de R_0, logo 10^9 de anos, quer dizer, a uma época recente da escala da evolução estelar. Parece, então, que a relação existente entre as constantes α e λ deve ser próxima de (14) para a qual este mínimo é transferido a menos infinito.[17]

[17]Se as raízes positivas se tornam imaginárias, o raio variaria a partir do zero sendo a variação diminuída na vizinhança do módulo das raízes imaginarias. Para uma relação sensivelmente diferente da (14), essa diminuição seria pequena e a duração da evolução a partir de $R = 0$ seria de novo da ordem de R_0.

6 Conclusões

Obtivemos uma solução que verifica as seguintes condições:

1. A massa do universo é constante e está relacionada com a constante cosmológica pela relação de Einstein,

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2\pi^2}{\kappa M} = \frac{1}{R_0}. \tag{38}$$

2. O raio do universo cresce continuamente a partir de um valor assintótico R_0 para $t = -\infty$.

3. O afastamento das nebulosas extra-galácticas é um efeito cósmico devido à expansão do espaço e que permite calcular o raio R_0 pelas fórmulas (24) e (25) ou aproximativamente por $R_0 = \dfrac{rc}{v\sqrt{3}}$.

4. O raio do universo é da mesma ordem de grandeza que o raio R_E deduzido da densidade pela fórmula de Einstein. Temos

$$R = R_E \sqrt[3]{\frac{R_0}{R_E}} = \frac{1}{5} R_E \tag{39}$$

Esta dedução concilia as vantagens das soluções de de Sitter e de Einstein.

Observamos que a maior parte do universo está para sempre além de nosso alcance. O alcance do grande telescópio de Monte Wilson é estimado por Hubble a 5×10^7 parsecs, ou seja $\dfrac{R}{120}$, e o efeito Doppler correspondente é já de 3.000 km/s. Paera uma distância de $0,087R$, ele é igual a um, e toda a luz visível é projetada no infravermelho. É impossível que se formem imagens fantasmas das nebulosas ou dos sóis pois, mesmo se nenhuma absorção ocorra, estas imagens seriam deslocadas de muitas oitavas no infravermelho e não poderiam ser observadas.

É preciso conhecer a causa da expansão do universo. Nós vimos que a pressão de radiação realiza trabalho durante a expansão. Isto parece sugerir que esta expansão é produzida pela própria radiação. Em um universo estático a luz emitida pela matéria percorre o espaço fechado, retorna ao seu ponto de partida e se acumula continuamente. Parece que aí deve ser buscada a origem da velocidade de expansão R'/R que Einstein supunha nula e que, na nossa interpretação, é observada como velocidade radial das nebulosas extra-galácticas.