13. Il principio della conservazione del moto del centro di gravità e l'inerzia dell'energia;*

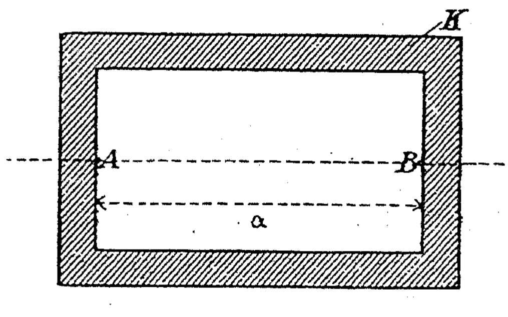
di A. Einstein.

In un lavoro pubblicato l'anno scorso[1]) ho mostrato che le equazioni elettromagnetiche maxwelliane portano, insieme al principio di relatività e al principio dell'energia, alla conseguenza che la massa di un corpo cambia a seguito di un cambiamento del suo contenuto energetico, quale che sia quella variazione di energia. Risulta che, ad una variazione di energia di grandezza ΔE deve corrispondere una variazione della massa di grandezza $\Delta E/V^2$, dove V è la velocità della luce.

In questo lavoro mostrerò che quella proposizione è la condizione necessaria e sufficiente affinché la legge della conservazione del moto del centro di gravità valga (almeno in prima approssimazione) anche per sistemi in cui avvengano processi oltre che meccanici anche elettromagnetici. Sebbene le semplici considerazioni formali che devono essere compiute per la dimostrazione di questa affermazione siano già contenute, in essenza, in un lavoro di H. Poincaré[2]), per chiarezza non mi baserò su quel lavoro.

§ 1. Un caso speciale.

Sia K un cilindro cavo rigido, libero di muoversi nello spazio, ma a riposo. In A ci sia un apparecchio che invii una certa quantità di energia irradiante S, attraverso la cavità, verso B.



*Titolo originale: *Das Prinzip von der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung und die Trägheit der Energie.* Pubblicato in: *Annalen der Physik* **20** (1906): 627–633. Tradotto da Oliver F. Piattella.

[1]A. Einstein, Ann. d. Phys. **18.** p. 639. 1905.

[2]H. Poincaré, Lorentz-Festschrift p. 252. 1900.

Durante l'emissione di quella quantità di energia agisce una pressione di radiazione sulla parete interna sinistra del cilindro cavo K, che impartisce a questo una certa velocità verso sinistra. Come si dimostra facilmente dalle leggi della pressione di radiazione, se il cilindro cavo possiede massa M allora questa velocità è uguale a $\frac{1}{V}\frac{S}{M}$, dove V è la velocità della luce. K mantiene questa velocità fintanto che il complesso radiativo, la cui estensione spaziale sia molto piccola in relazione a quella della cavità di K, è assorbito in B. La durata del movimento del cilindro cavo è (trascurando contributi di ordine superiore) uguale a α/V dove α è la separazione tra A e B. A seguito dell'assorbimento del complesso radiativo in B, il corpo K si trova nuovamente in quiete. Durante il processo radiativo considerato K si è spostato verso sinistra di una distanza:

$$\delta = \frac{1}{V}\frac{S}{M} \cdot \frac{\alpha}{V} \, . \tag{1}$$

Nello spazio cavo di K sia dato un corpo k, che si immagini senza massa, per semplicità, ed sia dato anche un meccanismo (pure senza massa) che muova k, che inizialmente si trova in B, avanti e indietro tra B e A. Dopo che la quantità di radiazione S è ricevuta in B, questa energia viene ceduta a k e da qui k si muove verso A. Alla fine la quantità di energia S viene ricevuta di nuovo dal cilindro cavo K in A e k torna indietro nuovamente verso B. L'intero sistema ha ora effettuato un processo ciclico completo che ci si può immaginare ripetersi quante volte si vuole.

Se si assume che il corpo mobile k sia senza massa anche quando ha acquisito la quantità di energia S, allora si deve pure assumere che il ritorno dell'energia S non sia relazionato ad una variazione di stato del cilindro cavo. Il risultato di tutto il processo ciclico descritto consiste quindi solamente in un dislocamento δ di tutto il sistema verso sinistra, e tale dislocamento può essere reso grande a piacere ripetendo il processo ciclico stesso. Otteniamo quindi il risultato che un sistema originariamente a riposo, senza che agiscano forze esterne sullo stesso, può cambiare la posizione del suo centro di gravità a piacere e senza che il sistema soffra di un cambiamento permanente.

È chiaro che il risultato ottenuto non contiene nessuna contraddizione interna; tuttavia fa a pugni con le leggi fondamentali della Meccanica, secondo cui un corpo inizialmente a riposo, su di cui nulla agisce, non può compiere nessun movimento di traslazione.[1]

Presupponendo tuttavia che a quell'energia E spetti l'inerzia E/V^2, allora sparisce la contraddizione con i precetti della Meccanica. Secondo questa ipotesi il corpo mobile k possiede quindi, mentre trasporta la quantità di energia S da B verso A, massa S/V^2; e siccome il centro di gravità *dell'intero sistema* durante questo processo deve stare a riposo, secondo la legge del centro di gravità, allora il

[1] **NdT.** Spiegato in altri termini, quando un'onda elettromagnetica, o un pacchetto di onde elettromagnetiche (chiamate "complesso radiativo" da Einstein) viene emesso da A, il rinculo mette in movimento il cilindro cavo verso sinistra, dato che anche le onde elettromagnetiche possiedono momento lineare. Venendo poi assorbito in B, un nuovo rinculo ferma il cilindro. Stiamo applicando la conservazione del momento lineare. Ora, il corpo mobile k, avendo massa zero, è in grado di riportare l'energia indietro ad A, ma non il momento lineare. Per questo si può instaurare un moto perpetuo.

cilindro cavo K esperimenta durante lo stesso processo in totale uno spostamento S' verso destra di grandezza

$$\delta' = \alpha \cdot \frac{S}{V^2} \cdot \frac{1}{M} \,. \tag{2}$$

Un paragone col risultato sopra mostra che (per lo meno in prima approssimazione) $\delta = \delta'$, cioè che dunque la posizione del sistema prima e dopo il processo ciclico è la stessa. Così la contraddizione con i precetti della Meccanica è eliminata.[2]

§ 2. Sulla legge della conservazione del moto del centro di gravità.

Consideriamo un sistema di n punti materiali discreti con masse $m_1, m_2, \dots m_n$ e di coordinate del centro di gravità $x_1, \dots z_n$. Questi punti siano da intendersi non come strutture elementari in senso termodinamico ed elettrico (atomi e molecole), ma come corpi nel senso comune della parola, di piccole dimensioni, la cui energia non sia nota dalla velocità del centro di gravità. Queste masse siano in grado di interagire una sull'altra sia attraverso processi elettromagnetici, sia anche attraverso forze conservative (per esempio gravità, vincoli rigidi); vogliamo però ipotizzare che sia l'energia potenziale delle forze conservative che l'energia cinetica del movimento del centro di gravità delle masse siano sempre da considerarsi infinitamente piccole rispetto all'energia "interna" delle masse $m_1, \dots m_n$.

[2] **NdT.** D'altra parte, se al corpo mobile k va associata una massa S/V^2 quando trasporta l'energia S, allora egli possiede momento lineare e quindi quando parte da B per ritornare ad A il cilindro cavo rincula verso destra. In questi processi di rinculo, il momento lineare si conserva, il che equivale a dire che il moto del centro di gravità si conserva.

Valgano in tutto lo spazio le equazioni maxwelliane-lorentziane:[3]

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcl}
\frac{u}{V}\varrho & + & \frac{1}{V}\frac{dX}{dt} & = & \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \,, \\[2ex]
\frac{v}{V}\varrho & + & \frac{1}{V}\frac{dY}{dt} & = & \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \,, \\[2ex]
\frac{w}{V}\varrho & + & \frac{1}{V}\frac{dZ}{dt} & = & \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \,, \\[2ex]
 & & \frac{1}{V}\frac{dL}{dt} & = & \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \,, \\[2ex]
 & & \frac{1}{V}\frac{dM}{dt} & = & \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \,, \\[2ex]
 & & \frac{1}{V}\frac{dN}{dt} & = & \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \,,
\end{array}
\right. \tag{3}
$$

dove[4]

$$
\varrho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \tag{4}
$$

rappresenta la densità di elettricità moltiplicata per 4π.

Addizionando le equazioni sopra, ciascuna moltiplicata rispettivamente per

$$
\frac{V}{4\pi}Xx \;, \quad \frac{V}{4\pi}Yx \ldots \frac{V}{4\pi}Nx \tag{5}
$$

e integrando le stesse su tutto lo spazio, si ottiene così, dopo alcune integrazioni per parti, l'equazione[5]

$$
\int \frac{\varrho}{4\pi} x(uX + vY + wZ)d\tau + \frac{d}{dt}\left\{ \int x \cdot \frac{1}{8\pi}(X^2 + Y^2 \cdots + N^2)d\tau \right\} - \frac{V}{8\pi}\int (YN - ZM)d\tau = 0 \;. \tag{6}
$$

Il primo membro di questa equazione rappresenta l'energia addotta dal campo elettromagnetico ai corpi $m_1 \ldots m_n$. Secondo la nostra ipotesi della dipendenza

[3]**NdT.** In queste equazioni X, Y, Z sono le componenti, cartesiane, del campo elettrico $\mathbf{E}$, mentre L, M, N quelle del campo magnetico $\mathbf{B}$, e vengono usate le unità Gaussiane. Le prime tre equazione allora rappresentano $\frac{1}{V}\mathbf{J} + \frac{1}{V}\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \mathrm{rot}\ \mathbf{B}$ e le seconde tre $\frac{1}{V}\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\mathrm{rot}\ \mathbf{E}$. La densità di corrente è da definirsi $\mathbf{J} = \mathbf{u}\varrho$ e quindi (u, v, w) sono le componenti della velocità della densità di carica. Nel lavoro originale di Einstein c'è probabilmente un errore di digitazione, in quanto nelle prime tre equazioni appare solamente u.

[4]**NdT.** Questa è la $\varrho = \mathrm{div}\ \mathbf{E}$.

[5]**NdT.** Questa equazione rappresenta la conservazione dell'energia e oggi si trova più frequentemente scritta, in forma differenziale, nel teorema di Poynting $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \frac{dU}{dt} + \mathrm{div}\ \mathbf{S} = 0$, dove $U = \frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{2}B^2$ è la densità di energia del campo elettromagnetico e $\mathbf{S} = V\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ è il vettore di Poynting. Einstein moltiplica questa per x e poi integra su tutto lo spazio. In questo modo l'ultimo contributo isola la componente x del vettore di Poynting.

delle masse dall'energia bisogna perciò uguagliare il primo addendo della somma all'espressione

$$V^2 \sum x_\nu \frac{dm_\nu}{dt} \ , \tag{7}$$

dato che, per quanto ipotizzato sopra, i singoli punti materiali m_ν variano la loro energia, e perciò la loro massa, *solamente* attraverso l'assorbimento di energia elettromagnetica.

Se attribuiamo inoltre anche al campo elettromagnetico una densità di massa (ϱ_e), che differisce dalla densità di energia per un fattore V^2, allora il secondo membro dell'equazione assume la forma:

$$V^2 \frac{d}{dt}\left\{\int x\varrho_e d\tau\right\} \ . \tag{8}$$

Denotando con J l'integrale che appare nel terzo membro dell'equazione, quest'ultima diventa:

$$\sum \left(x_\nu \frac{dm_\nu}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left\{\int x\varrho_e d\tau\right\} - \frac{1}{4\pi V} J = 0 \ . \tag{9}$$

Dobbiamo ora ricercare il significato dell'integrale J. Moltiplicando la seconda, la terza, la quinta e la sesta delle equazioni rispettivamente per i fattori NV, $-MV$, $-ZV$, YV, sommandole e integrandole nello spazio, si ottiene, dopo qualche integrazione per parti,

$$\frac{dJ}{dt} = -4\pi V \int \frac{\varrho}{4\pi}\left(X + \frac{v}{V}N - \frac{w}{V}M\right) d\tau = -4VR_x \ , \tag{10}$$

dove R_x è la somma algebrica delle componenti x di tutte le forze esercitate dal campo elettromagnetico sulle masse $m_1, \ldots m_n$. Siccome la corrispondente somma di tutte le forze derivanti di interazioni mutue conservative dà zero, allo stesso tempo R_x è la somma delle componenti x di *tutte* le forze esercitate sulle masse m_ν.[6]

Vogliamo ora occuparci per prima cosa dell'equazione (10), che è indipendente dall'ipotesi per cui le masse dipendono dall'energia. Trascuriamo per prima cosa la dipendenza delle masse dall'energia e denotiamo con $\mathfrak{X}_\nu$ la risultante di tutte le componenti x delle forze che agiscono su m_ν, così dobbiamo impostare per la massa m_ν l'equazione del moto:

$$m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left\{m_\nu \frac{dx_\nu}{dt}\right\} = \mathfrak{X}_\nu \ , \tag{11}$$

quindi otteniamo anche:

$$\frac{d}{dt}\sum \left(m_\nu \frac{dx_\nu}{dt}\right) = \sum \mathfrak{X}_\nu = R_x \ . \tag{12}$$

[6]**NdT.** Il vettore di Poynting rappresenta la densità di energia di momento del campo elettromagnetico e quindi il suo integrale su tutto lo spazio, derivato rispetto al tempo, rappresenta la forza agente sul sistema di cariche.

Dall'equazione (12) e dall'equazione (10) si ottiene

$$\frac{J}{4\pi V} + \sum m_\nu \frac{dx_\nu}{dt} = \text{cost.} \tag{13}$$

Se introduciamo ora di nuovo l'ipotesi secondo cui le grandezze m_ν dipendono dall'energia, e quindi anche dal tempo, ci si frappone così la difficoltà che in questo caso le equazioni meccaniche non sono più conosciute; il primo segno di uguaglianza dell'equazione (11) non è più valido. Bisogna tuttavia notare che la differenza

$$\frac{d}{dt}\left\{m_\nu \frac{dx_\nu}{dt}\right\} - m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} = \frac{dm_\nu}{dt}\frac{dx_\nu}{dt} = \frac{1}{V^2}\int \frac{\varrho}{4\pi}\frac{dx_\nu}{dt}(uX + vY + wZ)d\tau \tag{14}$$

è di secondo grado nella velocità. Essendo tutte le velocità così piccole per cui i membri di secondo grado possono essere trascurati, allora anche quando la massa m_ν è variabile vale l'equazione

$$\frac{d}{dt}\left(m_\nu \frac{dx_\nu}{dt}\right) = \mathfrak{X}_\nu \tag{15}$$

per lo meno al livello di precisione considerato. Valgono quindi anche le equazioni (12) e (13), e si ottiene dalle equazioni (12) e (9):

$$\frac{d}{dt}\left[\sum (m_\nu x_\nu) + \int x \varrho_e d\tau\right] = \text{cost.} \tag{16}$$

Denotando con ξ la coordinata X del centro di gravità delle masse ponderabili e dell'energia di massa del campo elettromagnetico, si ha dunque

$$\xi = \frac{\sum (m_\nu x_\nu) + \int x \varrho_e d\tau}{\sum m_\nu + \int \varrho_e d\tau}\ , \tag{17}$$

dove, secondo il principio dell'energia, il valore del denominatore del lato destro è indipendente dal tempo.[1]) Possiamo quindi scrivere l'equazione (16) anche nella forma:

$$\frac{d\xi}{dt} = \text{cost.} \tag{18}$$

Ascrivendo dunque a quella energia E la massa inerziale E/V^2, vale così — per lo meno in prima approssimazione — il principio di conservazione del movimento del centro di gravità, anche per sistemi in cui avvengono processi elettromagnetici.

Dall'investigazione sopra segue che o si deve rinunciare alla legge fondamentale della meccanica, secondo cui un corpo originalmente in quiete, non soggetto a forze esterne, non può eseguire nessun movimento di traslazione, o si deve assumere che l'inerzia di un corpo dipenda dal contenuto di energia di questo, secondo la legge data.

Berna, maggio 1906.

(Ricevuto il 17 maggio 1906.)

[1]Secondo l'interpretazione sviluppata in questo lavoro, la legge della costanza della massa è un caso speciale del principio dell'energia.