

Aula 2: Cosmologia Relativística

Primeira Escola de Ciências Física Brasil-Cabo Verde
3-13 de abril 2017

Oliver F. Piattella
Universidade Federal do Espírito Santo
Vitória, Brasil



UFES



*Conselho Nacional de Desenvolvimento
Científico e Tecnológico*

Abordagem matemática à Cosmologia

Qual interação fundamental determina as propriedades do Universo em grande escala?

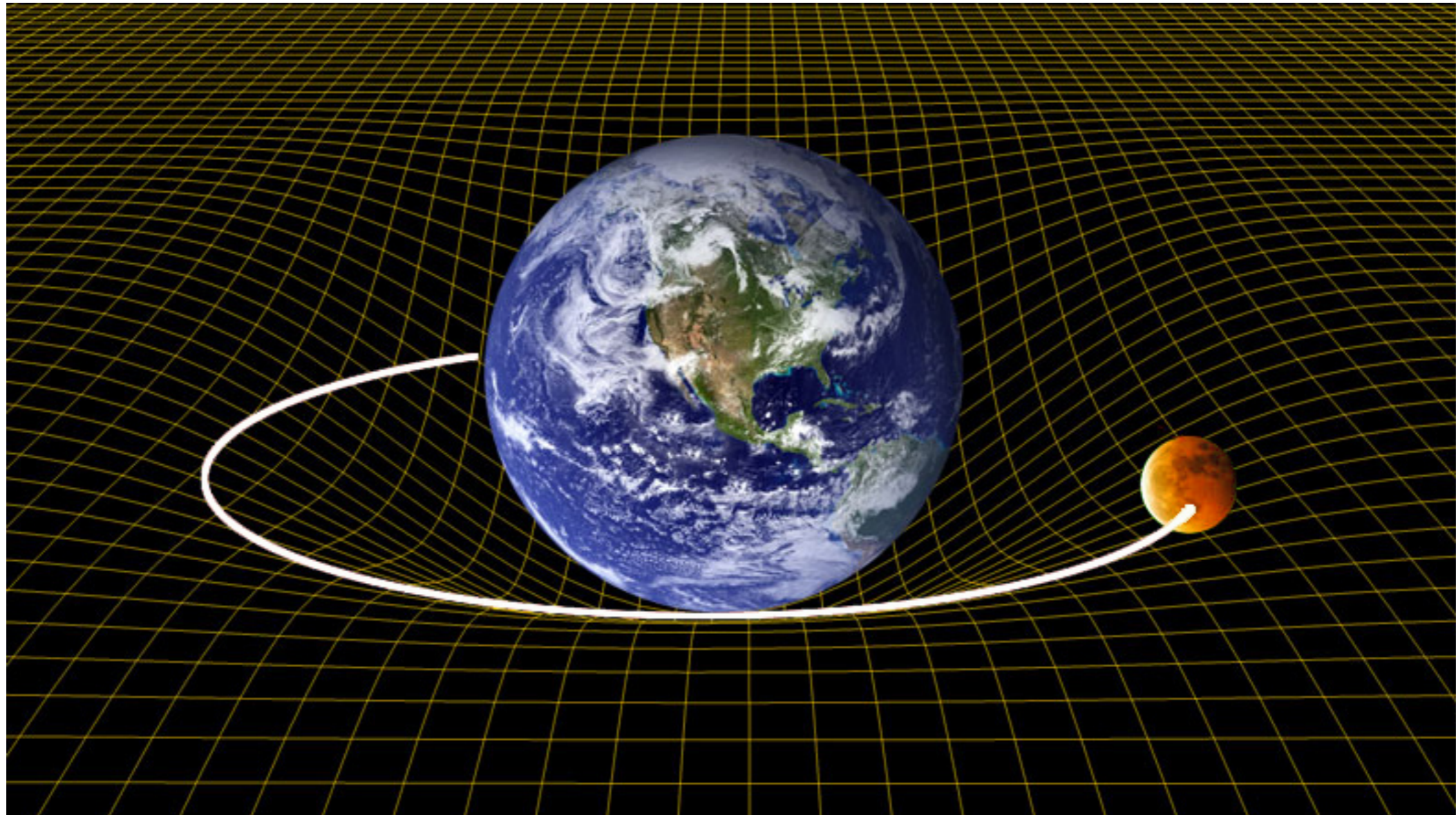
- Interação forte
- Interação fraca
- Interação eletromagnética
- Interação gravitacional



Relatividade Geral e Gravitação

- Relatividade Geral -> Espaço-Tempo como objeto dinâmico curvado pela matéria
- *“Matter tells space how to curve; space tells matter how to move”* (John A. Wheeler)
- Gravidade: Movimento livre (não acelerado) no espaço-tempo curvo (conceito de geodésica)
- Métrica -> Potencial gravitacional
- Força -> Derivadas da métrica -> Conexão de Levi-Civita

Relatividade Geral



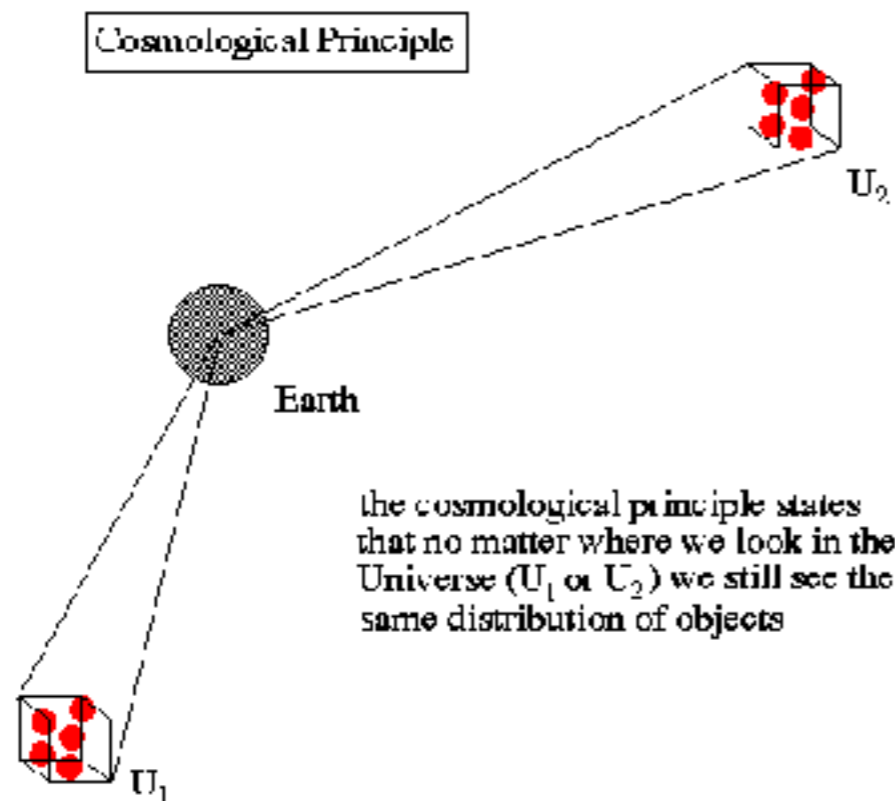
Como aplicamos Relatividade Geral à Cosmologia?

Equações de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

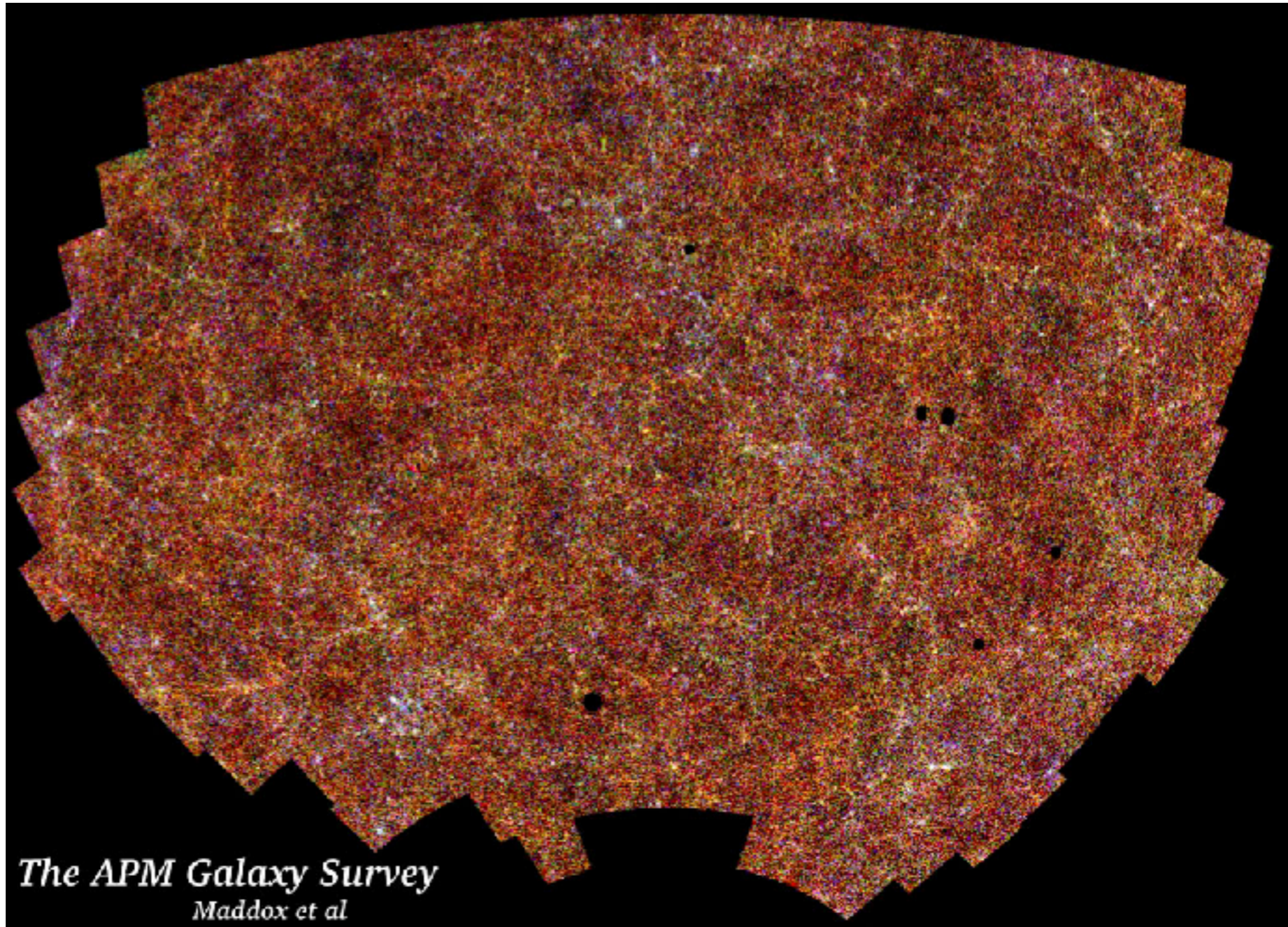
- Relatividade Geral em Cosmologia -> Cosmologia Relativística
- Qual é a métrica do Universo? (Precisamos dela para calcular o tensor de Einstein)
- Qual é o conteúdo material do Universo? (De que é feito o Universo? Precisamos saber disto para calcular o tensor energia-momento)

O princípio cosmológico



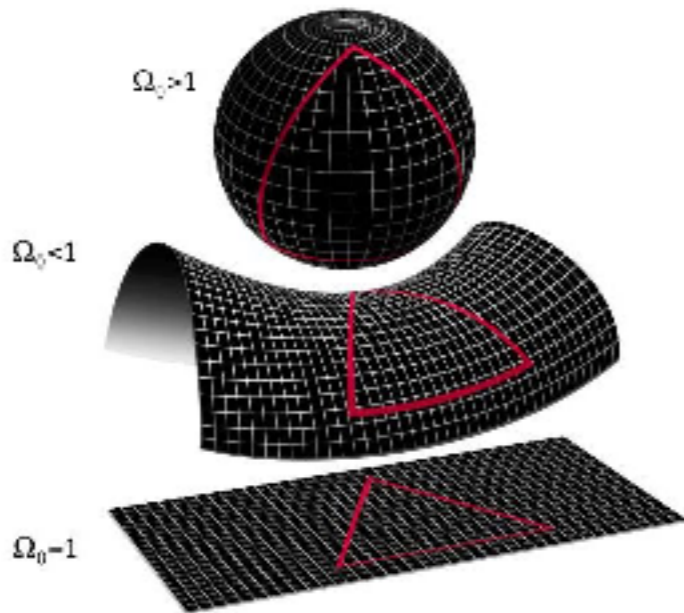
- O Universo aparece o mesmo em todas as direções: é isotrópico.
- Não ocupamos um lugar privilegiado (princípio Copernicano)

O princípio cosmológico



Traduzir o princípio cosmológico em geometria

Métrica FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker)



Três possibilidades: Esfera, Hiperboloide, Plano.

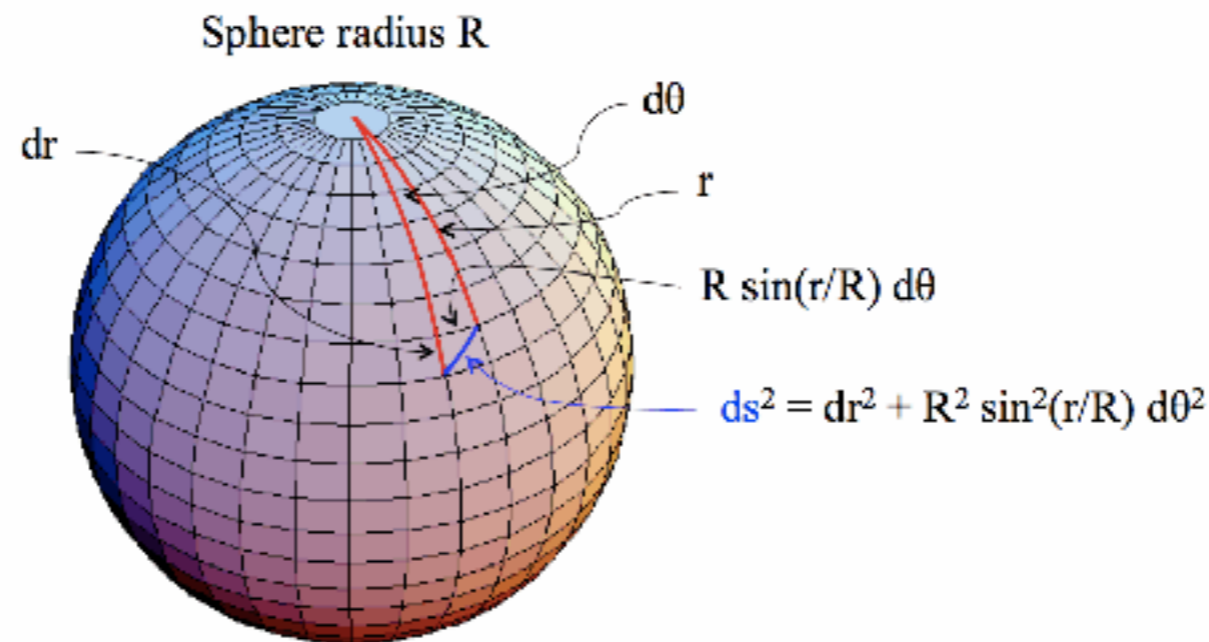
Qual entre elas a Natureza escolheu? Depende do conteúdo material do nosso Universo

Métricas espaciais

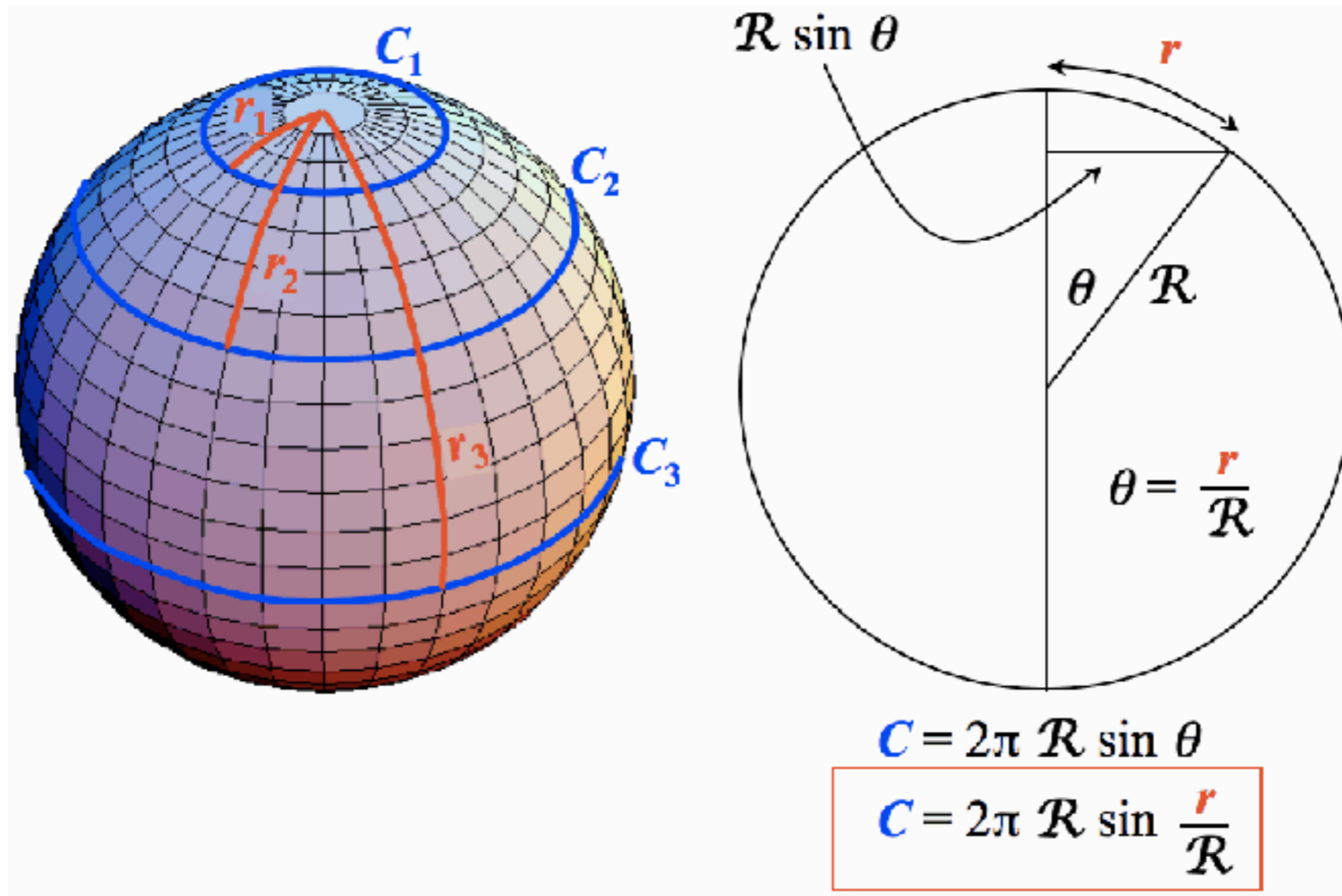
De um espaço plano é simples, é a métrica euclidiana:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Usamos coordenadas esféricas e cartesianas. Trata-se do teorema de Pitágoras. Mas, para uma esfera? Como medimos distâncias numa esfera? Em 2-d:



Métricas espaciais



Métricas espaciais

Em três dimensões o procedimento é similar. O que se encontra é que:

$$d\theta^2 \rightarrow d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \equiv d\Omega^2$$

Então, de uma forma geral, a métrica espacial se escreve:

$$ds^2 = dr^2 + S_k^2(r) d\Omega^2$$

onde:

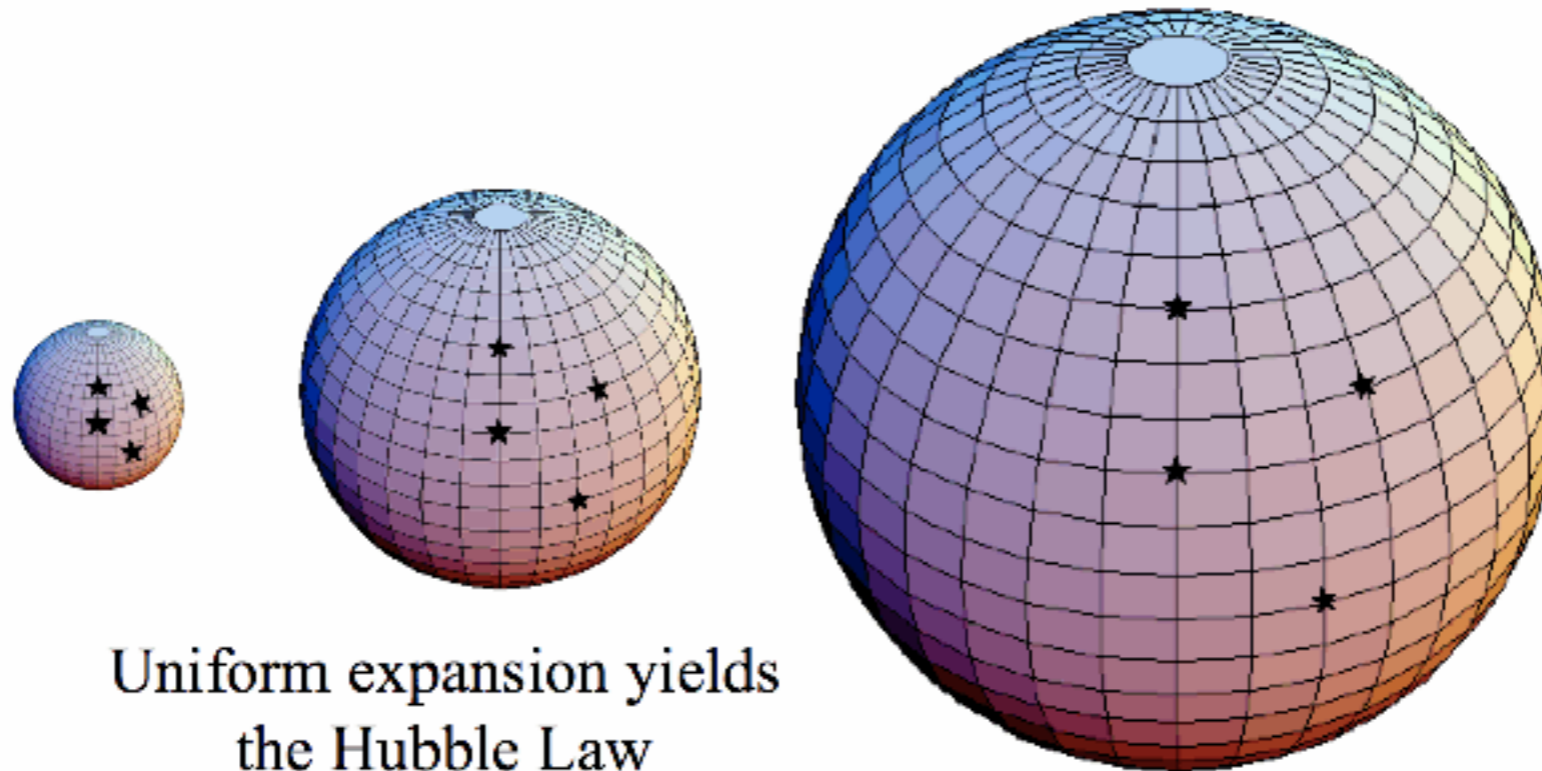
$$S_k(r) = \begin{cases} \sqrt{k}^{-1} \sin(r\sqrt{k}), & k > 0 \\ r, & k = 0 \\ \sqrt{|k|}^{-1} \sinh(r\sqrt{|k|}), & k < 0. \end{cases}$$

Agora é só implementar a expansão do Universo -> passar para uma métrica quadridimensional

Métrica FLRW

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + S_k^2(r) d\Omega^2]$$

O fator de escala $a(t)$ representa a expansão do Universo, as coordenadas são ditas de *comóveis*, e o tempo é o chamado de *tempo cósmico*.



Métrica FLRW: seções espaciais

Trocando a coordenada radial podemos escrever a métrica FLRW na seguinte forma:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{d\chi^2}{1 - k\chi^2} + \chi^2 d\Omega^2 \right]$$

Quando $k = 0$ temos um Universo espacialmente plano:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

Quando $k > 0$ temos a geometria espacial de uma esfera e quando $k < 0$ a geometria espacial de um hiperboloide.

O fator de escala e a lei de Hubble

A distância própria é o produto entre o fator de escala e a distância comóvel:

$$d_p(t) = a(t)\chi$$

A derivada temporal desta relação nos dá:

$$\dot{d}_p = \dot{a}\chi = \frac{\dot{a}}{a}d_p \Rightarrow v_p = Hd_p, \quad H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$$

H é o parâmetro de Hubble. Encontramos algo mais geral da lei de Hubble, pois válido para qualquer tempo. A lei de Hubble é obtida para o tempo presente t_0

$$H(t_0) \equiv H_0$$

O fator de escala e o redshift

Os fótons (a luz) viajam ao longo de geodésicas nulas:

$$ds^2 = 0 \Rightarrow c^2 dt^2 = a(t)^2 d\chi^2$$

Para a luz emitida por uma fonte temos:

$$\chi = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = c \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt'}{a(t')}$$

Manipulando as integrais:

$$\boxed{\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = 1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}}$$

Equações de Friedmann

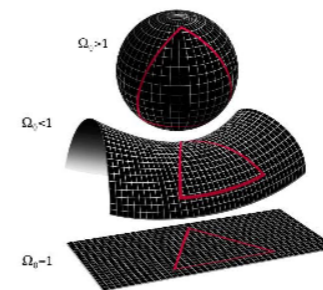
Descrevem a evolução do Universo, $a(t)$, com relação ao conteúdo material do mesmo

Calculando o tensor de Einstein a partir da métrica FLRW e acoplando-o a um fluido de densidade ρ e pressão P

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2}$$

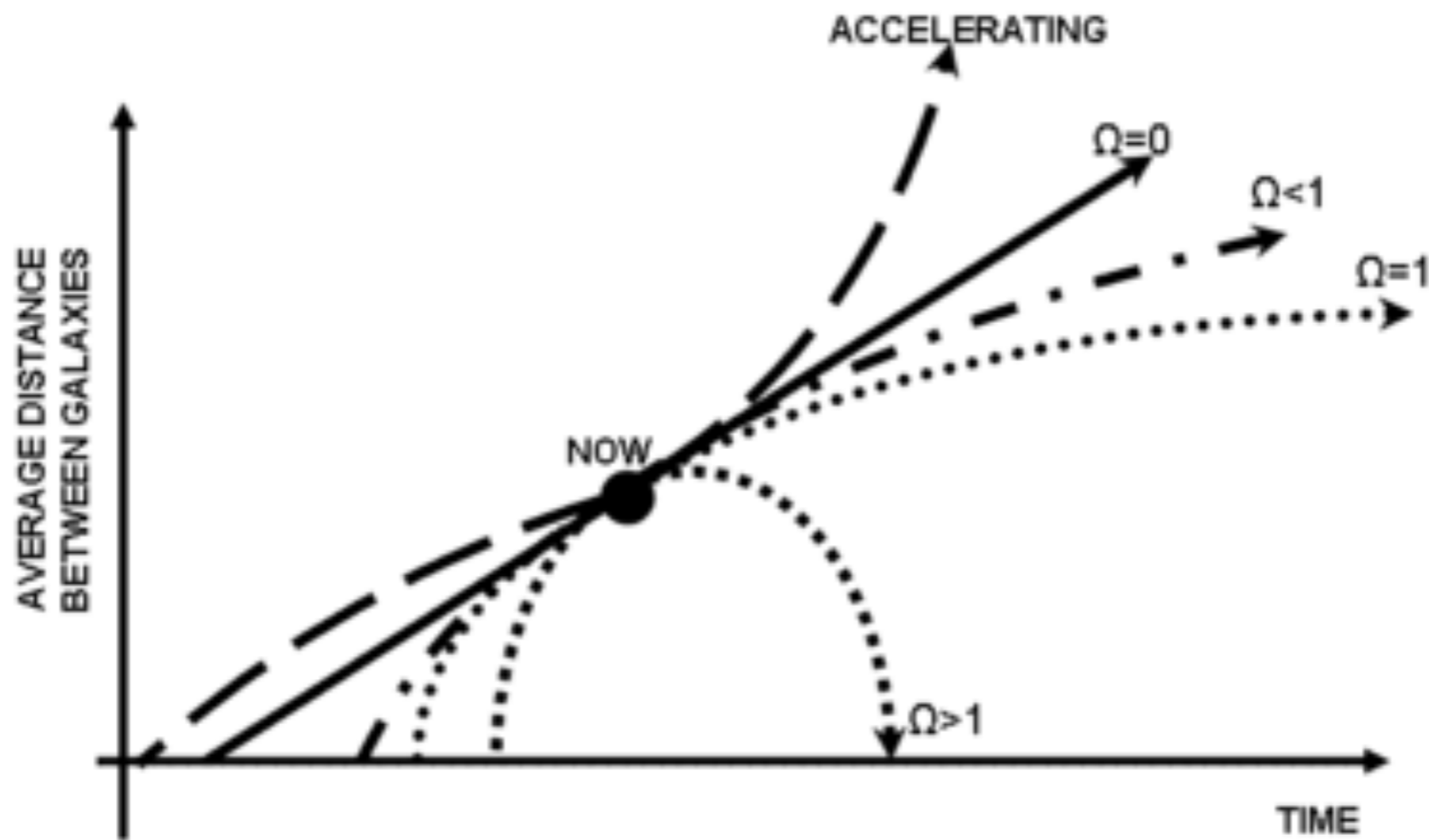
A densidade crítica e o parâmetro de densidade são:

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} \quad \Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}$$



O destino do Universo

Density is Destiny!

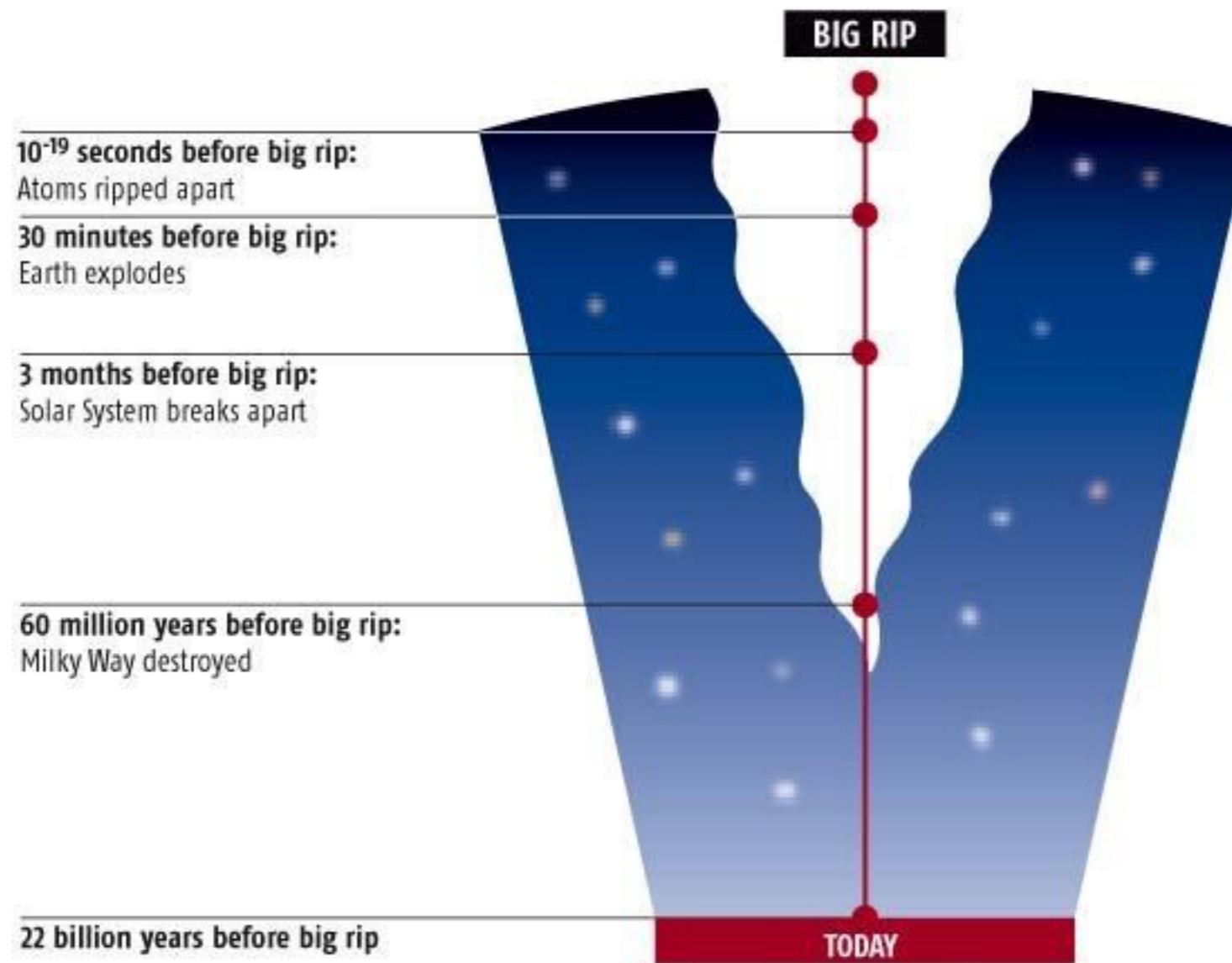


Escatologia: uma coleção de *Big*

- *Big Crunch*: a densidade do universo está acima do valor crítico. A expansão desacelera e a um certo ponto inverte de tendência, se tornando uma contração que acaba numa singularidade.
- *Big Freeze (Big Chill)*: a densidade do universo está abaixo do valor crítico. A expansão dura até a morte térmica (estado de máxima entropia).
- *Big Rip*: o universo expande tão rapidamente que a distância entre as galáxias se torna infinita num tempo finito.

Escatologia: uma coleção de *Big*

END OF EVERYTHING



Equações de Friedmann

Existe outra equação de Friedmann, conhecida como equação da aceleração:

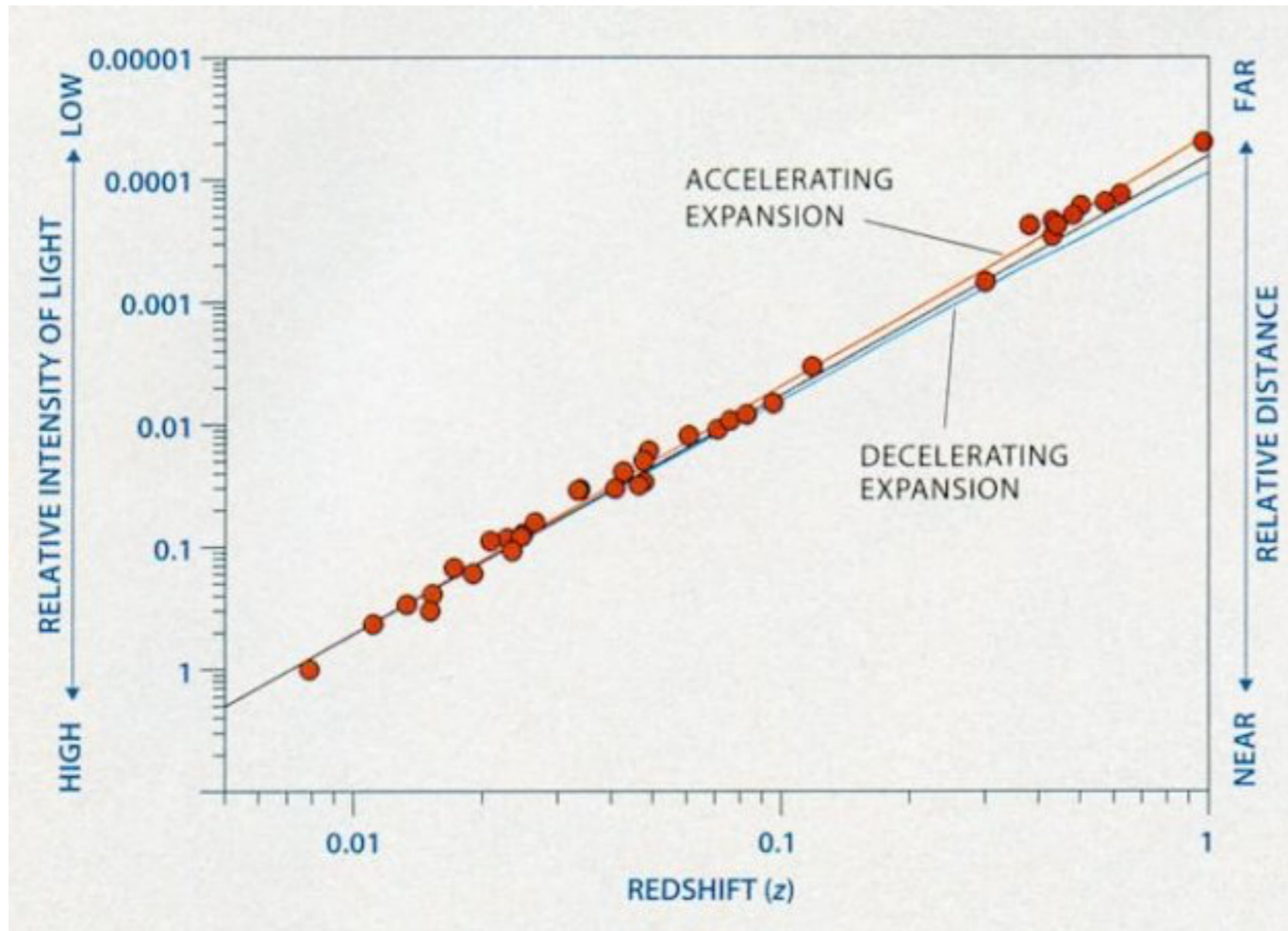
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3P/c^2)$$

Matéria normal possui densidade e pressão positivas então esperamos que a expansão seja desacelerada.

Esperávamos por isso, pois a gravidade é um força atrativa.

Mas é assim mesmo?

A expansão acelerada do Universo



Premio Nobel 2011



Photo: Andrew Frankel/National
Lao
Saul Perlmutter



Photo: Robert Posters/Associated
National University
Brian P. Schmidt



Photo: Scorpia/AP
Adam G. Riess

Mas, o que gera esta aceleração? Energia Escura

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3P/c^2)$$

Se a aceleração é positiva, a pressão tem que ser negativa.

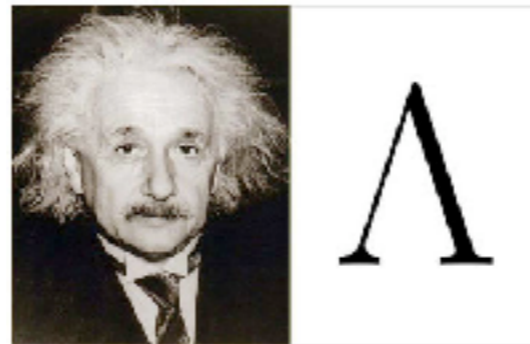
Não conhecemos formas de matéria com estas características. Do que se trata?



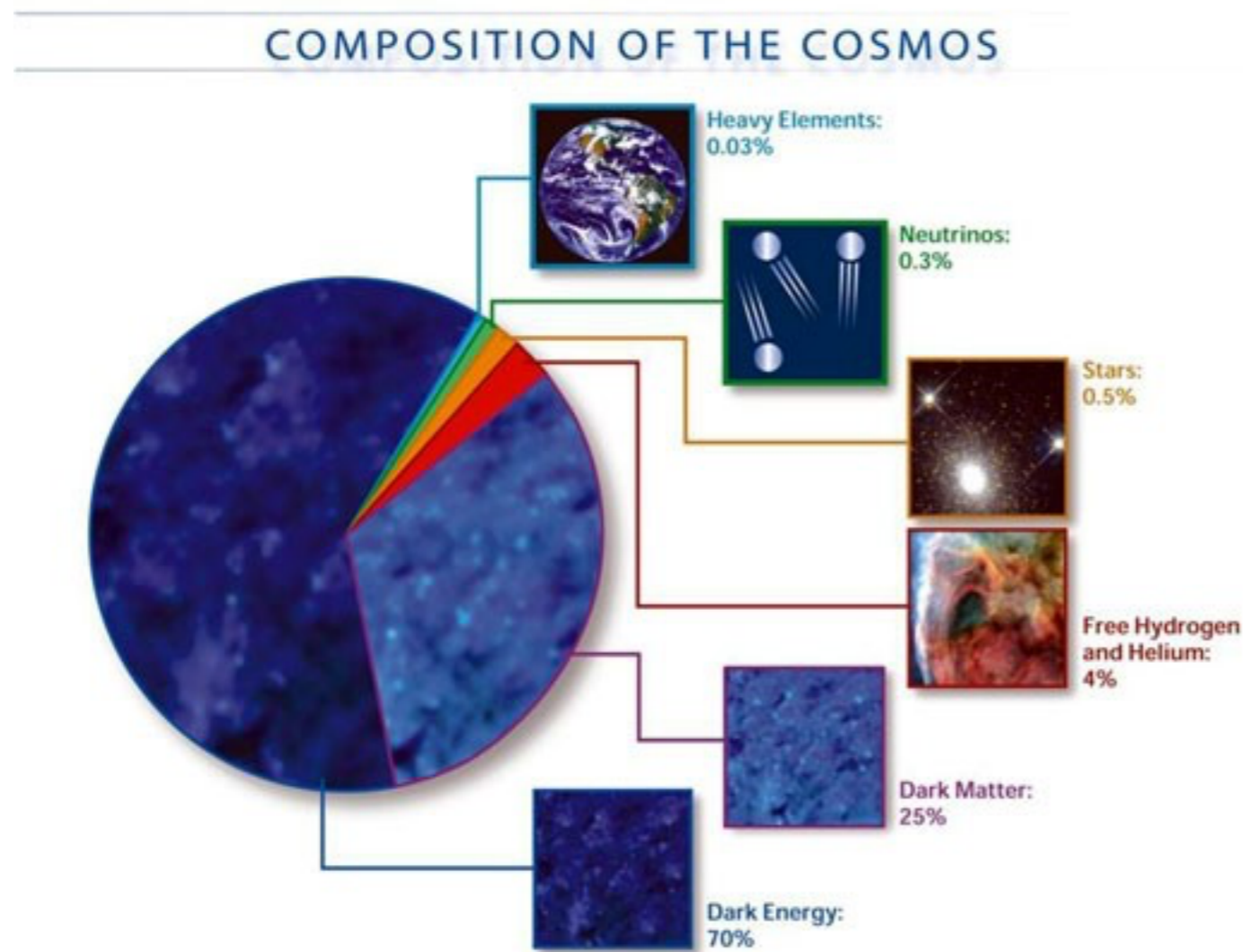
Exercício para casa: descobrir o que é energia escura

Possíveis candidatos:

- A constante cosmológica. Originariamente introduzida por Einstein para obter uma solução estática de Universo (1916).
- Campos escalares e outras componentes exóticas
- Modificações e extensões da Relatividade Geral



É um problema não saber o que é energia escura?



Se não te interessa, não. Porém constitui 70% do Universo.