Uma introdução à

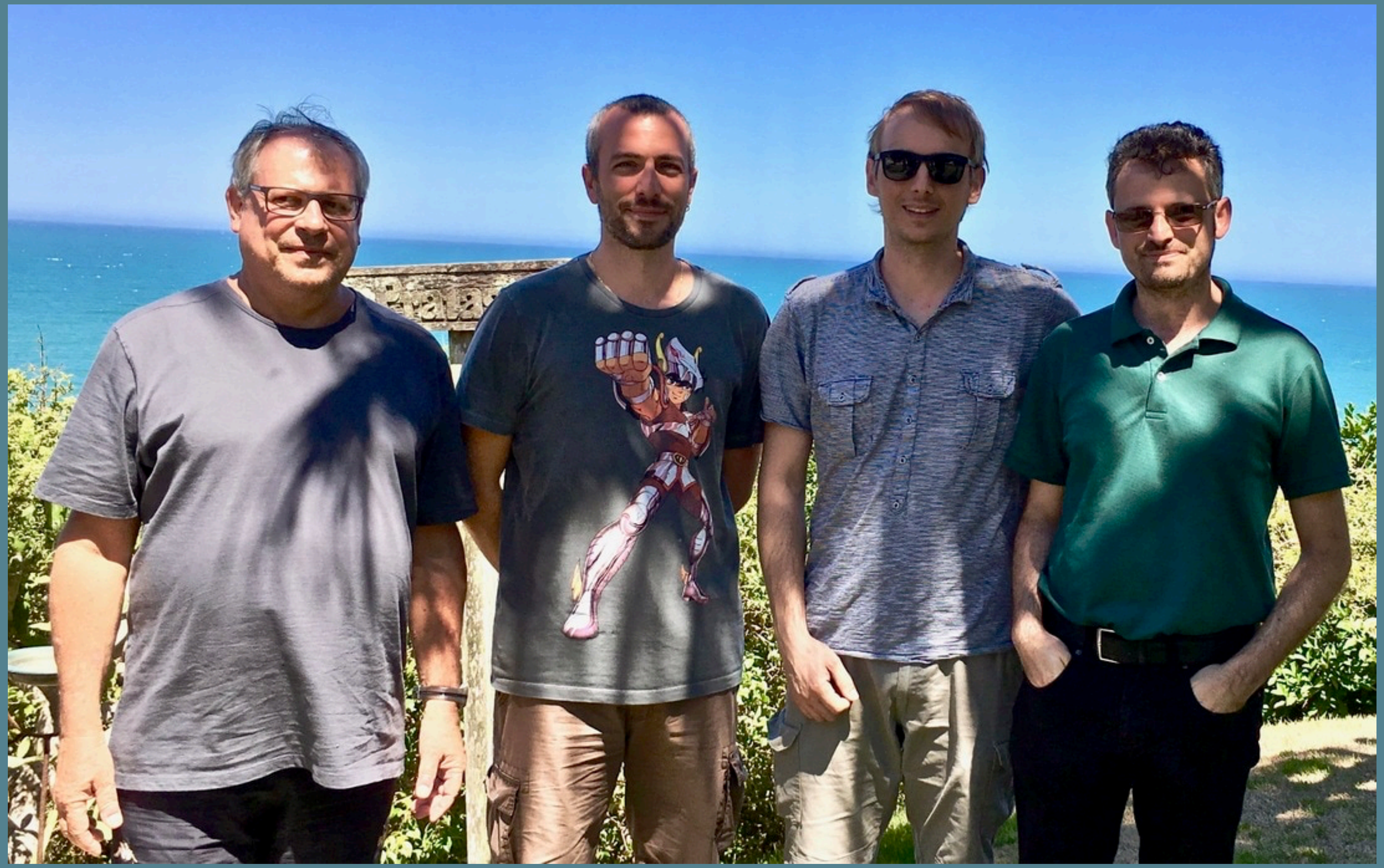
GRAVITAÇÃO

INVERNO ASTROFÍSICO 2022
DOMINGOS MARTINS

Oliver F. Piattella

OF.PIATTELLA@UNINSUBRIA.IT
OFP.COSMO-UFES.ORG

COSMO-UFES



http://www.cosmo-ufes.org

https://ppgcosmo.cosmo-ufes.org/

http://ofp.cosmo-ufes.org

COMO


Como
Lombardy
Veneto
Piedmont
Emilia-Romagna
Liguria
Tuscany
Lazio
Apulia
Sicily

PLANO DO MINICURSO

- Um pouco de história da gravitação
- A gravitação Newtoniana
- O maior sucesso da gravitação Newtoniana: o movimento dos planetas
- O problema com Mercúrio: rumo a Relatividade Geral
- O princípio de equivalência e a revolução Einsteiniana

UM POUCO DE HISTÓRIA

A gravidade é uma das 4 interações fundamentais. Talvez a primeira a chamar (indiretamente) a atenção dos filósofos nas observações astronômicas.

Entender que o movimento de um planeta em torno do Sol e a queda de uma maçã na Terra são fenômenos relacionados à mesma interação fundamental (a gravidade) teve que esperar a síntese Newtoniana.

De fato a astronomia é uma disciplina muito antiga, e a astrofísica é uma disciplina muito moderna.

As observações astronômicas alcançaram um grau de precisão impressionante (por serem de olho nu ou usando objetos simples como o gnomon). Se pense nos cálculos de Aristarco de Samo (IV-III século ac): razões entre distâncias Terra-Lua e Terra-Sol, e razões entre os diâmetros da Terra e da Lua.

UM POUCO DE HISTÓRIA

Parece que houve disciplinas científicas no sentido moderno de teoria e experimento bem antes da revolução científica (XVI século, Galileu).

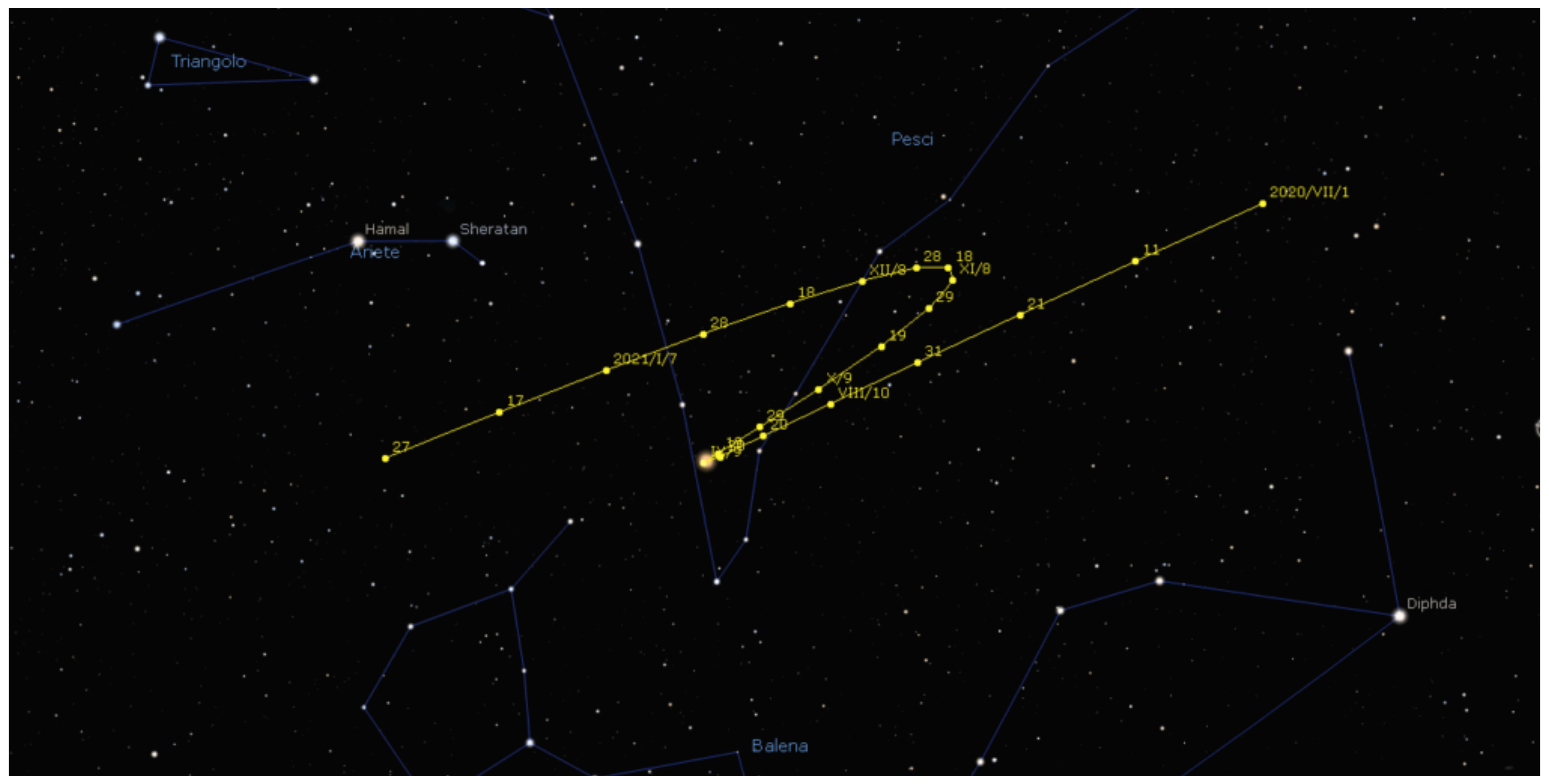
Se pense, por exemplo, a "Sobre a flotação dos corpos" de Arquimedes (III século ac), "Pneumática" e "Catóptrica" do Heron de Alexandria (I século dc), "Óptica" de Ptolomeu (II século dc).

Mas o mesmo grau de "cientifidade" não teve com a queda livre (e então a gravidade). Só com Galileu e seus experimentos com o plano inclinado e de queda livre da torre de Pisa (talvez).

O PROBLEMA DOS PLANETAS

O problema do movimento dos planetas me parece ter sido o estímulo para o desenvolvimento da teoria da gravitação. Não somente a Newtoniana, mas também a Einsteniana (movimento de Mercúrio).

O problema dos planetas é que esses, em certos períodos do ano, se movimentam de forma retrograda (de oeste para leste). Aliás, “planeta” em grego antigo significa “errante” (que anda vagueando).



Exemplo: movimento retrogrado de Marte, de julho 2020 até janeiro 2021.
Fonte: https://www.antareslegnano.org/wp/2020/12/13/il-moto-retrogrado-di-marte/

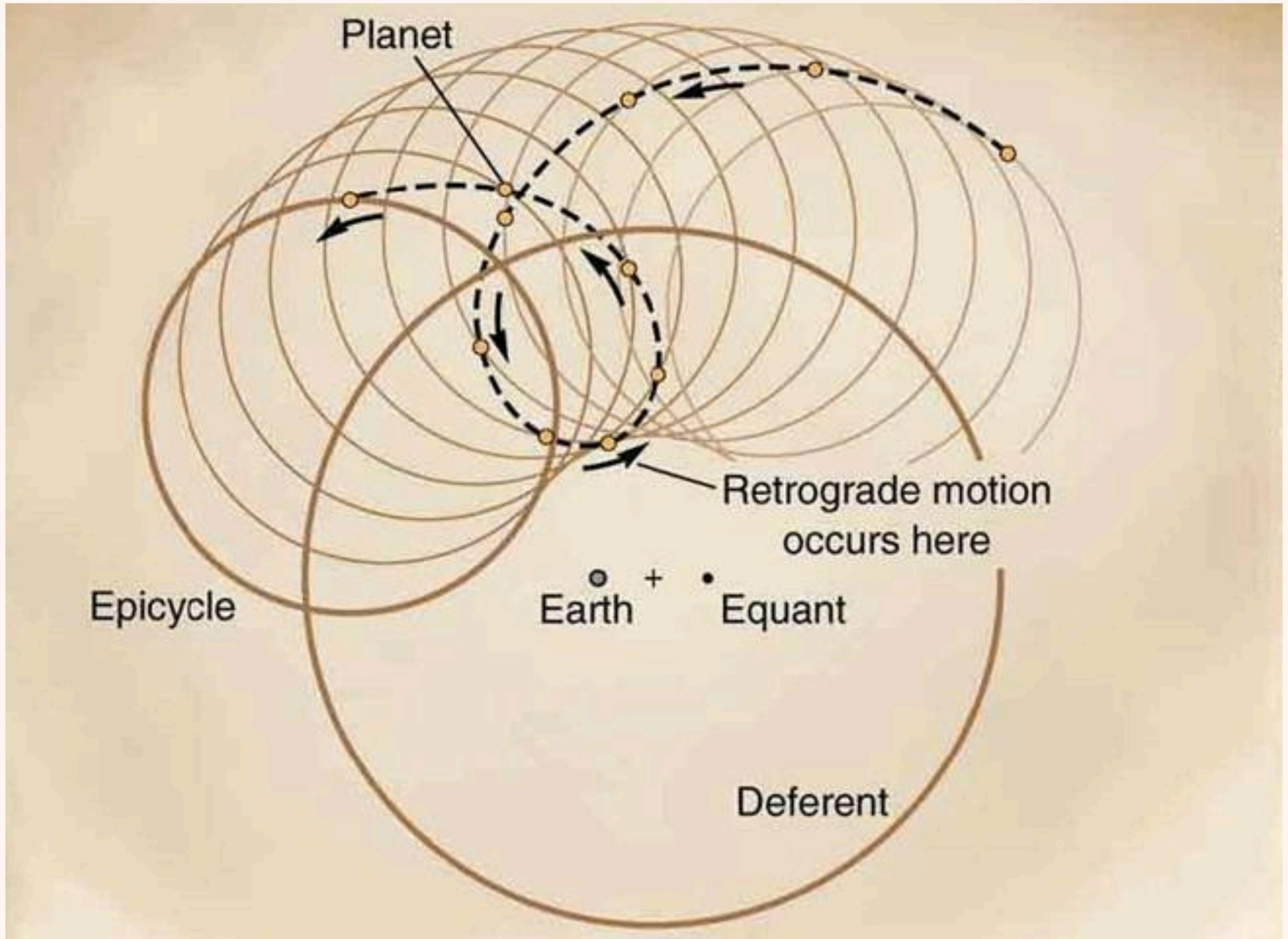
O “DEVER DE CASA” DE PLATÃO

Somente usando movimentos circulares uniformes (perfeição) montar um modelo de Sistema Solar (do Sol, da Lua e dos planetas conhecidos: Mercúrio, Vénus, Marte, Jupiter e Saturno) condizente com as observações.

- **Eudoxo de Cnido e Cálipo de Cízico (IV século ac): esféras homocentricas (com centro na Terra). Talvez um dos primeiros exemplos de “ajuste fino”.**
- **Aristóteles (IV século ac) na *Metafísica*: mais esferas que carregam outras esferas.**
- **Heráclides do Ponto: parece que foi o primeiro a sugerir que a Terra gire em torno do próprio eixo e que Mercúrio e Vénus girem em torno do Sol e não da Terra.**
- **Modelos baseados no epiciclo, no deferente, no excêntrico e no equante. Cláudio Ptolemeu (II século dc) em Alexandria e sua obra: *Almagesto*.**

O MODELO PTOLEMAICO

- **Excêntrico: o centro do deferente não coincide exatamente com o centro da Terra (então não é exatamente um modelo geocêntrico, mas quase). Além disso, este centro muda para cada planeta.**
- **Equante: o centro do epiciclo se movimenta ao longo do deferente com velocidade constante, mas com respeito ao equante.**



https://blogs.futura-sciences.com/e-luminet/2018/03/28/geometry-cosmos-3-ptolemys-circles-inflationay-cosmology/

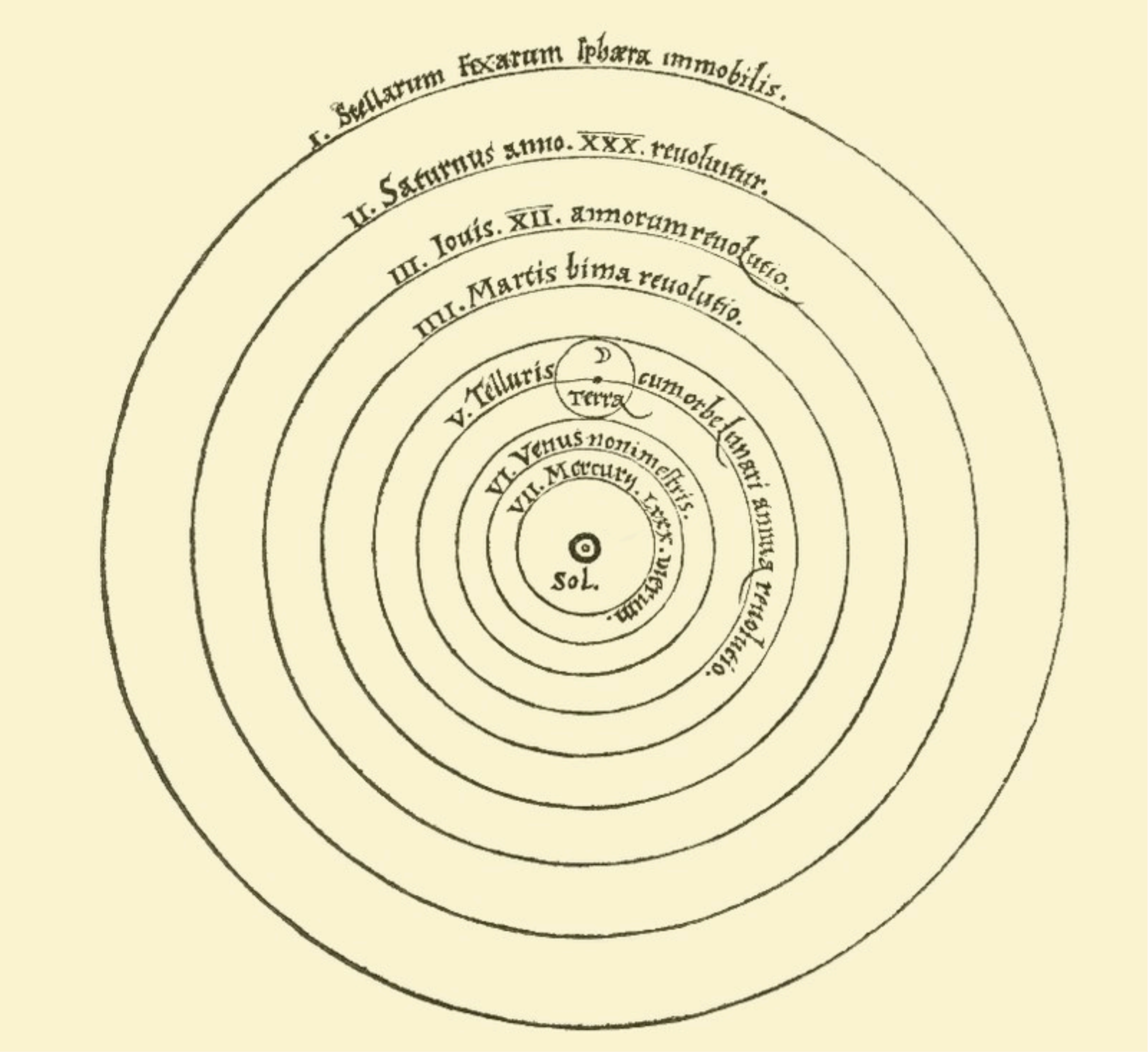
A REVOLUÇÃO COPERNICANA

Do *Pequeno Comentário (Commentariolous)* de Nicolau Copérnico (1473-1543):

- **O centro da Terra não é o centro do Universo, mas apenas o centro da órbita da Lua;**
- **Todos os corpos celestes orbitam em torno do Sol, que é o centro do Universo (Héliocentrismo);**
- **O movimento aparente das estrelas é devido ao movimento rotacional da Terra em torno do próprio eixo;**
- **O movimento aparente do Sol é devido a ambos os movimentos de rotação da Terra em torno do próprio eixo e em torno do Sol;**
- **O movimento retrógrado dos planetas é devido ao movimento da Terra, que ultrapassa Marte, Júpiter ou Saturno ou é ultrapassada por Vénus e Mercúrio.**

O MODELO COPERNICANO

- **Órbitas circulares;**
- **Ainda tem epiciclos (não aparecem na figura ao lado): 6 para Mercúrio, 3 para a Lua, 4 para os demais planetas.**
- **O centro da órbita da Terra não é exatamente o Sol (isso foi necessário para explicar a diferente duração das estações).**
- **Tem um terceiro movimento, de precessão do eixo terrestre, que deveria compensar o induzido pela revolução em torno do Sol, deixando o pequeno efeito da precessão dos equinócios (esse terceiro movimento é desnecessário).**



Do *Revolutionibus Orbis Cœlestium*, do próprio Copérnico

A PRIMEIRA LEI DE KEPLER

As observações do Tycho Brahe (1546-1601) são tão precisas que nenhum modelo planetário até então conseguia se ajustar adequadamente.

Kepler (1571-1630) em *Astronomia Nova* (1609) foi o primeiro a abandonar a hipótese fundamental até então: que as órbitas dos planetas tivessem de ser circulares.

Primeira Lei de Kepler: Todos os planetas se movimentam ao longo de órbitas elípticas, das quais o Sol ocupa um dos focos.

Esta lei elimina a necessidade dos epiciclos e quebra a antiga crença que as órbitas devam ser circulares pois os planetas são carregados pela revolução de esferas rígidas (nenhuma rotação de um corpo rígido pode gerar uma elipse).

A SEGUNDA LEI DE KEPLER

Em 1621:

Segunda Lei de Kepler: A linha que une o Sol ao planeta varre áreas iguais em tempos iguais.

Esta lei quebra a outra antiga hipótese: que o movimento orbital fosse uniforme. Então elimina a necessidade de usar o equante. A velocidade dos planetas é maior quando eles se encontram mais próximos do Sol.

Kepler começa a ter alguma suspeita que o Sol exercite alguma influência que mantenha os planetas nas suas órbitas.

A TERCEIRA LEI DE KEPLER

Terceira Lei de Kepler (1619): O quadrado do período sideral de cada planeta é proporcional ao cubo do semieixo maior da elipse.

Essa observação foi realmente uma novidade.

O golpe mortal ao modelo ptolemaico foi provavelmente dado por Galileu em 1610, descobrindo as fases de Vénus. (Galileu golpeou muito com o seu telescópio).

A QUEDA LIVRE

Aristoteles (IV século ac): os corpos caem porque o lugar natural do elemento "terra" é para baixo, no centro do Universo (que é a Terra). Um corpo em queda livre possui uma velocidade proporcional ao peso. Problema: porque lançando uma pedra no ar ela, no começo, vai para cima ao invés de ir para baixo?

Outras ideias do Aristoteles: o que sustenta o movimento de um corpo lançado para cima é o ar. A Terra não pode estar rotacionando porque assim um corpo lançado para cima não cairia no mesmo lugar de onde partiu.

Estratão de Lâmpsaco (IV século ac): entendeu, observando o espaçamento de gotas de água em queda livre, que um corpo em queda livre acelera.

A QUEDA LIVRE

Oresme (1325-1382): a rotação da Terra carrega o corpo lançado com si, juntamente ao lançador e ao ar, por isso ele cai no mesmo lugar de onde partiu. Ele aplicou a noção de *impetus*, criada por Buridan (1295-1361) .

Oresme (e outros) provou o *teorema da velocidade média*: a distância percorrida por um corpo uniformemente acelerado em um dado tempo é igual a distância percorrida no mesmo intervalo de tempo por um corpo em movimento uniforme com velocidade igual à velocidade média.

Em notação moderna: $v_i = 0\,, \quad v_f = aT \quad \bar{v} = \frac{v_f - v_i}{2} = \frac{1}{2}aT\,, \quad d = \frac{1}{2}aT^2$

Curiosamente, esse resultado não foi aplicado ao caso da queda livre.

Exercício: tentem mostrar o teorema da velocidade média.

A QUEDA LIVRE

Apesar do fato que fosse bastante óbvio que um corpo em queda livre acelere, não era óbvio que a velocidade aumentasse proporcionalmente ao tempo, e não à distância.

No segundo caso, em notação moderna:

$$\frac{dv}{dt} = \alpha^2 x \,, \quad v = \frac{dx}{dt} \,, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 x \,, \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t} \,.$$

Mas então a distância aumentaria exponencialmente! Pior que isso, se um corpo for deixado cair do repouso, não cairia mesmo!

($x(0) = 0 \,, \quad v(0) = 0 \,, \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = c_2 = 0 \,.$**)**

Aparentemente, o primeiro a entender isso foi o frade Domingo de Soto (1494-1560).

A QUEDA LIVRE

Galileu (1564-1642) foi o primeiro a estudar o movimento com o *experimento*. O experimento é uma maneira de interrogar a natureza, para descobrir como ela funciona.

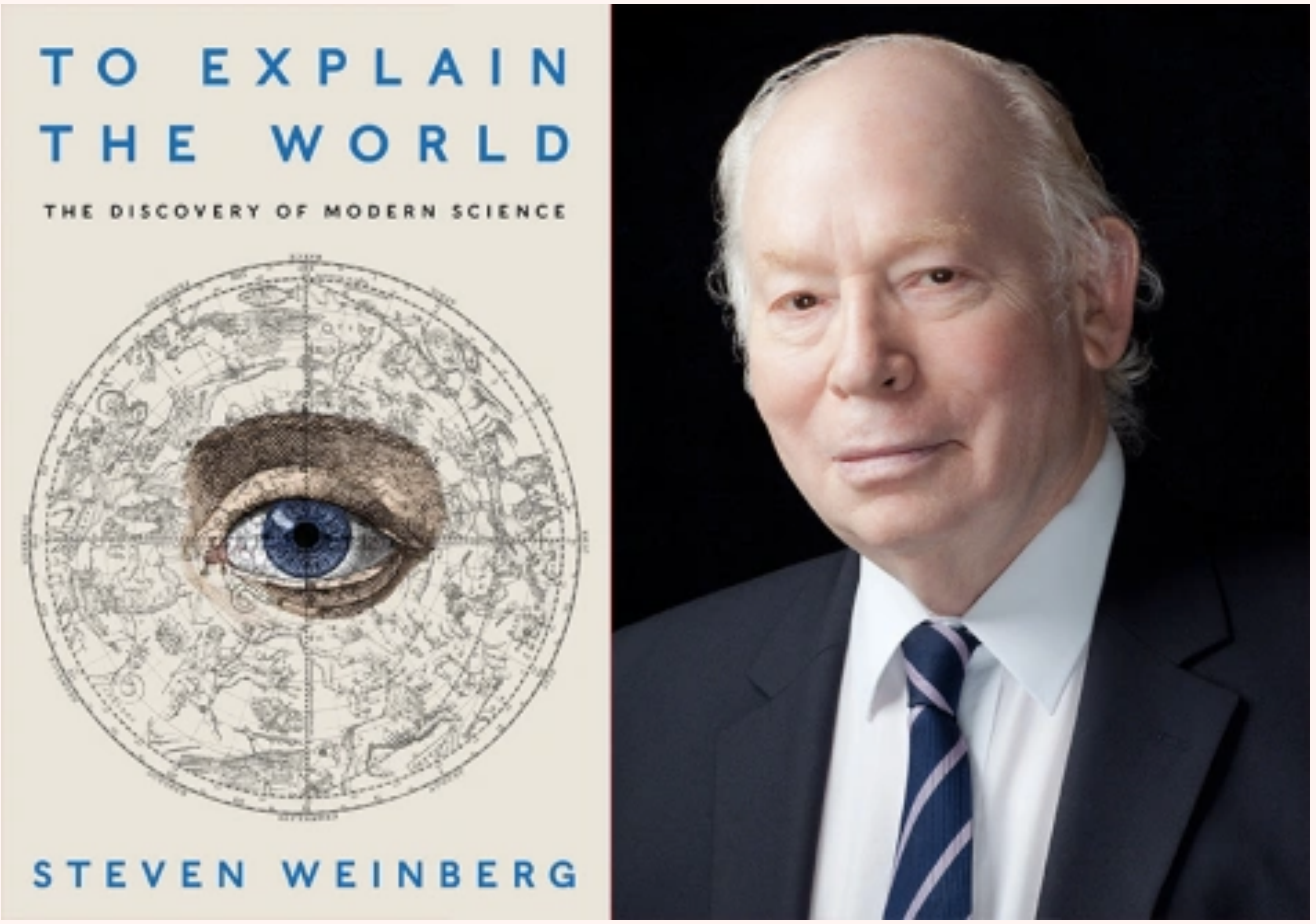
Usando planos inclinados, Galileu mostrou que a distância percorrida por um corpo acelerado uniformemente é proporcional ao quadrado do tempo.

Ele também mostrou que a trajetória de um projétil é uma parábola.

Huygens (1629-1695) desfrutou as descobertas do Galileu sobre o pêndulo e construiu o relógios mito precisos. Além disso, foi o primeiro a medir a aceleração de gravidade.

Em notação moderna: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. **Conhecendo o período T e o comprimento L do pêndulo, g é facilmente determinado.**

UMA REFERÊNCIA PARA A HISTÓRIA DA GRAVITAÇÃO, E DA CIÊNCIA EM GERAL



NEWTON (1642-1727)

Newton é principalmente conhecido pela teoria da Dinâmica (incluindo a gravitacional), mas deu contribuições marcantes também na ótica (teoria das cores, teoria corpuscular da luz) e na matemática (cálculo diferencial).

Huygens e Newton realizaram que um corpo em movimento circular uniforme possui uma aceleração, a aceleração centrípeta, que mantém o corpo na sua trajetória e lhe impede de voar embora.

O corpo então sente uma força centrífuga, proporcional a v^2/r.

Newton então se perguntou qual fosse a força centrípeta mantendo os planetas nas suas órbitas.

CORPOS CELESTES E QUEDA LIVRE

Da terceira lei de Kepler, supondo um movimento circular uniforme, o Newton calculou:

$T = \dfrac{2\pi r}{v}\ , \quad T^2 \propto r^3\ , \quad \implies \quad \dfrac{v^2}{r} \propto \dfrac{1}{r^2}\ .$ **Lei do inverso do quadrado. A "influência" (força gravitacional) que mantém um planeta na sua órbita decai com o inverso do quadrado da distância.**

O que substanciou fortemente a lei do inverso do quadrado foi o cálculo envolvendo a Lua. Ou seja, o Newton tratou a Lua como um corpo em queda livre na Terra.

$$D_L = 60 R_T\ , \quad R_T = 6371\ \text{km}\ , \quad T_L = 27.3\ \text{d}\ , \quad \implies \quad \frac{v_L^2}{D_L} = \frac{4\pi^2 D_L}{T_L^2} = 0.0027\ m/s^2$$

Se a lei do inverso do quadrado está correta, então:

$g = \dfrac{v_L^2}{D_L}\dfrac{D_L^2}{R_T^2} = \dfrac{v_L^2}{D_L}60^2 = 9.75\ m/s^2$. **"answer pretty nearly", como o Newton escreveu.**

PRINCIPIA

Definição I: massa m

Definição II: momento, p $= m$**v . (Já introduzindo a notação vetorial moderna).**

Definição III: massa inercial, aquela que um corpo opões resistindo a uma mudança no seu movimento.

Definição IV: força, o agente que tende a mudar o estado de movimento de um corpo.

Anotação (Scholium): Espaço e tempo são absolutos.

LEIS DO MOVIMENTO

Lei I (princípio de inércia): todo corpo se mantém num estado de repouso ou de movimento uniforme, se não há forças agindo nele.

Lei II: a variação do movimento é proporcional à força exercida e ocorre na mesma direção desta força. Em notação moderna (não aparecem estas equações nos *Principia*): $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$,

ou, se a massa é uma constante, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Lei III: a cada ação corresponde uma reação igual e oposta. As ações de dois corpos um no outro são iguais e ocorrem em direções opostas.

Corolário III: conservação do momento. (Exercício)

GRAVITAÇÃO NEWTONIANA

Livro III dos *Principia*: *O Sistema do Mundo*.

A força gravitacional entre dois corpos é proporcional às massas dos corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.

Imaginemos os corpos como sendo pontos (mais tarde a generalização para corpos extensos) com massas m_1, m_2 e vetores posição $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. A distância entre eles é então: $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$.

Então, a força que age na massa 1 devida à massa 2 é: $\mathbf{F}_{12} = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\dfrac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{r}$.

A direção desta força é a da reta que une os dois e o sentido é atrativo (a massa 1 é atraída pela massa 2).

A força que age na massa 2 e devida à massa 1 é igual e oposta, conforme a terceira lei da dinâmica:

$$\mathbf{F}_{21} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{r} = -\mathbf{F}_{12} \, .$$

A constante di gravitação de Newton é: $G \approx 6.67 \times 10^{-11} \quad \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$. **(primeira medida: Cavendish, 1798.)**

MASSAS

Em princípio, podemos definir pelo menos 3 tipos de massa:

- **A massa <u>inercial</u>, aquela relativa à segunda lei da dinâmica:** $\mathbf{F} = m_I \mathbf{a}$.
- **A massa gravitacional <u>passiva</u>, aquela que "sente" a força gravitacional gerada por outras massas.**
- **A massa gravitacional <u>ativa</u>, aquela que "gera" a força gravitacional.**

Por exemplo, em $\mathbf{F}_{12} = G \frac{m_1^{\text{passiva}} m_2^{\text{ativa}}}{r^2} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{r}$ **, que é a força que a massa 1 "sente",** m_1^{passiva} **seria a massa gravitacional passiva da partícula 1 enquanto** m_2^{ativa} **seria a massa gravitacional ativa da partícula 2.**

EQUIVALÊNCIA ENTRE AS MASSAS GRAVITACIONAIS

Pela terceira lei de Newton:

$$F_{12} = F_{21} \qquad \Longrightarrow \qquad G\frac{m_1^{\text{passiva}} m_2^{\text{ativa}}}{r^2} = G\frac{m_2^{\text{passiva}} m_1^{\text{ativa}}}{r^2} \; .$$

Então:

$$m_1^{\text{passiva}} m_2^{\text{ativa}} = m_2^{\text{passiva}} m_1^{\text{ativa}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{m_2^{\text{passiva}}}{m_2^{\text{ativa}}} = \frac{m_1^{\text{passiva}}}{m_1^{\text{ativa}}} \; .$$

Portanto, sendo 1 e 2 partículas arbitrárias, a razão entre as duas massas gravitacionais é uma constante universal.

Seja então, por exemplo, $m^{\text{ativa}} = \alpha m^{\text{passiva}}$ **. Podemos reescrever a lei de Newton como:**

$$G\frac{m_1^{\text{passiva}} m_2^{\text{ativa}}}{r^2} = G\frac{m_2^{\text{passiva}} m_1^{\text{ativa}}}{r^2} \qquad \Longrightarrow \qquad G\alpha^2\frac{m_1^{\text{passiva}} m_2^{\text{passiva}}}{r^2} = G\alpha^2\frac{m_2^{\text{passiva}} m_1^{\text{passiva}}}{r^2} \; .$$

Encorporando o α **no G,** $\alpha^2 G \longrightarrow G$ **, podemos tranquilamente usar <u>uma</u> massa gravitacional só. (Veja, por exemplo, Will, *Living Rev. Rel.* 17 (2014) 4).**

EQUIVALÊNCIA ENTRE MASSA GRAVITACIONAL E MASSA INERCIAL

Muito menos trivial é a equivalência entre massa gravitacional e massa inercial, que é um princípio (o princípio de equivalência fraco) e portanto só pode ser testado.

Se $m_I = m_G$ **, então:**

$$\mathbf{F}_{12} = m_1 \mathbf{a}_1 \,, \quad \mathbf{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{r} \,, \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{a}_1 = G \frac{m_2}{r^2} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{r} \,.$$

Então a dinâmica (aceleração) da partícula 1 em resposta à força gravitacional da partícula 2 não depende da massa da partícula 1! Como a partícula 1 é arbitraria, isso vale para todas as partículas. Ou seja a resposta dinâmica de uma partícula à força gerada pela partícula 2 é universal para todas as partículas.

Se a partícula 2 é a Terra: $g = G \frac{M_T}{R_T^2} \approx 9.8 \quad \mathrm{m\ s^{-2}}$ **. Essa é a universalidade da queda livre, certamente conhecida por Galileu.**

EQUIVALÊNCIA ENTRE MASSA GRAVITACIONAL E MASSA INERCIAL

Notem que $F_{12} = F_{21}$, mas as dinâmicas das partículas 1 e 2 <u>não são idênticas</u>! De fato:

$$a_1 = G\frac{m_2}{r^2} \ , \qquad a_2 = G\frac{m_1}{r^2} \ ,$$

e, em geral, $a_1 \neq a_2$, pois $m_1 \neq m_2$.

Uma forma sugestiva de dizer isso é a seguinte: a força gravitacional exercida por um ser humano sobre a Terra é igual à força exercida pela Terra sobre o ser humano! (Terceira lei de Newton) Mas a aceleração induzida pela Terra no ser humano é (na superfície) g, enquanto a aceleração induzida pelo ser humano (digamos de 100 kg) na Terra é

$$a_T = \frac{m}{M_T} g \approx 10^{-22} g \ .$$

TESTES DO PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA FRACO

Suponhamos que $m_G = m_I(1+\eta)$, pois, por algum motivo, as várias formas de energia que constituem um corpo podem contribuir diferentemente para as duas massas. Então, dois corpos diferentes, digamos 1 e 2, teriam acelerações diferentes na Terra:

$$\mathbf{a}_1 = (1+\eta_1)\mathbf{g} \,, \qquad \mathbf{a}_2 = (1+\eta_2)\mathbf{g} \,, \qquad \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = (\eta_1 - \eta_2)\mathbf{g} \,.$$

Não é prático usar corpos em queda livre, melhor usar uma balança de torção (neste caso a massa inercial contribui para a força centrífuga).

Eötvös (começo do século XX) encontrou $|\eta_1 - \eta_2| < 3 \times 10^{-9}$. Resultados modernos estão na ordem de $|\eta_1 - \eta_2| < 10^{-14}$. (Will, *Living Rev. Rel.* 17 (2014) 4).

O POTENCIAL GRAVITACIONAL

Escolha um referencial e coloque uma massa M na sua origem. Neste caso, a força exercida por M sobre uma genérica partícula de massa m e posição $\mathbf{r}$ é:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\,G\frac{mM}{r^2}\hat{r}\,, \qquad \hat{r} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}\,.$$

A força exercida depende de $\mathbf{r}$, então $\mathbf{F}(\mathbf{r})/m$ é o <u>campo di força gravitacional</u> gerado pela massa M (dividimos por m, assim esse campo só depende da massa M e da distância dela).

Lembrando da definição de <u>trabalho de uma força</u>: $W = \int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$, qual é o trabalho exercido da força gravitacional, se a massa m se movimenta ao longo de um caminho fechado?

O POTENCIAL GRAVITACIONAL

Como:

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \frac{1}{2} d(r^2) = r dr \ ,$$

Podemos escrever que o trabalho exercido pela força gravitacional, se a partícula se movimenta de um ponto A para um ponto B:

$$W_{A \to B} = - \, GmM \int_A^B \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = - \, GmM \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = - \, GmM \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = m(U_A - U_B) \ .$$

Isto é, o trabalho exercido pela força gravitacional depende essencialmente da mudança da distância radial entre m e M. Isto porque a força gravitacional é radial.

O potencial gravitacional é: $U = - \, G \dfrac{M}{r}$. **Nota: o potencial pode ser definido a menos de uma constante, pois é a <u>diferença</u> entre o potencial avaliado entre dois pontos que é igual ao trabalho.**

O POTENCIAL GRAVITACIONAL

Em particular, voltando de B para A:

$$W_{B\to A} = -\,GmM\int_B^A \frac{1}{r^3}\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = -\,GmM\int_{r_B}^{r_A}\frac{1}{r^2}dr = -\,GmM\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right) = -\,W_{A\to B}\ .$$

Então, o trabalho exercido pela força gravitacional se sairmos de A e voltarmos para A é:

$$W_{A\to A} = W_{A\to B} + W_{B\to A} = W_{A\to B} - W_{A\to B} = 0\ .$$

Ou seja, é nulo. Quando isto acontece, o campo de força se diz <u>conservativo.</u>

Perdemos qualquer referência ao ponto B e o ponto A é genérico. Isto também significa que o trabalho exercido pelo campo gravitacional, quando a massa m se movimenta de um ponto para outro, só depende do valor do potencial no ponto inicial e no ponto final, não depende da trajetória da partícula.

O POTENCIAL GRAVITACIONAL

Notem que:

$$U = -\,G\frac{M}{r}\,, \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{F} = -\,m\nabla U\,.$$

Tem outra maneira de chegar neste resultado. Usando o teorema de Stokes:

$$0 = \oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \quad \Longrightarrow \quad \int_S \mathbf{rot}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} = 0\,.$$

Como o caminho gamma é genérico, esta relação implica que o rotacional de $\mathbf{F}$ é nulo.

Um campo vetorial com rotacional nulo pode sempre ser escrito como o gradiente de uma função escalar (teorema de Helmholtz).

CAMPO GRAVITACIONAL DE UM CONJUNTO DE MASSAS

Suponham ter um conjunto de massas pontuais $\{m_i\}_{i=1}^{N}$ nas posições $\{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^{N}$. Qual é o campo de força gravitacional exercido sobre uma massa teste m na posição $\mathbf{r}$? O princípio de superposição nos diz que:

$$\mathbf{F}_{\text{tot}}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i(\mathbf{r}) = -\,Gm \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} = -\,Gm \sum_{i=1}^{N} m_i \nabla_{\mathbf{r}} \left(-\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} \right) .$$

Portanto, em termos dos potenciais gravitacionais gerados pelas várias massas:

$$\mathbf{F}_{\text{tot}}(\mathbf{r}) = -\,Gm \nabla_{\mathbf{r}} \left[\sum_{i=1}^{N} U_i(\mathbf{r}) \right] = -\,Gm \nabla_{\mathbf{r}} U_{\text{tot}}(\mathbf{r}) \,, \qquad U_{\text{tot}}(\mathbf{r}) \equiv \sum_{i=1}^{N} U_i(\mathbf{r}) \,.$$

O potencial gravitacional de um conjunto de massas é então a soma dos potenciais gravitacionais.

CAMPO GRAVITACIONAL DE UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA DE MASSAS

Suponhamos ter um corpo com densidade de massa $\rho(\mathbf{r}')$. Subdividimos ele em pedacinhos de volume infinitesimal $d\mathbf{r}'$. Cada um desses tem massa $dm = \rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'$ e então gera um potencial gravitacional infinitesimal na posição $\mathbf{r}$:

$$dU(\mathbf{r}) = -G\frac{dm}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \ .$$

Somando então todos os pedacinhos infinitesimais, isto é, integrando:

$$U(\mathbf{r}) = -G\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \ .$$

Aqui V é o volume do corpo, entendido como a porção de espaço onde a sua densidade é não nula.

Com esta fórmula podemos calcular o potencial gravitacional gerado por uma arbitrária distribuição de massa. Essa é a única equação ``que conta'', na gravitação Newtoniana.

A EQUAÇÃO DE POISSON

A equação de Poisson é uma equação diferencial para o potencial gravitacional. Para obter ela basta aplicar o operador laplaciano à equação:

$$U(\mathbf{r}) = -\,G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'}{|\,\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \ .$$

A sutileza importante aqui (deixada como exercício) é que:

$$\nabla^2_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\,\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\,4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \ ,$$

onde a delta é a delta de Dirac. Com isso, obtemos a equação de Poisson:

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) = 4\pi G\rho(\mathbf{r}) \ .$$

CAMPO GRAVITACIONAL DE UMA DISTRIBUIÇÃO ESFÉRICA DE MATÉRIA

Consideremos uma distribuição contínua e esférica de matéria, e escolhamos o centro da esfera como o centro do sistema de referência. O potencial gravitacional gerado será:

$U(\mathbf{r}) = -\,G\int_V \frac{\rho(r')d\mathbf{r}'}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$. **Note a dependência funcional de ρ.**

O denominador do integrando pode ser expandido (expansão de Laplace):

$\frac{1}{|\,\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} = \frac{1}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell}\mathscr{P}_\ell(\cos\gamma)$. **Isso para** $r > r'$, $\quad \forall r'$,

o que implica que esta expansão é valida somente para fora da esfera. Os $\mathscr{P}_\ell$ são os polinômios de Legendre.

CAMPO GRAVITACIONAL DE UMA DISTRIBUIÇÃO ESFÉRICA DE MATÉRIA

Agora podemos substituir a expansão em polinômios de Legendre na fórmula do potencial:

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{G}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\int_V \rho(r')\left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell}\mathscr{P}_\ell(\cos\gamma)d\mathbf{r}' = -\frac{G}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\int_0^R \rho(r')\left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} dr'\int_\Omega \mathscr{P}_\ell(\cos\gamma)d\Omega\ .$$

O segundo integral é nulo (pela ortogonalidade dos polinômios de Legendre), exceto se $\ell = 0$. Mas $\mathscr{P}_0 = 1$, portanto:

$U(\mathbf{r}) = -\dfrac{G}{r}\displaystyle\int_V \rho(r')d\mathbf{r}' = -\dfrac{GM}{r}\ .$ **Onde M é a massa da esfera.**

Nota, isso para $r > R$. Como exercício, calcule-se o potencial gravitacional <u>internamente</u> à esfera.

CAMPO GRAVITACIONAL DE UMA DISTRIBUIÇÃO ESFÉRICA DE MATÉRIA

Descobrimos então que o potencial gravitacional gerado por uma distribuição de massa com simetria esférica é, fora da esfera, igual ao gerado por um ponto colocado no centro da esfera e com massa igual à massa da esfera.

A força gravitacional sobre uma massa teste m será então radial:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\, m \nabla U(\mathbf{r}) = -\frac{GmM}{r^2}\hat{r}\,, \qquad r > R\,.$$

Pode-se obter o mesmo resultado geometricamente, sem considerar a expansão de Laplace (que é mais útil quando a distribuição de massa <u>não é</u> esférica).

<u>Exercício</u>: considere o campo de força gravitacional gerado por uma distribuição esférica de massa. Mostre geometricamente, por simetria, que este é radial. Use o teorema de Gauss para chegar no resultado acima.

ALGUNS COMENTÁRIOS

A dependência temporal sempre foi ignorada até agora. Porém, como o tempo é absoluto na dinâmica newtoniana, podemos recuperá-la de forma simples:

$$U(t, \mathbf{r}) = -\,G \int_V \frac{\rho(t, \mathbf{r}')\, d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \;.$$

Aqui imaginamos que a distribuição de matéria varie no tempo (usando a prescrição euleriana).

A característica mais impactante é que qualquer variação na densidade de matéria é transmitida <u>instantaneamente</u> para qualquer ponto do espaço, não importa o quanto distante. (Einstein cuida disso).

No eletromagnetismo isso não acontece. Para o potencial eletrostático:

$$V_{\rm ret}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(t_{\rm ret}, \mathbf{r}')\, d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \;, \qquad t_{\rm ret} \equiv t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \;.$$

O potencial tem um "tempo de resposta".

ALGUNS COMENTÁRIOS

Outro problema é que o potencial gravitacional, e a força, divergem se a distância de, por exemplo, duas massas pontuais tende a zero. Isto significa que a teoria de Newton tem um <u>limite de validade</u>. Podemos, por exemplo, estabelecer que:

$$\frac{GM}{d} \ll c^2 \,,$$

para evitarmos de ter que tomar em conta efeitos relativísticos. Isso implica $d \gg \frac{GM}{c^2}$, ou seja as distâncias têm de ser muito maiores do raio gravitacional de um corpo de massa M.

Ou ainda:

$d^2 \gg \frac{h^2}{M^2V^2} \approx \frac{h^2 d}{M^2 GM} \Longrightarrow d \gg \frac{h^2}{GM^3}$. **Isso para evitarmos de ter que tomar em conta a natureza de onda das partículas.**

EXERCÍCIO: O PROBLEMA DE DOIS CORPOS

Temos agora, a princípio, a ferramenta para descrever o Sistema Solar na Gravitação Newtoniana.

O problema é que encontrar as trajetória de N corpos interagindo mutuamente pela gravitação é impossível analiticamente (só numericamente).

Por sorte, para cada planeta pode-se considerar o Sol como a fonte de campo gravitacional mais relevante, e tratar os campos gravitacionais dos demais planetas como pequenas perturbações do campo gravitacional do Sol.

Resolvamos então o problema de dois corpos na gravitação Newtoniana. Sol-planeta.

Sistema Terra-Sol-Lua: problema de 3 corpos <u>restringido</u>: pontos Lagrangeanos (onde são enviados alguns satélites para observações).

Perturbações na órbita de um planeta causadas pela influência gravitacional dos demais planetas: precessão dos equinócios.

PRIMEIRO PASSO: AS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Consideremos dois corpos com simetria esférica, massas m_1 e m_2, e posições (num dado instante) $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$. Seja $\mathbf{r} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

Como vimos: $\mathbf{a}_1 = -G\dfrac{m_2}{r^3}\mathbf{r}\ , \qquad \mathbf{a}_2 = G\dfrac{m_1}{r^3}\mathbf{r}\ .$

Se definimos a posição do <u>centro de massa</u> como:

$$\mathbf{R} := \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}\ ,$$

é claro que (conforme a terceira lei da dinâmica):

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2}{m_1 + m_2} = 0\ ,$$

portanto o centro de massa se movimenta uniformemente.

REFERENCIAL DO CENTRO DE MASSA

Ao invés de tratar o problema de dois corpos nas coordenadas $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ é então mais conveniente usar $\mathbf{R}, \mathbf{r}$ pois $\ddot{\mathbf{R}} = 0$, um movimento livre.

A solução é um movimento retilíneo uniforme $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(0) + \mathbf{V}t$. Em particular, somos livres de escolher um referencial comóvel com o centro de massa (pois a dinâmica Newtoniana é invariante sob transformações de Galileu) e então podemos escolher $\mathbf{R}(t) = 0\ , \quad \forall t\ .$

Portanto, sobra somente a equação do movimento para a separação relativa:

$$\mathbf{a} := \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = -\,G\frac{(m_1 + m_2)}{r^3}\mathbf{r}\ .$$

Então reduzimos o problema de dois corpos a um problema efetivo de um corpo.

ENERGIA DO SISTEMA DE 2 CORPOS

A energia do sistema de 2 corpos é (soma da energia cinética e da energia potencial):

$$E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - G\frac{m_1 m_2}{r} \ .$$

Introduzindo $\mathbf{R}, \mathbf{r}$ ao invés de $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ obtém-se (exercício):

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 - G\frac{(m_1 + m_2)\mu}{r} \ , \quad \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ .$$

Como podemos escolher o referencial do centro de massa:

$$E_{\text{cdm}} = \frac{1}{2}\mu v^2 - G\frac{(m_1 + m_2)\mu}{r} \ ,$$

então o problema de 2 corpos se reduz a tratar o problema de um corpo de massa <u>reduzida</u> μ no potencial gerado pela soma das massas (tratação efetiva a 1 corpo).

TRAJETÓRIAS

Vamos resolver agora a equação do movimento:

$$\mathbf{a} = -\,G\frac{M}{r^3}\mathbf{r}\ . \qquad M := m_1 + m_2\ .$$

Escolhemos o referencial do centro de massa. A energia se torna:

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - G\frac{M\mu}{r}\ .$$

Introduzir o momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ é muito útil também, pois:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}\ .$$

Como a força é central, o momento angular é <u>constante. Então, o movimento é planar.</u>

TRAJETÓRIAS

O problema se tornou bidimensional (planar). Exercício: usando coordenadas polares, mostrar que:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -G\frac{M}{r^2}\,, \qquad r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{dt} = 0\,.$$

Além disso:

$$L = \mu r^2 \frac{d\varphi}{dt}\,.$$

Portanto:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{L^2}{\mu^2 r^3} - G\frac{M}{r^2}\,.$$

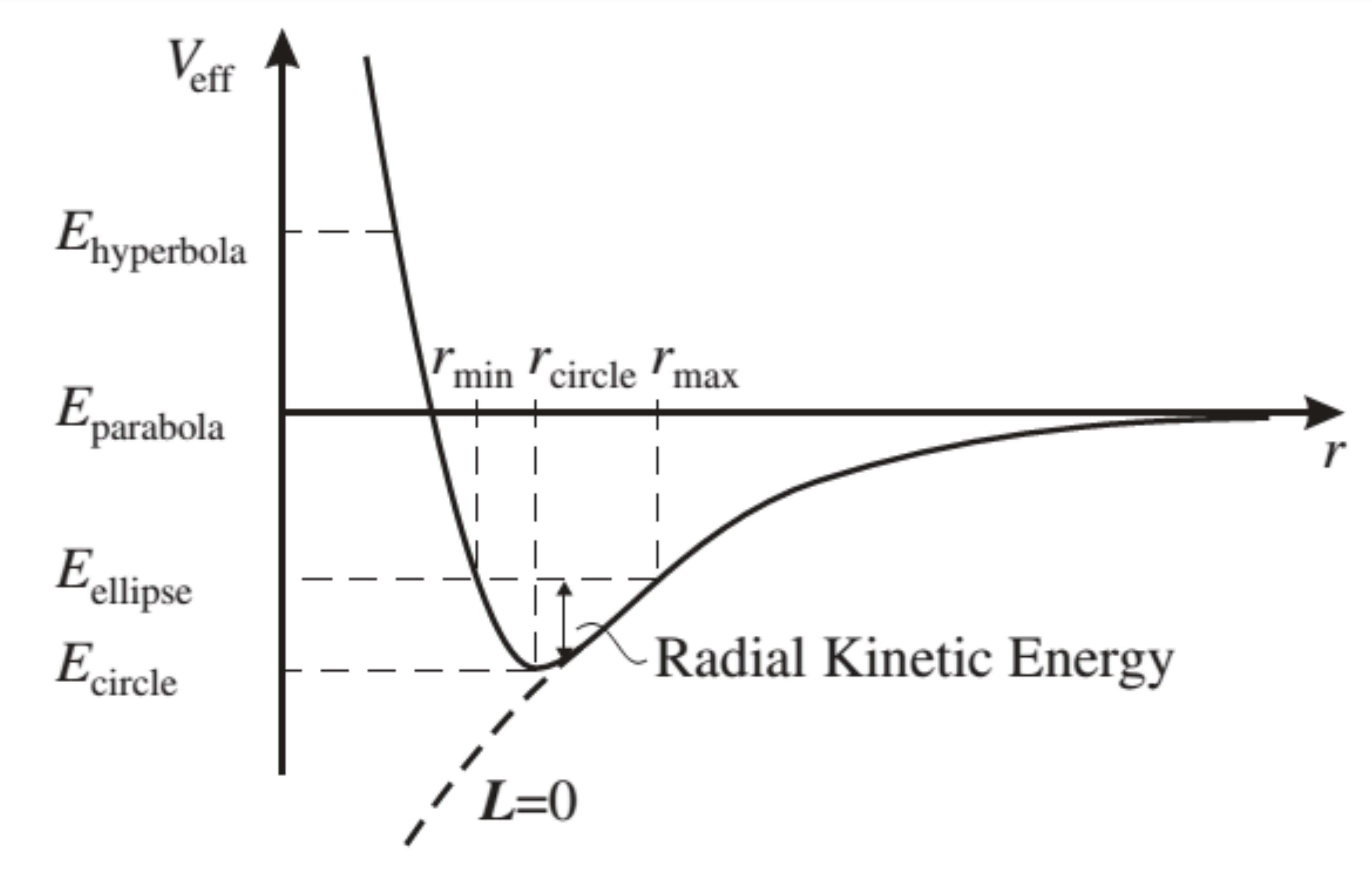
Repare-se o termo de força centrífuga, dependente do módulo quadrado do momento angular.

POTENCIAL EFETIVO

Re-escrevemos a energia em coordenadas polares (o ponto representa a derivada temporal):

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - G\frac{M\mu}{r} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - G\frac{M\mu}{r} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{\mu^2 r^2}\right) - G\frac{M\mu}{r}\,.$$

A contribuição angular desapareceu, temos apenas um movimento em uma dimensão com potencial efetivo:



https://physics.stackexchange.com/

TRAJETÓRIAS

Mais que saber a posição do planeta num dado tempo, estamos interessados na trajetória (órbita). Para isso, da expressão da energia obtemos:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E + \frac{GM\mu}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right)} \; .$$

Podemos eliminar o tempo dividindo por $\dot{\varphi} = L/(\mu r^2)$**:**

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\mu r^2}{L}\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E + \frac{GM\mu}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right)} \; .$$

Introduzindo a variável de Binet $u := 1/r$ **, a equação da trajetória pode ser encontrada por meio de integração:**

$$\varphi = \varphi_0 - \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2G\mu^2 M u}{L^2} - u^2}} \; .$$

TRAJETÓRIAS

A integral

$$\varphi = \varphi_0 - \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2G\mu^2 M u}{L^2} - u^2}} \,,$$

pode ser resolvida exatamente, dando:

$$\frac{1}{r} = \frac{GM\mu^2}{L^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{(GM\mu)^2\mu}} \cos(\varphi - \varphi_0) \right] \,.$$

Essa é a equação, em coordenadas polares, de uma cônica com fogo na origem do referencial.

TRAJETÓRIAS

$$\frac{1}{r} = \frac{GM\mu^2}{L^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{(GM\mu)^2\mu}}\cos(\varphi - \varphi_0)\right] \ .$$

A forma geral da equação, em coordenadas polares, de uma cônica com fogo no centro do referencial é:

$$\frac{1}{r} = C\left[1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)\right] \ .$$

Podemos então ler a excentricidade:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{(GM\mu)^2\mu}} \ .$$

PRIMEIRA LEI DE KEPLER PROVADA

Quando a excentricidade é zero, temos uma órbita circular. Isto requer:

$$E = -\frac{(GM\mu)^2\mu}{2L^2} \ .$$

Quando a energia é negativa, mas maior deste valor, temos uma órbita elíptica:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)} \ , \qquad a = -\frac{GM\mu}{2E} \ .$$

Assim, a primeira lei de Kepler está provada.

Nota, o cálculo acima pode ser repetido para qualquer tipo de potencial, não somente o gravitacional. Porém, somente para este e para o potencial harmônico existem trajetórias fechadas (teorema de Bertrand).

SEGUNDA LEI DE KEPLER PROVADA

Essencialmente a segunda lei de Kepler é a conservação do momento angular.

Lembrando:

$$L = \mu r^2 \dot{\varphi} \ .$$

A velocidade areal é:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\varphi \ , \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu} \ .$$

Então, constante.

TERCEIRA LEI DE KEPLER PROVADA

Lembrando:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E + \frac{GM\mu}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right)}\,, \quad \Longrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{E + \frac{GM\mu}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2}}}\,.$$

Para o movimento elíptico:

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2GM}}\int_{r_0}^{r} \frac{rdr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{2a} - \frac{a(1-e^2)}{2}}}\,.$$

TERCEIRA LEI DE KEPLER PROVADA

Para resolvermos essa integral, introduzimos uma nova variável: a anomalia excêntrica, ou periapsis:

$$r = a(1 - e\cos\psi)\ .$$

Desta forma:

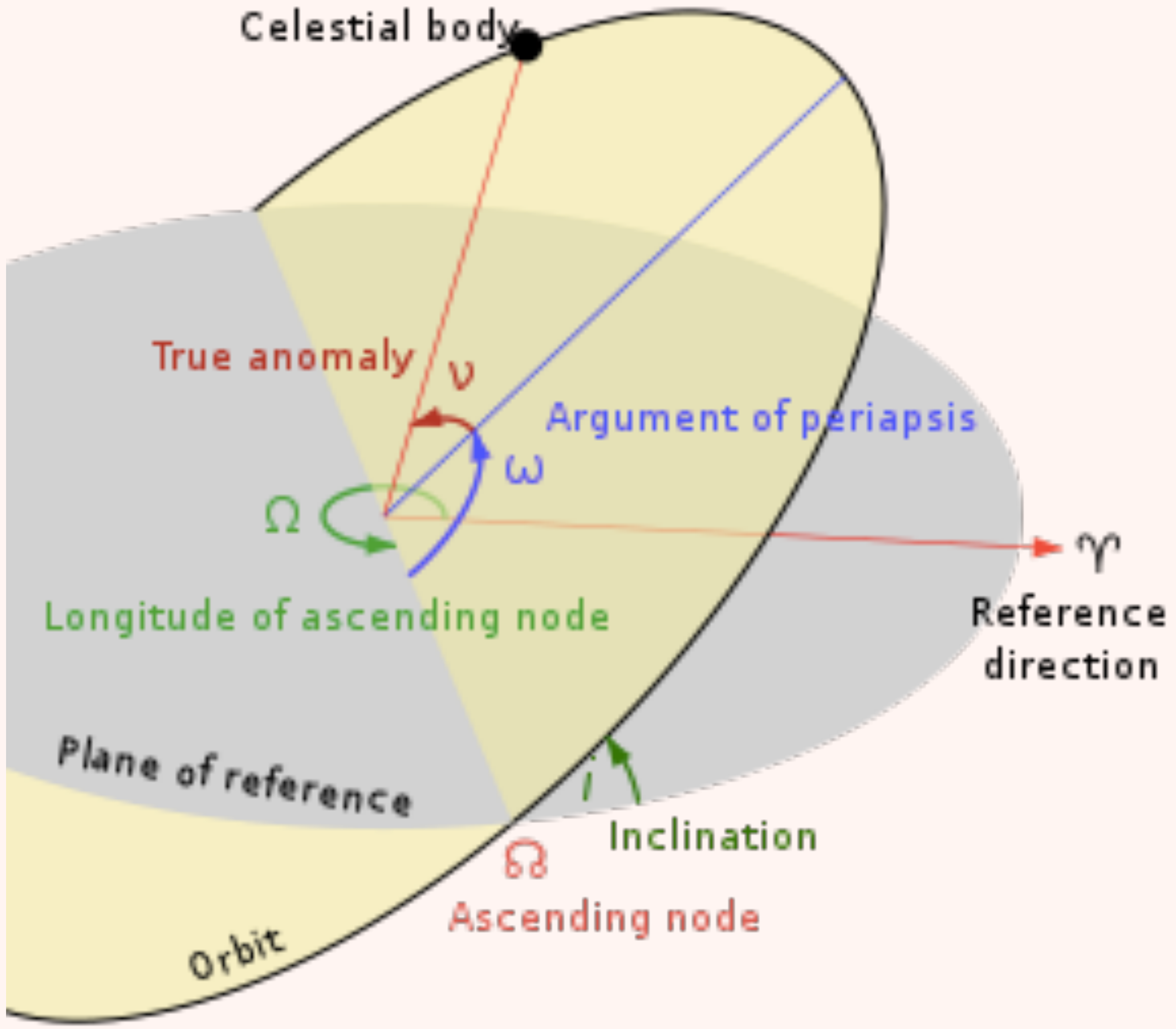
$$t = \sqrt{\frac{a^3}{GM}}\int_0^{\psi}(1 - e\cos\psi)d\psi\ .$$

Integrando sobre uma órbita completa:

$$\tau = \sqrt{\frac{a^3}{GM}}\int_0^{2\pi}(1 - e\cos\psi)d\psi = 2\pi a^{3/2}\frac{1}{\sqrt{GM}}\ .$$

Assim, a terceira lei de Kepler também fica provada (e essa prova por Newton a tornou aceitada).

ELEMENTOS KEPLERIANOS

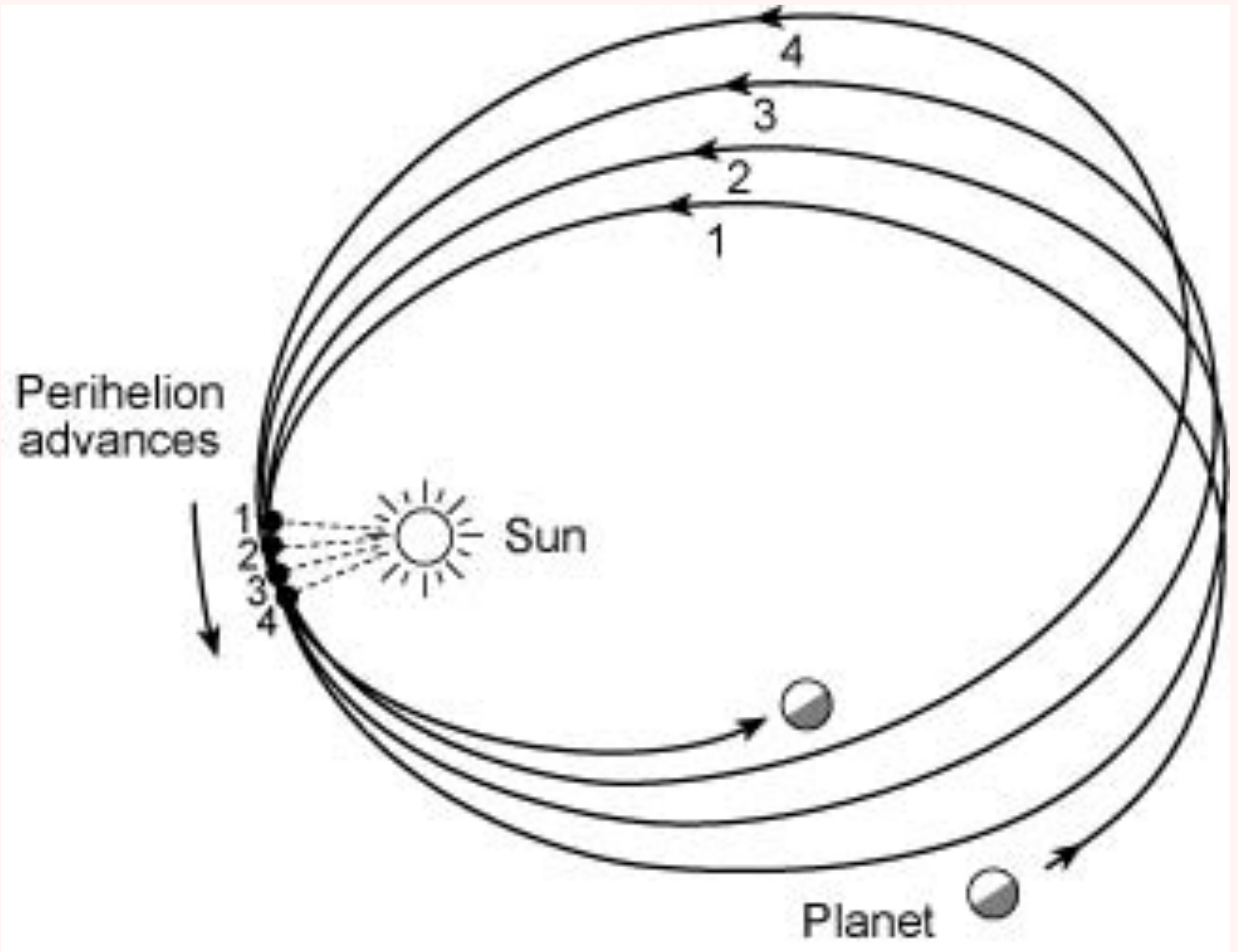


https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital_elements

VÁRIOS EXERCÍCIOS BEM DIFÍCEIS

- Considere o problema de três corpos (restringido) Sol-Terra-Lua, e calcule as posições dos pontos Lagrangeanos;

- Calcule a precessão do periélio de Mercúrio causada das perturbações no campo gravitacional do Sol devidas aos outro planetas.



MERCÚRIO

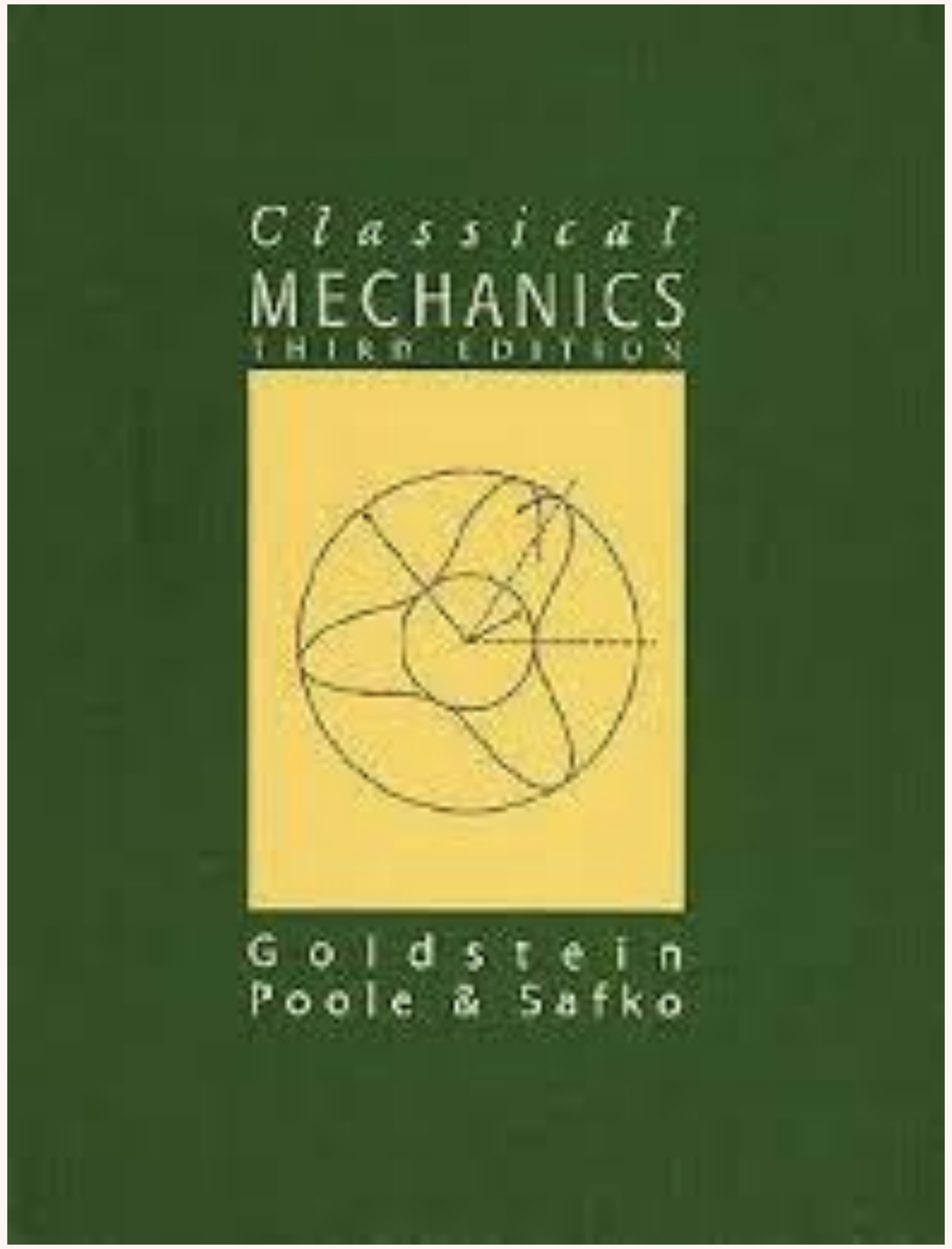
A precessão do periélio de Mercúrio observada é de cerca 575 segundos de arco por século.

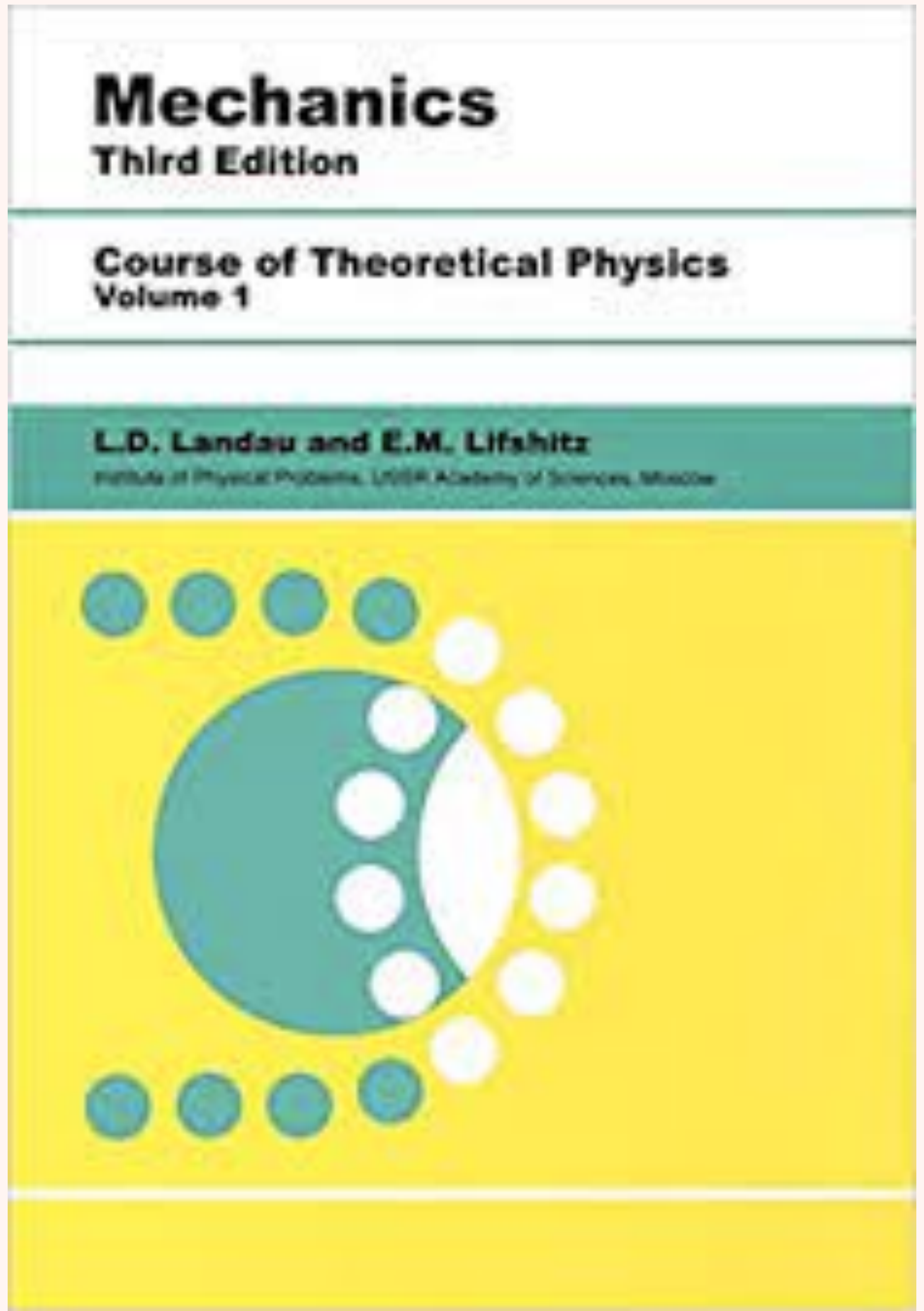
Porém, somente 532 segundos de arco podem ser explicados pelos efeitos gravitacionais dos demais planetas. Faltam 43 segundos de arco por século.

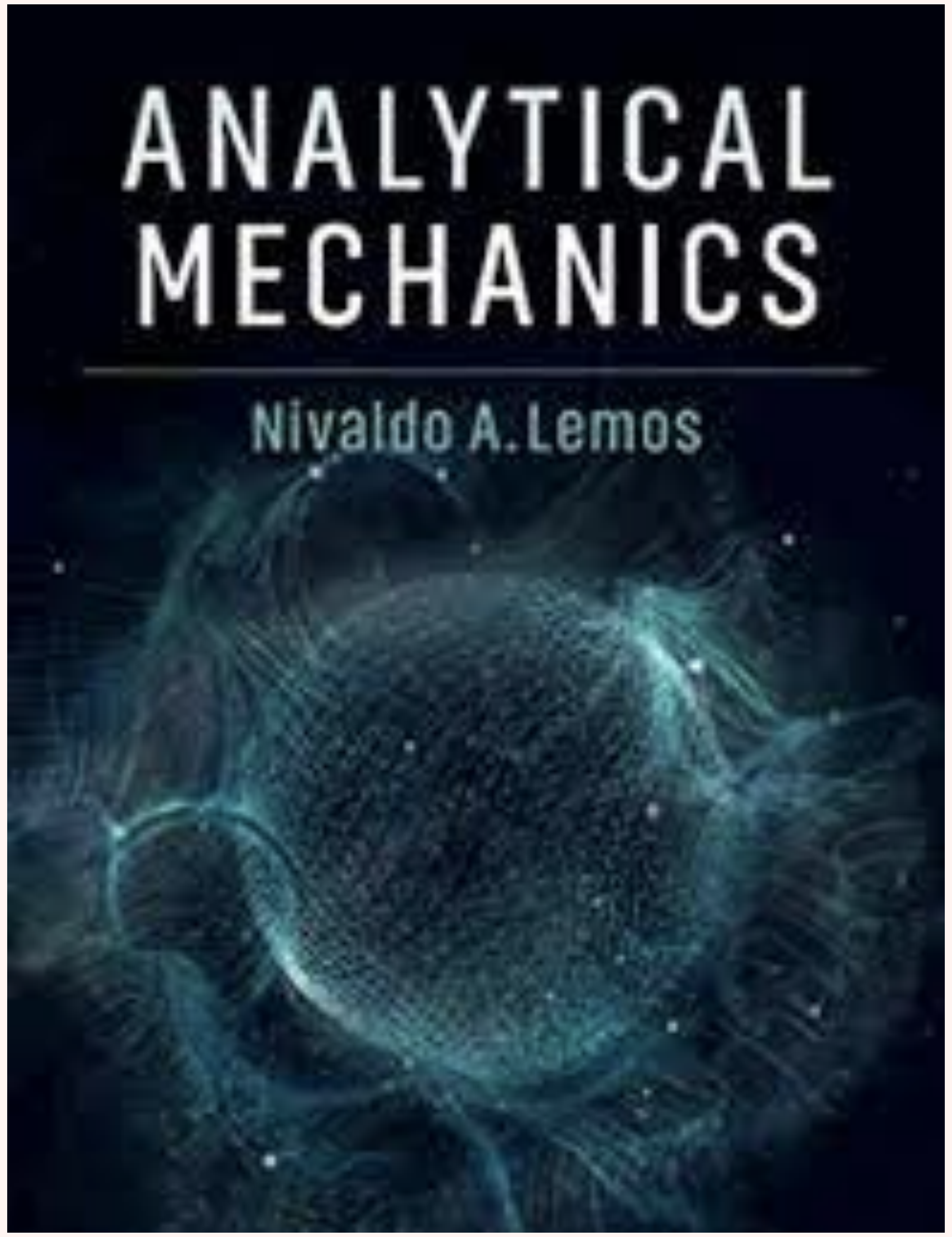
Qual a explicação para essa discrepância? Existe outro planeta entre Mercúrio e o Sol (Vulcano)? Acrescentar um planeta funcionou no caso de Neptuno.

Aqui não, precisamos estender a teoria gravitacional. Existe um paralelo com a questão da matéria escura hoje: partículas além do modelo padrão (Neptuno) ou nova teoria gravitacional (Relatividade Geral)?

REFERÊNCIAS (MECÂNICA CLÁSSICA)







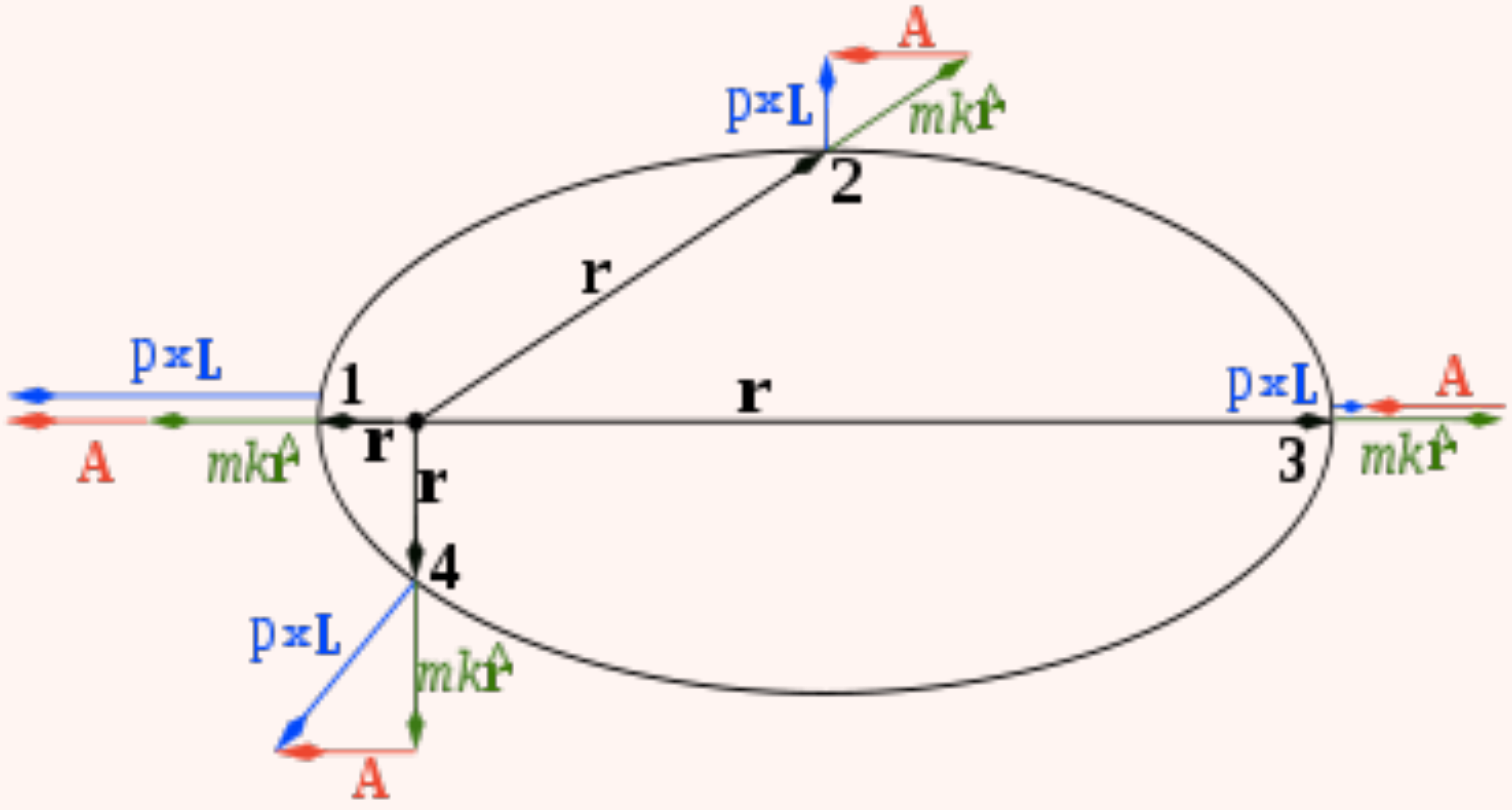
O VETOR DE LAPLACE-RUNGE-LENZ

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - GM\mu^2 \hat{r} \; .$$

É constante em direção e magnitude.

Permite reescrever a solução ao problema de Kepler de forma mais compacta:

$$\frac{1}{r} = \frac{GM\mu^2}{L^2} + \frac{A}{L^2}\cos(\varphi - \varphi_0) \; .$$



POTENCIAL NEWTONIANO RETARDADO

Possibilidade de descrever o avanço do periélio de Mercúrio.

PLANETARY MOTION IN A RETARDED NEWTONIAN POTENTIAL FIELD

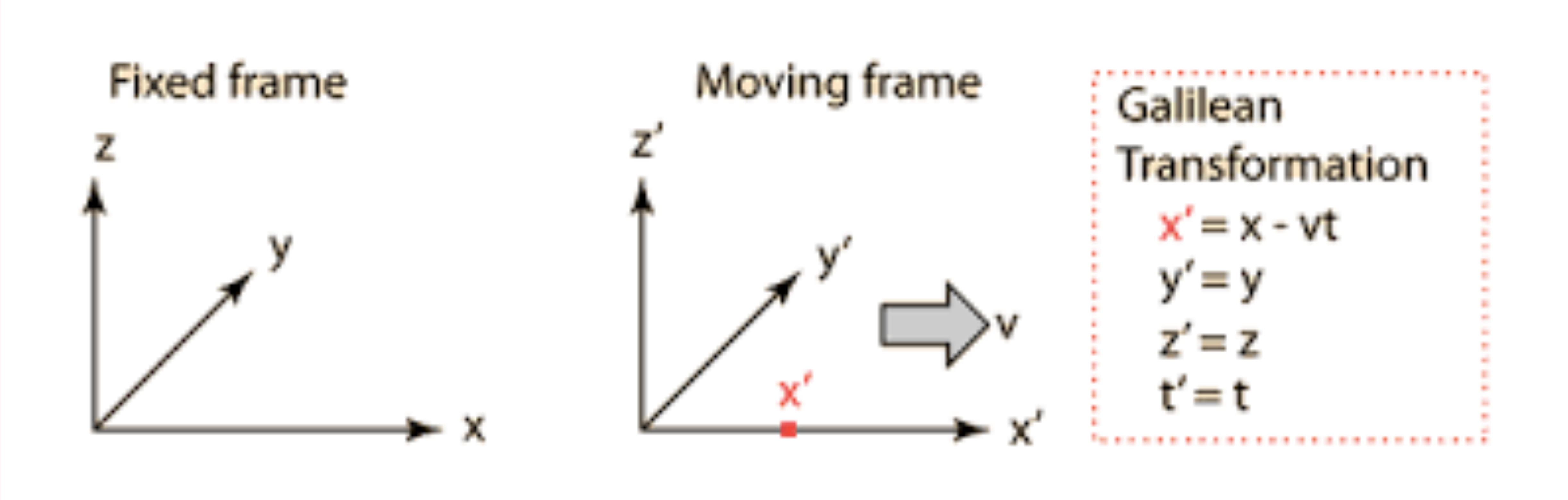
BY ROY J. KENNEDY*

DEPARTMENT OF PHYSICS, CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Communicated July 31, 1929

INTERMEZZO: RELATIVIDADE RESTRITA

Havia um problema com a eletrodinâmica de Maxwell: as equações não são invariantes sob uma transformação de Galileu. Isto implicaria uma quebra do princípio de relatividade?



$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

INTERMEZZO: RELATIVIDADE RESTRITA

Segundo Einstein (1905), não. O princípio de relatividade continua valendo (é verificado experimentalmente) e a eletrodinâmica de Maxwell é correta.

Reparem que a velocidade da luz entra nas equações de Maxwell. Para então satisfazermos o princípio de Relatividade, c tem que ser uma constante universal (não depende do referencial escolhido). Mas c é uma velocidade!

O que tem de modificar são as transformações de Galileu. Tem que passar para as transformações de Lorentz. Nestas o tempo também transforma.

THE LORENTZ-EINSTEIN TRANSFORMATIONS

$x' = \gamma(x - vt)$	$x = \gamma(x' + vt')$
$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$z = z'$
$t' = \gamma(t - vx/c^2)$	$t = \gamma(t' + vx'/c^2)$

with $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, where v is the velocity of S' as measured in S (3–16)

INTERMEZZO: RELATIVIDADE RESTRITA

As transformações de Galileu são o limite para a velocidade da luz que tende ao infinito das de Lorentz.

Interpretação geométrica das transformações de Lorentz e conceito de espaço-tempo: Minkowski (1908). Espaço de Minkowski.

Métrica: como medir distâncias no espaço-tempo.

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \ .$$

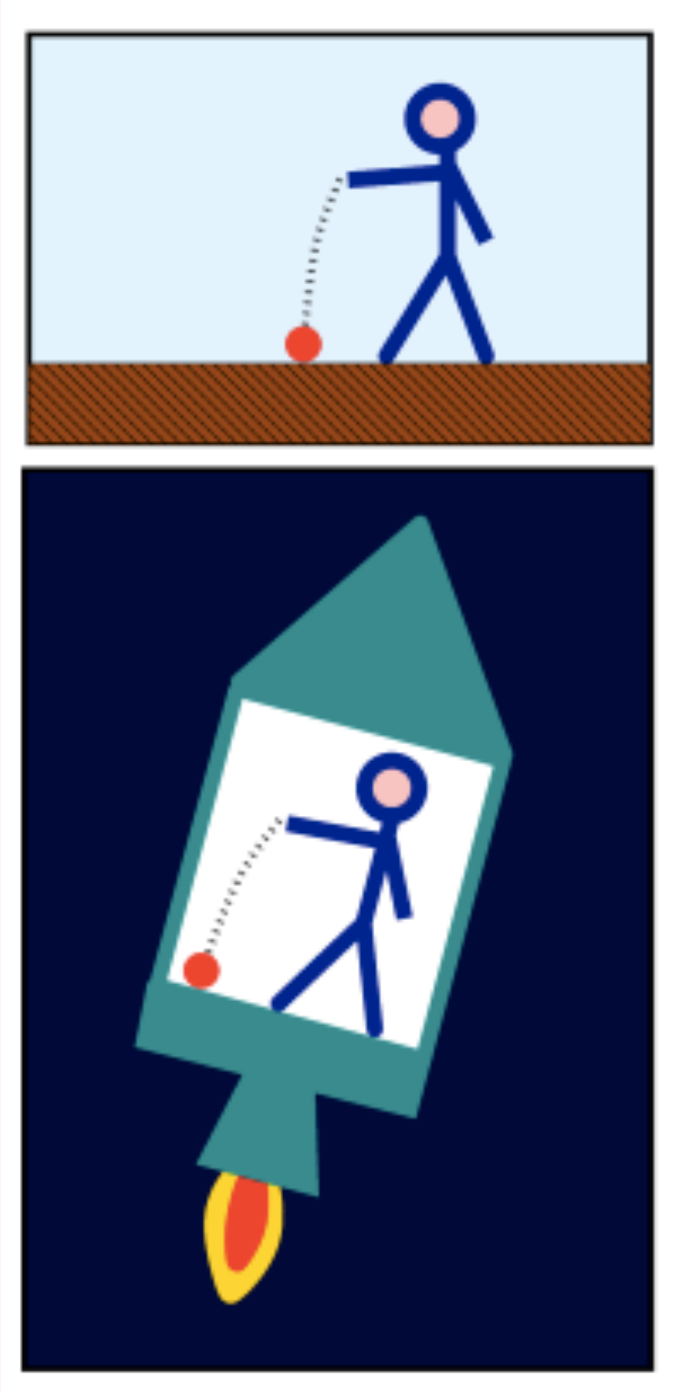
$$\eta_{\mu\nu} = \mathbf{diag}(-1,1,1,1) \ .$$

Da invariância sob rotações à invariância sob as transformações de Lorentz: do conceito de vetor na mecânica clássica ao conceito de quadrivetor.

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} x^\nu \ , \qquad \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma} \ .$$

O PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA

(Einstein, 1911) Em queda livre, não sentimos mais o campo gravitacional (a parte efeitos de maré). Num referencial acelerado somos puxados exatamente como nos puxa a gravidade.



A MÉTRICA

A equivalência não é global, mas vale localmente (num ponto). Então a gravidade é como uma força inercial, mas não exatamente (no sentido que não é fictícia).

Escolhendo um referencial oportuno (inercial ou de queda livre) então eliminamos os efeitos da gravitação:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu \ .$$

Isto vale somente em um ponto. Em ausência de outras interações temos então Relatividade Restrita. Trocando de coordenadas (covariância geral) temos:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\rho} dx^\rho \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma} dx^\sigma \ , \Longrightarrow ds^2 = g_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma \ .$$

O campo gravitacional está então descrito pela <u>métrica</u> $g_{\rho\sigma}$. Não tem então 1 potencial, mas sim 10!

A EQUAÇÃO DA GEODÉSICA

Novamente, escolhendo um referencial oportuno (inercial ou de queda livre) a equação do movimento é (aceleração nula):

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = 0 \, .$$

Trocando de coordenadas (covariância geral) temos:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \, , \qquad \Gamma^\mu_{\nu\rho} \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\sigma}\right) \, .$$

Essa equação já era conhecida antes do Einstein. Essa descreve o caminho mais breve num espaço curvo.

LIMITE NEWTONIANO

Em caso de baixas velocidades num campo fraco estacionário:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \text{ , } \textbf{se torna } \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \text{ ,}$$

Como o campo é fraco podemos escrever a métrica como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, **com** $h_{\mu\nu} \ll 1$ **e como** $\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{00,\nu}$, **temos que:**

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{1}{2}\nabla h_{00} \text{ .}$$

Comparando com o caso newtoniano, temos então $g_{00} = -(1 + 2U)$.

CURVATURA

Vimos que: $\eta_{\mu\nu}\dfrac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\rho}\dfrac{\partial\xi^\nu}{\partial x^\sigma} = g_{\rho\sigma}$.

Os $g_{\rho\sigma}$ **são 10 enquanto os** $\dfrac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\rho}$ **são 16. Ou seja, temos infinitos referenciais em queda livre (pois há invariância de Lorentz local, 6 graus de liberdade a mais).**

Na conexão afim temos $\Gamma^\mu_{\nu\rho} \equiv \dfrac{\partial x^\mu}{\partial\xi^\alpha}\dfrac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\nu\partial x^\rho}$**, 40 objetos, que podem ser escolhidos nulos.**

A derivada segunda da métrica $\dfrac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}$ **são 100 objetos, mas os** $\dfrac{\partial^3\xi^\alpha}{\partial x^\nu\partial x^\rho\partial x^\sigma}$ **são 80. Sobram 20 componentes que não podemos por a zero por meio de uma transformação de coordenadas. Estas constituem a curvatura.**

TENSOR DE CURVATURA

As derivadas segundas e primeiras da métrica podem ser organizadas no <u>tensor de curvatura:</u>

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} \ .$$

Este é o <u>único</u> tensor que pode ser construído a partir da métrica e suas derivadas até a segunda e linear nestas últimas.

Tensor: se $x^{\mu} \longrightarrow x^{\mu'}(x)$ **então**

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\sigma}} \ .$$

ANALOGIA COM TEORIAS DE CALIBRE NÃO ABELIANAS

Transformação de calibre não abeliana <-> Transformação de coordenadas

Derivada covariante $\longleftrightarrow$ **Derivada covariante**

Campo de calibre $A^{\alpha}{}_{\mu} \longleftrightarrow$ **Conexão afim** $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$

Field strength $F^{\alpha}{}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^{\alpha}{}_{\nu} - \partial_\nu A^{\alpha}{}_{\mu} + C^{\alpha}{}_{\beta\gamma} A^{\beta}{}_{\mu} A^{\gamma}{}_{\nu} \longleftrightarrow$ **Tensor de Riemann** $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$

A analogia porém não é completa. O campo de calibre numa teoria abeliana é fundamental, enquanto a conexão afim se expressa em termos da derivadas primeira da métrica.

EQUAÇÕES DA RELATIVIDADE GERAL

Como o tensor de curvatura é o único que existe linear nas derivadas segundas, se procuramos equações de campo de segunda ordem para a métrica a possibilidade mais natural é a seguinte:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \; .$$

Estas são as equações de Einstein. O lado esquerdo é o chamado tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \; , \qquad R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu} \; , \qquad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \; .$$

O lado direito representa o conteúdo material (tensor energia-momento). Em Relatividade Geral não somente a massa gravita mas toda forma de energia (o momento também).

O PROBLEMA DE MERCÚRIO RESOLVIDO

Em RG nem o problema de dois corpos sabe-se resolver. Mas no Sistema Solar não precisa. As correções relativísticas são importantes somente para Mercúrio.

Podemos incluir as correções relativísticas no potencial Newtoniano do Sol de forma muito simples. O acordo observacional é espetacular.

Os 43 segundos de arco que faltavam são agora explicados.

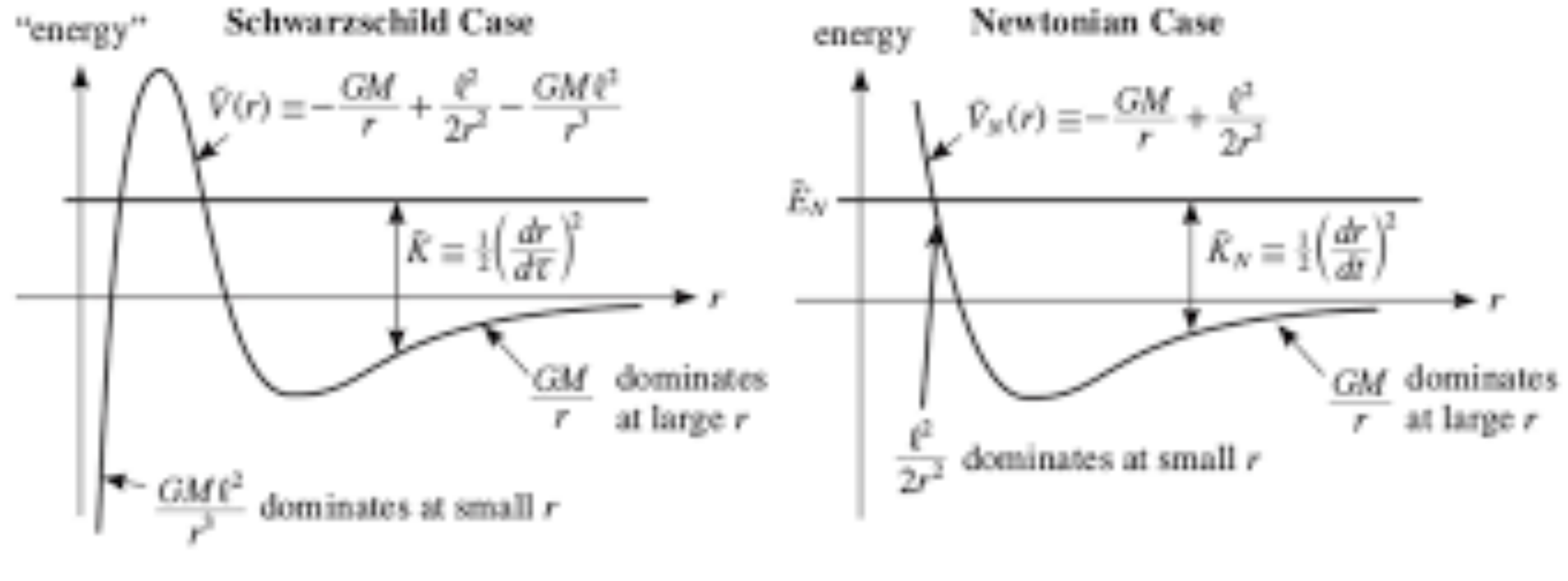


FIG. 10.1 These graphs show the effective potential-energy-per-unit-mass functions governing radial motion in the Schwarzschild case (left) and Newtonian case (right).

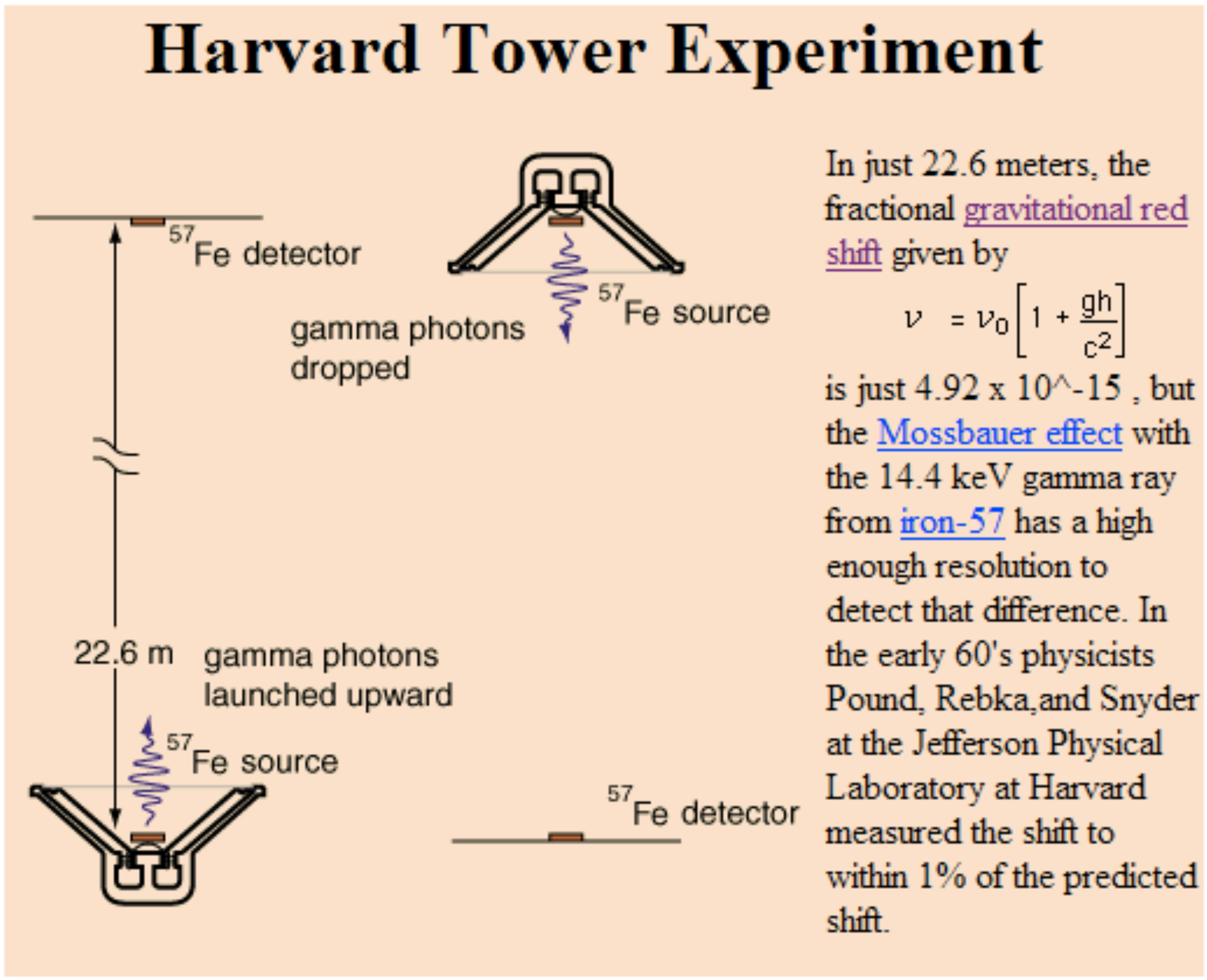
TESTES CLÁSSICOS DE RELATIVIDADE GERAL

O redshift gravitacional (Pound e Rebka, 1959)

Precessão do periélio de Mercúrio

Deflexão do raios de luz

(Retardo de Shapiro)



MAIS TESTES

Predição da RG. Existência debatida por várias décadas. Detecção em 2015.

Sistemas de pulsares: laboratório de RG.