Espaço e tempo.*

por HERMANN MINKOWSKI em Göttingen.†

Meus senhores! As concepções de espaço e tempo que gostaria de desenvolver aqui para vocês amadureceram no terreno da física experimental. Aqui está a força delas. Sua tendência é radical. A partir de agora, as noções de espaço e tempo como entidades separadas devem cair nas sombras e apenas uma espécie de união de ambos os conceitos deve manter a autonomia.

I.

Em primeiro lugar, gostaria de explicar como é possível chegar da mecânica moderna a diferentes concepções de espaço e tempo apenas por meio de um puro raciocínio matemático. As equações da mecânica newtoniana mostram uma invariância dupla. Em primeiro lugar, sua forma permanece inalterada se um sistema de coordenadas espaciais predeterminado é submetido a uma arbitrária *mudança de posição*, e, em segundo lugar, se seu estado de movimento é alterado, no sentido de ser submetido a um qualquer movimento de *translação uniforme*; a origem do tempo também não desempenha papel algum. Estamos acostumados a considerar os axiomas da geometria como supérfluos quando nos sentimos maduros para os axiomas da mecânica e, portanto, essas duas invariâncias são mencionadas raramente e brevemente. Cada uma delas implica um certo grupo de transformações para as equações diferenciais da mecânica. A existência do primeiro grupo é considerada uma característica fundamental do espaço. O segundo grupo é penalizado, pois preferencialmente ignorado, de modo a deixar passar levianamente o fato de que nunca se pode decidir, a partir de fenômenos físicos, se o espaço que se supõe estar em repouso não está, ao invés, no final em movimento de translação uniforme. Assim, esses dois grupos levam uma existência completamente separada, lado a lado. Seu caráter totalmente heterogêneo pode ter dissuadido de compô-los. Mas precisamente o grupo completo composto nos dá a pensar.

Queremos tentar determinar graficamente as ideias. Sejam x, y, z coordenadas retangulares para o espaço, e t indique o tempo. De acordo com nossa percepção, posições e tempos estão sempre ligados. Ninguém determina uma posição, a não ser que em algum tempo, e um tempo, a não ser que em uma determinada posição. Mas ainda respeito o dogma pelo qual o espaço e o tempo cada um tem um significado independente. Eu quero chamar um ponto no espaço em um determinado momento,

*Seminário realizado por ocasião do 80º Encontro de Física (*Naturforscher*, naturalistas, hoje físicos, *NdT*) em Colônia em 21 de setembro de 1908

†Título original: *Raum und Zeit.* Publicado em: *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Leipzig, 1909.* Traduzido por Oliver F. Piattella.

ou seja, um sistema de valores x, y, z, t, um *evento*.[1] A multiplicidade de todos os sistemas de valores possíveis x, y, z, t será chamado de *espaço-tempo*.[2] Eu poderia corajosamente traçar os quatro eixos do espaço-tempo com um giz no quadro negro. Já *um* eixo desenhado consiste em moléculas que oscilam fortemente e além disso viaja com a Terra no espaço, dando assim o suficiente para abstrair; a abstração um pouco maior em relação ao número 4 não prejudica o matemático. Para não deixar em nenhum lugar um vazio chato, queremos imaginar que há algo perceptível em todas as posições e em todos os tempos. Para não dizer matéria ou eletricidade, vou precisar para este algo da palavra "substância". Vamos direcionar nossa atenção para o ponto substancial no evento x, y, z, t e vamos nos imaginar sermos capazes de reconhecer esse ponto substancial a qualquer outro tempo. A um elemento de tempo dt correspondem as variações dx, dy, dz das coordenadas espaciais deste ponto substancial. Obtemos assim como uma imagem da vida inteira, por assim dizer, do ponto substancial uma curva no espaço-tempo, a *linha de universo*,[3] cujos pontos podem ser colocados em correspondência única com o parâmetro t de $-\infty$ a ∞. Todo o espaço parece ser resolvido nessas linhas de universo e eu também gostaria de antecipar que, de acordo com a minha opinião, as leis físicas poderiam encontrar sua expressão mais completa como relações de troca entre essas linhas de universo.

Com os conceitos de espaço e tempo a variedade espacial x, y, z em $t = 0$ pode ser distinta das demais duas para $t > 0$ e $t < 0$. Considerando para simplicidade a origem do espaço e do tempo, o grupo da Mecânica mencionado por primeiro implica que podemos submeter os eixos x, y, z em $t = 0$ à rotação arbitrária em torno da origem, que corresponde às transformações lineares e homogêneas da expressão

$$x^2 + y^2 + z^2 \tag{1}$$

em si. No entanto, o segundo grupo diz que, sem mudar a expressão das leis mecânicas, podemos substituir

$$x, y, z, t \text{ per } x - \alpha t, y - \beta t, z - \gamma t, t \tag{2}$$

com arbitrarias constantes α, β, γ. Consequentemente, pode ser dada ao eixo do tempo uma direção completamente arbitrária para a metade superior do espaço-tempo $t > 0$. Agora, o que o pedido de ortogonalidade no espaço tem a ver com essa liberdade completa do eixo temporal para cima?

Para criar uma conexão, tomemos um parâmetro positivo c e consideremos a estrutura

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1\ . \tag{3}$$

Esta consiste em duas folhas separadas por $t = 0$, pensando justamente na analogia com um hiperboloide de duas folhas. Consideremos a folha na região $t > 0$ e dêmos agora uma interpretação para essa transformação homogênea linear de

[1] Ndt. Minkowski escreve: *Weltpunkt*, ou seja, *ponto do universo*. No entanto, eu uso nesta tradução a terminologia atual, traduzindo literalemente a terminologia de Minkowski original em uma nota de rodapé.

[2] Ndt. *Welt*, ou seja *mundo*.

[3] NdT. *Weltlinie*, que em português mantém a tradução literal.

x, y, z, t em quatro novas variáveis x', y', z', t', nas quais esta folha irá se expressar correspondentemente. A essas transformações obviamente correspondem as rotações do espaço em torno da origem. Nós temos um entendimento completo das transformações restantes assim que olhamos para uma destas, então y e z permanecem inalterados. Desenhamos (Fig. 1) a seção daquela folha com o plano dos eixos x e t, que é o ramo superior da hipérbole $c^2t^2 - x^2 = 1$, com seus assíntotos.

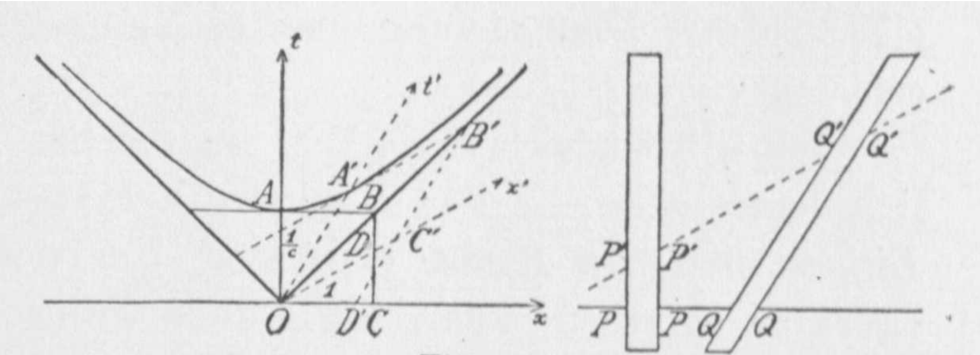

Fig. 1.

Além disso, desenhemos um raio vetorial arbitrário OA' deste ramo da hipérbole a partir da origem O, desenhemos também a tangente em A' à hipérbole até a interseção B' com o assíntoto que se encontra à direita, completemos $OA'B'$ no paralelogramo $OA'B'C'$ e, finalmente, precisaremos dele mais tarde, estendemos $B'C'$ até que o eixo x seja cruzado em D'. Agora consideremos OC' e OA' como eixos para as novas coordenadas x' e t' com unidades de medida $OC' = 1$ e $OA' = 1/c$, para que o ramo da hipérbole tenha novamente a expressão $c^2t'^2 - x'^2 = 1$, $t' > 0$, e a transição de x, y, z, t a x', y', z', t' é uma das transformações em questão.[4] Acrescentamos agora às transformações descritas acima os deslocamentos arbitrários das origens do espaço e do tempo e, assim, constituímos um grupo de transformações que obviamente depende do parâmetro c e que denoto por G_c.

Vamos agora fazer crescer c até o infinito, portanto $1/c$ converge para zero; então fica claro pela figura descrita que o ramo da hipérbole adere cada vez mais ao eixo x, o ângulo das assíntotas se alarga até que se torne um ângulo plano, aquela transformação especial fica no limite tal que o eixo t' pode ter uma direção ascendente arbitrária e x' se aproxima de x com precisão crescente. Comparado com o que vimos acima, é claro que o grupo G_c no limite para $c = \infty$, portanto o grupo G_∞, torna-se precisamente aquele grupo completo relativo à mecânica newtoniana. Dado isso, uma vez que G_c é matematicamente mais compreensível do que G_∞, um matemático pode muito bem ter fantasiado sobre a ideia de que os fenômenos naturais, em última análise, realmente possuem uma invariância não sob o grupo G_∞, mas sim sob um grupo G_c com c determinado e finito, *extremamente grande* apenas nas unidades de medida habituais. Tal intuição seria um

[4]NdT. A equação da hipérbole permanece $c^2t'^2 - x'^2 = 1$ mesmo no sistema com linha porque este foi construído de tal forma que a assíntota continue a ser $ct' = x'$.

triunfo da matemática pura. Agora, a matemática aqui promete apenas armadilhas, mas ela fica com a satisfação de ser capaz de compreender, graças às suas experiências passadas e felizes com seus sentidos aguçados na previsão livre, as profundas consequências de tal reformulação de nossa compreensão da natureza.

Quero notar imediatamente qual será o valor de c no final. Para c irá entrar *a velocidade de propagação da luz no espaço vazio.* Sem mencionar o espaço ou o vazio, podemos caracterizar esta grandeza novamente como a relação entre a unidade elétrica e a magnética da quantidade de eletricidade.[5]

A existência da invariância das leis da natureza sob o grupo G_c seria agora expressada da seguinte forma:

Da totalidade dos fenômenos naturais, por meio de aproximações sucessivas e mais exatas, podemos deduzir um sistema de referência x, y, z e t, espaço e tempo, por meio do qual esses fenômenos são representados de acordo com certas leis. No entanto, durante esse processo, esse sistema de referência não é de forma alguma determinado univocamente pelos próprios fenômenos naturais. *Podemos mudar o sistema de referência à vontade, de forma correspondente às transformações do grupo denominado G_c, sem que a expressão das leis da natureza mude ao mesmo tempo.*

Por exemplo, o t' da figura descrita acima também pode ser chamado de tempo, mas o espaço deve necessariamente ser definido ao mesmo tempo com a variedade dos três parâmetros x, y, z, para que agora as leis físicas possam ser expressadas com x', y, z, t' exatamente da mesma maneira como são expressadas com x, y, z, t. Daqui deduzimos que não teríamos mais *o* espaço no espaço-tempo, mas um número infinito de espaços, da mesma forma que no espaço tridimensional, temos um número infinito de planos. A geometria tridimensional se torna um capítulo da física quadridimensional. Agora, entendem por que eu, na introdução, disse que o espaço e o tempo deveriam desaparecer nas sombras e apenas o espaço-tempo deveria existir em seu lugar.

II.

A questão agora é: que circunstâncias nos obrigam a aceitar a interpretação modificada do espaço e do tempo? Essa nova interpretação nunca contradiz os fenômenos físicos e garante, afinal, algumas vantagens para a descrição dos fenômenos naturais?

Antes de lidarmos com isso, vamos começar com uma observação importante. Tendo individualizado, de alguma forma, espaço e tempo, para um ponto substancial em repouso há, portanto, como linha de universo, uma linha reta paralela ao eixo t, para um ponto substancial que se move uniformemente corresponde uma linha reta inclinada em relação ao eixo t, para um ponto substancial em movimento não uniforme, uma linha de universo encurvada de alguma forma. Imaginando em um evento arbitrário x, y, z, t a linha de universo que o cruza, e encontrando-a paralela a algum raio vetorial OA' do ramo da hipérbole referido antes, então podemos introduzir OA' como novo eixo temporal e de acordo com os novos conceitos de

[5]NdT. Ou seja $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, onde ϵ_0 é a constante dielétrica do vácuo e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo (então o conceito de vácuo entra de qualquer maneira).

espaço e tempo dados, a substância no evento em questão parece estar em repouso. Agora queremos apresentar este axioma fundamental:

A substância dada em um evento genérico pode sempre ser interpretada como em repouso, estabelecendo espaço e tempo apropriadamente.

O axioma significa que em cada evento a expressão

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{4}$$

é sempre positiva ou, equivalentemente, que qualquer velocidade v é sempre menor que c. Portanto, c constituiria um limite superior para todas as velocidades substanciais e precisamente aqui encontraríamos o significado mais profundo da quantidade c. Na última interpretação, o axioma parece ter, à primeira vista, algo errado. No entanto, devemos pensar que agora toma conta uma mecânica modificada, em que entra a raiz quadrada daquela relação diferencial de segunda ordem, de modo que casos com velocidade superluminal passarão a desempenhar apenas um papel mais semelhante àquele que, por exemplo, figuras com coordenadas imaginárias desempenham na geometria.

O*incentivo* e real motivo *da assunção do grupo G_c* veio apenas do fato de que a equação diferencial para a propagação das ondas de luz no vácuo possui invariância sob esse grupo G_c.[6]) Por outro lado, o conceito de corpo rígido só faz sentido em uma mecânica com o grupo G_∞. Agora, tendo uma ótica com G_c e por outro lado corpos rígidos, é fácil prever que através dos dois ramos da hipérbole, pertencentes a G_c e a G_∞, *uma* direção temporal seria distinguida, e isso também teria a consequência de que com instrumentos óticos rígidos adequados em laboratório deveria ser possível perceber uma mudança nos fenômenos naturais de acordo com uma orientação diferente em relação à direção do movimento da Terra. Todos os esforços direcionados a esse objetivo, entre outros um famoso experimento de interferência de Michelson, no entanto, não tiveram, êxito. Para esclarecer este fato, H. A. Lorentz construiu uma hipótese cujo sucesso encontra-se precisamente na invariância da ótica sob o grupo G_c. De acordo com Lorentz, qualquer corpo em movimento deve sofrer um encurtamento na direção do movimento e, precisamente, no caso de uma velocidade v, de uma relação

$$1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ . \tag{5}$$

Essa hipótese parece extremamente fantástica. Porque a contração não deve ser pensada como consequência, por exemplo, da resistência do éter, mas puramente como um presente de cima, como uma circunstância concomitante com o estado de movimento.

Quero mostrar agora em nossa figura que a hipótese de Lorentz é totalmente equivalente à nova interpretação do espaço e do tempo, por meio da qual se torna muito mais compreensível. Para simplificar, vamos negligenciar y e z e imaginar um espaço-tempo com uma dimensão espacial, então um feixe de retas paralelas ao eixo t e um feixe de retas paralelas inclinadas com relação ao eixo t (ver Fig. 1) são representações para a evolução, respectivamente, de um corpo em repouso e de um

[6]Um uso essencial deste fato já é encontrado em W. Voigt, Göttinger Nachr. 1887, p. 41.

corpo em movimento uniforme, que possui uma extensão espacial constante. Se OA' é paralelo ao segundo feixe, então podemos introduzir t' como a coordenada temporal e x' como a coordenada espacial e, portanto, parece que o segundo corpo esteja em repouso e que o primeiro esteja movendo-se uniformemente. Vamos agora assumir que o primeiro corpo tem comprimento l quando considerado em repouso, ou seja, a largura PP do primeiro feixe ao longo do eixo é x è $= l \cdot OC$, onde OC representa a unidade de medida no eixo x, e por outro lado, assumimos que o segundo corpo tenha o mesmo comprimento l *quando considerado em repouso*; a última hipótese significa que a largura do segundo feixe medida *paralelo ao eixo* x' é $Q'Q' = l \cdot OC'$. Temos agora nestes dois corpos representações de dois elétrons de Lorentz *idênticos*, um em repouso e outro em movimento uniforme.[7] Porém, se nos atermos às coordenadas originais x, t, então devemos dar a largura QQ de seu feixe correspondente *paralelo ao eixo* x como extensão do segundo elétron. Agora é evidente que $QQ = l \cdot OD'$, uma vez que $Q'Q' = l \cdot OC'$. Um calculo simples dá, se $dx/dt = v$ para o secundo feixe, $OD' = OC \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, portanto também $PP : QQ = 1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Mas esta é precisamente a hipótese de Lorentz da contração dos elétrons em movimento. Por outro lado, considerando o segundo elétron em repouso, adotando portanto o sistema de referência x', t', então é necessário indicar como comprimento do primeiro a largura $P'P'$ de seu feixe paralelo OC' e encontraríamos o primeiro elétron encurtado em relação ao segundo exatamente na mesma proporção; já que na figura temos

$$P'P' : Q'Q' = OD : OC' = OD' : OC = QQ : PP\ . \tag{6}$$

Lorentz chamou a dependência de t' em x e t *tempo local* do elétron em movimento uniforme e associou uma construção física deste conceito para um melhor entendimento da hipótese de contração. No entanto, o entendimento de que o tempo de um elétron é tão bom quanto o do outro, ou seja, que t e t' devem ser tratados da mesma maneira, deve-se principalmente a A. Einstein.[8]). Em primeiro lugar, o tempo não deveria mais ser considerado como um conceito determinado exclusivamente pelos fenômenos naturais. Nem Einstein nem Lorentz modificaram nada em relação ao conceito de espaço, talvez porque, de acordo com as transformações especiais mencionadas, onde o plano x', t' está coberto pelo plano x, t, é possível uma interpretação de acordo com a qual o eixo x do espaço é mantido no lugar. Pisar no conceito de espaço de uma forma correspondente ao que se faz para o conceito de tempo só pode ser considerado bom do ponto de vista da temeridade da cultura matemática. Por isso, embora seja um passo indispensável para uma verdadeira compreensão do grupo G_c, a palavra *princípio da relatividade* me parece muito fraca para expressar um pedido de invariância sob o grupo G_c. Uma vez que o sentido do postulado passa a ser que através dos fenômenos naturais apenas o mundo quadridimensional no espaço e no tempo é dado, mas a projeção no espaço e no tempo ainda pode ser realizada com alguma liberdade, eu preferiria dar a esta

[7]NdT. Certamente não elétrons no sentido moderno do termo. Hoje usamos expressões como "réguas", "hastes" ou "bastões".

[8]A. Einstein, Ann. d. Phys. 17, 1905, p. 891; Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik 4, 1907, p. 411.

declaração o nome de *postulado do espaço-tempo absoluto* (ou, em breve, postulado do espaço-tempo).[9]

III.

Graças ao postulado do espaço-tempo, um tratamento equivalente das quatro componentes x, y, z, t torna-se possível. Com esse postulado, como quero mostrar agora, as formas sob as quais as leis físicas se apresentam ganham em compreensibilidade. Especialmente o conceito de *aceleração* recebe uma característica muito proeminente.

Farei uso de uma expressão geométrica, que se presta imediatamente ao propósito, se omitirmos tacitamente z da tripla x, y, z. Eu penso num evento arbitrário O do espaço-tempo como a origem do espaço e do tempo. O *cone* $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ com O como ponta (Fig. 2) é composto por duas partes, uma com os valores $t > 0$ e a outra com os valores $t < 0$.

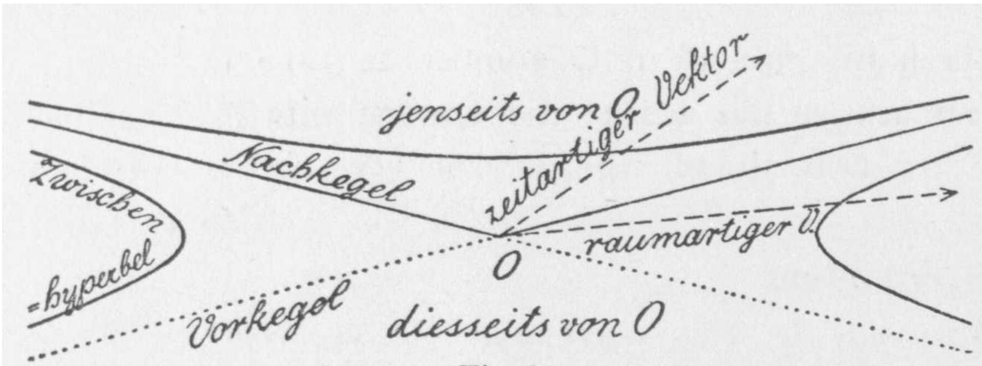

Fig. 2.

A primeira, *o cone de luz passado de* O é formado,[10] digamos assim, por todos os eventos que "enviam luz para O", enquanto a segunda, *o cone de luz futuro de* O,[11] é formado por todos os eventos que "recebem luz de O". A região limitada apenas pelo cone passado de luz é chamada *passado absoluto de* O,[12] enquanto aquela limitada pelo cone de luz futuro é chamado *futuro absoluto de* O.[13] No futuro absoluto de O encontramos o ramo da hipérbole já considerado

$$F = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1 \, , \qquad t > 0 \, . \tag{7}$$

A região *entre os cones* é preenchida pela família de hiperbolóides de folha única

$$-F = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = k^2 \, , \tag{8}$$

[9] NdT. *Postulat der absoluten Welt*, "postulado do universo absoluto", ou, *Weltpostulat*, "postulado do universo".

[10] NdT. *Vorkegel*, o "pré-cone".

[11] NdT. *Nachkegel*, o "pós-cone".

[12] NdT. *diesseits von O*, "aquém de O".

[13] NdT. *jenseits von O*, "além de O".

para todos os valores positivos constantes de k^2. As hipérboles com ponto médio O, que têm a última forma, são importantes para nós.

Os ramos individuais destas hipérboles podem ser chamados, por brevidade, *infra-hipérboles com centro O*.[14] Tal ramo da hipérbole representaria, se pensado como a linha de universo de um ponto substancial, o movimento cuja velocidade tende para $t = -\infty$ e $t = +\infty$ à velocidade da luz c.

Se agora chamarmos *quadrivetor*,[15] em analogia ao conceito de um vetor no espaço, um segmento com direção na variedade de x, y, z, t, então devemos distinguir entre os quadrivetores *do tipo tempo*, com direções de O para o ramo da hipérbole $+F = 1$, $t > 0$ e os quadrivetores *do tipo espaço*, com direções de O para $-F = 1$. O eixo do tempo pode correr paralelo a qualquer vetor do primeiro tipo. Cada evento entre o cone de luz passado e o cone de luz futuro de O pode se tornar, através de uma escolha adequada do sistema de referência, *simultâneo* para O, mas também *anterior* ou *posterior* para O. O processo de limite para $c = \infty$ corresponderia a um fechamento completo da porção em forma de cunha entre os dois cones, no plano $t = 0$ da variedade. Nas figuras, esta parte é propositalmente mostrada com várias aberturas.

Dividimos um quadrivetor arbitrários de O em direção a x, y, z, t nas quatro *componentes* x, y, z, t. Se as direções de dois quadrivetores são, especificamente, a de um quadrivetor com raio OR de O para uma das superfícies $\mp F = 1$ e também aquela da tangente RS no ponto R da superfície encontrada, então os dois quadrivetores serão chamados *normais* um para o outro. A partir daqui, é claro que

$$c^2 t t_1 - x x_1 - y y_1 - z z_1 = 0 \tag{9}$$

é a condição para a qual os quadrivetores com componentes x, y, z, t e x_1, y_1, z_1, t_1 são normais um para o outro.

Para os *módulos* de quadrivetores de direções diferentes, as *unidades de medida* devem primeiro ser definidas de forma que para um quadrivetor de tipo espaço de O para $-F = 1$ seja sempre atribuído o módulo 1 e para um quadrivetor de tipo tempo de O em direção a $+F = 1$, $t > 0$, o módulo $1/c$ é sempre atribuído.

Agora imaginemos a linha do universo de um ponto substancial passando por um evento $P(x, y, z, t)$; então o módulo que corresponde ao quadrivetor de tipo tempo dx, dy, dx, dt na direção da linha é

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}\,. \tag{10}$$

Chamemos a integral $\int d\tau = \tau$ deste módulo na linha do universo, estendido de qualquer ponto inicial fixo P_0 até um ponto final arbitrário P, *tempo próprio* do ponto substancial em P.

Consideremos na linha de universo x, y, z, t, que são os componentes do vetor OP, como funções de tempo próprio τ, e denotemos as primeiras derivadas destes

[14]NdT. Não tenho conhecimento de nenhuma nomenclatura específica para essas hipérboles e, portanto, traduzi literalmente o texto de Minkowski.

[15]NdT. Minkowski utiliza *Vektor*, ou seja, vetor, mas é comum hoje em dia usar o prefixo "quadri-" para caracterizar um vetor no espaço-tempo e, assim, distingui-lo dos vetores usuais, às vezes também chamados de "trivetores", da mecânica não relativística.

em relação a τ com $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$, suas segundas derivadas em relação a τ com $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$, e chamemos os quadrivetores correspondentes, ou seja, a derivação do vetor OP em relação a τ, a *quadrivelocidade em* P e, a derivação desta quadrivelocidade em relação a τ, a *quadriaceleração em* P. Então consta

$$c^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 = c^2 \,, \tag{11}$$

$$c^2\dot{t}\ddot{t} - \dot{x}\ddot{x} - \dot{y}\ddot{y} - \dot{z}\ddot{z} = 0 \,, \tag{12}$$

ou seja, a quadrivelocidade é o quadrivetor do tipo tempo na direção da linha do universo em P com módulo 1 e a quadriaceleração em P é normal à quadrivelocidade em P, portanto, em qualquer caso, um quadrivetor do tipo espaço.

Agora existe, como podem facilmente compreender, um certo ramo da hipérbole que tem em comum com a linha do universo em P três pontos infinitamente próximos e cujas assíntotas são geradoras de um cone de luz passado e um cone de luz futuro (vejam abaixo na Fig. 3). Chamamos essa hipérbole *hipérbole de curvatura* em P. Se M é o centro desta hipérbole, então estamos lidando com uma infra-hipérbole de centro M. Seja ϱ o módulo do quadrivetor MP, *portanto, reconhecemos a quadriaceleração em* P *como o quadrivetor na direção do módulo* MPc^2/ϱ.

Se $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$ são todos zero, então a hipérbole de curvatura é reduzida à linha tangente em P à linha do universo e devemos colocar $\varrho = \infty$.

IV.

Para provar que a suposição do grupo G_c para as leis físicas não conduz de forma alguma a uma contradição, é inevitável proceder a uma revisão de toda a Física com base no uso deste grupo. Esta revisão já foi bem sucedida, até certo ponto com sucesso, para questões de termodinâmica e radiação de calor[16]), para os processos eletromagnéticos e, finalmente, para a mecânica, sob a validade do conceito de massa. [17])

Para a última área, a questão que acima de tudo deve ser levantada é: se uma força com componentes X, Y, Z ao longo dos eixos espaciais atua sobre um evento $P(x, y, z, t)$, onde está a quadrivelocidade $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$, sob uma mudança arbitrária do sistema de referência, como que tipo de força deve esse força ser interpretada? Agora, existem certas abordagens comprovadas para a força ponderomotriz[18] no campo eletromagnético em que o grupo G_c deve, sem dúvida, ser implementado. Essas abordagens levam à regra simples: *sob uma mudança do sistema de referência, a força existente deve ser aplicada nas novas coordenadas espaciais de tal forma que o quadrivetor correspondente com componentes*

$$\dot{t}X, \quad \dot{t}Y, \quad \dot{t}Z, \quad \dot{t}T \,, \tag{13}$$

[16]M. Planck, Sobre a dinâmica dos sistemas em movimento, Berliner Ber. 1907, p. 542 (também em Ann. d. Phys. 26, 1908, p. 1).

[17]H. Minkowski, As equações fundamentais para processos eletromagnéticos em corpos em movimento, Göttinger Nachr. 1908, p. 53.

[18]NdT. Essencialmente, aqui, a força de Lorentz.

onde

$$T = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{x}}{\dot{t}}X + \frac{\dot{y}}{\dot{t}}Y + \frac{\dot{z}}{\dot{t}}Z\right) \tag{14}$$

é o trabalho realizado pela força, dividido por c^2*, no evento, se mantém inalterado.* Este quadrivetor é sempre normal para a quadrivelocidade em P. Esse quadrivetor de força pertencente a uma força em P será chamado de *quadrivetor de força motriz em* P.

Agora descrevamos a linha do universo através de P de um ponto substancial com *massa mecânica* m constante. A quadrivelocidade em P multiplicada por m é chamada de *quadrimomento em* P e a quadriaceleração em P multiplicada por m é chamada de *quadriforça em* P. De acordo com essas definições, a lei segundo a qual o movimento de um ponto massivo ocorre sob a ação de um dado quadrivetor de força motriz diz:[19])

A quadriforça é igual ao quadrivetor da força motriz.

Esta afirmação resume quatro equações para as componentes de acordo com os quatro eixos, onde a quarta, dado que ambos os citados quadrivetores são normais à quadrivelocidade, pode ser vista como uma consequência das três primeiras. De acordo com a expressão dada acima para T, a quarta equação representa sem dúvida a lei da energia. Como *energia cinética* do ponto massivo devemos, portanto, definir *a componente do quadrimomento de acordo com o eixo* t *multiplicada por* c^2. Daí a expressão

$$mc^2 \frac{dt}{d\tau} = mc^2 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ , \tag{15}$$

que, depois de remover a constante aditiva mc^2, é a expressão $\frac{1}{2}mv^2$ da mecânica newtoniana, exceto para quantidades de ordem $1/c^2$. A *dependência de energia do sistema de referência* é aqui muito evidente. Agora, uma vez que o eixo t pode ser colocado na direção de qualquer quadrivetor de tipo tempo, a lei da energia, contém, por outro lado, o sistema completo de equações de movimento para todos os referenciais possíveis. Este fato mantém, no processo no limite $c = \infty$ discutido, seu significado também para a construção axiomática da mecânica newtoniana e, neste sentido, já foi observado aqui pelo Sr. J. R. Schütz[20]).

Desde o início, a relação entre unidade de comprimento e tempo pode ser escolhida de tal forma que o limite de velocidade natural se torne $c = 1$. Portanto, introduzindo novamente $\sqrt{-1}\cdot t = s$ ao invés de t, a expressão diferencial quadrática torna-se

$$d\tau^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - ds^2\ , \tag{16}$$

portanto, completamente simétrica em x, y, z, s essa simetria é transposta em todas as leis que não contradizem o postulado do espaço-tempo. A essência deste postulado pode, portanto, ser revestida de uma forma matematicamente muito significativa na fórmula mística:

$$3.10^5 \text{ km} = \sqrt{-1}\ \text{s}\ . \tag{17}$$

[19]H. Minkowski, a. a. O p. **107**. — Veja-se também M. Planck, Verh. d. Physik. Ges. **4**, p. 136, **1906**.

[20]J. R. Schütz, O princípio da conservação absoluta de energia. Göttinger Nachr. **1897**, p. 110.

V.

As vantagens obtidas com o postulado do espaço-tempo tornam-se talvez mais convincentes do que nunca no caso dos efeitos descritos pela teoria de Maxwell-Lorentz de uma *carga pontual em movimento arbitrário*. Imaginemos a linha de universo de tal elétron pontual com carga e e, partindo de qualquer ponto de partida, introduzamos nele o tempo próprio τ. Para ter o campo gerado pelo elétron em um evento arbitrário P_1, construímos o cone de luz futuro pertencente a P_1 (Fig. 4).

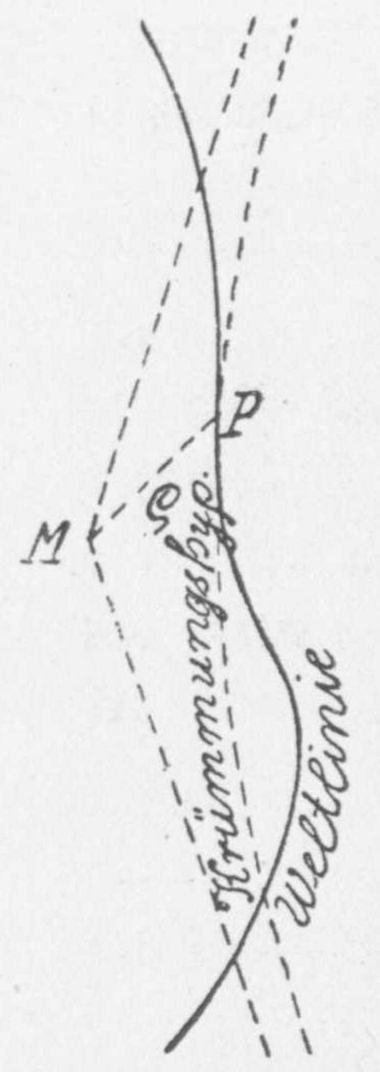

Fig. 3.

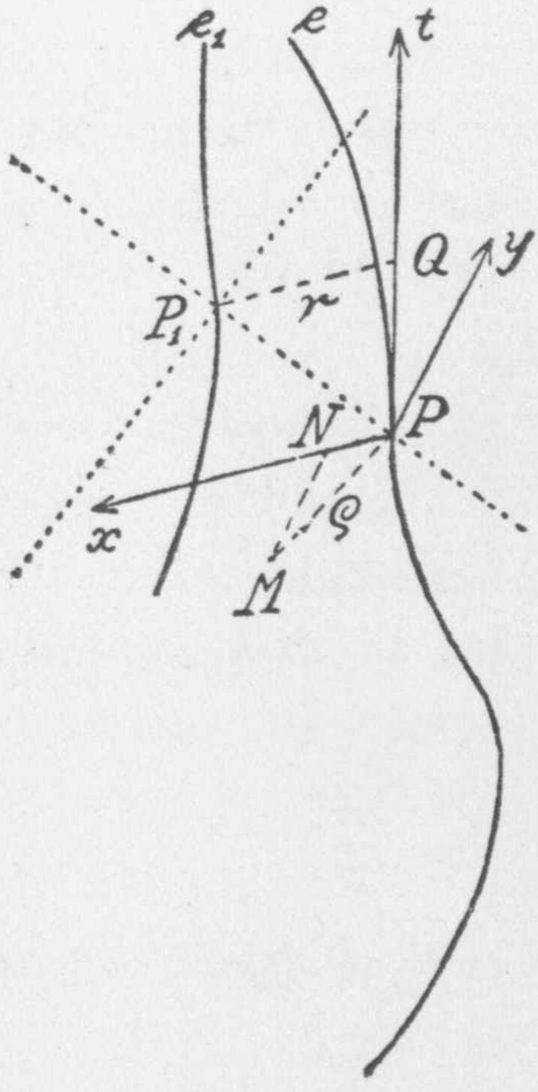

Fig. 4.

Isso encontra a linha de universo do elétron, ilimitada, em um único evento P, pois as direções dessa são em todos os lugares quadrivetores do tipo tempo.

Traçamos a tangente à linha do universo em P e construamos através de P_1 a normal P_1Q para esta tangente. Seja r o módulo de P_1Q. O módulo de PQ é, portanto, r/c, de acordo com a definição de um cone de luz futuro. *Agora, o quadrivetor com direção PQ do módulo e/r apresenta em seus componentes ao longo dos eixos x, y, z o vetor potencial multiplicado por c, e no componente ao longo do eixo t o potencial escalar do campo gerado por e para o eventoP_1.* Aqui estão as leis elementares estabelecidas por A. Liénard e da E. Wiechert.[21])

Da descrição do campo gerado por um elétron, portanto, segue-se por si só que a separação do campo em força elétrica e magnética é relativa, ou seja, depende de como o eixo do tempo foi estabelecido; ambas as forças devem ser descritas o mais claramente possível juntas, em uma certa analogia, embora não completa, com a teoria da torção na mecânica.

Agora quero descrever o *efeito motor exercido por uma carga pontual em movimento arbitrário sobre outra carga pontual em movimento arbitrário.* Imaginemos a linha de universo de um segundo elétron pontual de carga e_1 passando pelo evento P_1. Determinemos P, Q, r como antes, então construamos o ponto médio da hipérbole de curvatura em P (Fig. 4) e, finalmente, a normal MN de M em uma linha imaginária paralela a QP_1 passando por P. Definamos agora, com P como origem, um sistema de referência da seguinte forma, o eixo t na direção PQ, o eixo x na direção QP_1, o eixo y na direção MN, de modo que finalmente a direção do eixo z, como normal aos eixos t, x, y, também é determinada. A quadriaceleração em P seja $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$, a quadrivelocidade em P_1 seja $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{t}_1$. *Agora, o quadrivetor de força motriz exercida pelo primeiro elétron e em movimento arbitrário no segundo elétron e_1 em movimento arbitrário em P_1 é escrito:*

$$-ee_1\left(\dot{t}_1 - \frac{\dot{x}_1}{c}\right)\mathfrak{R}\,, \tag{18}$$

onde se aplicam as três relações abaixo para os componentes $\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_z, \mathfrak{R}_t$ do quadrivetor $\mathfrak{R}$:

$$c\mathfrak{R}_t - \mathfrak{R}_x = \frac{1}{r^2}\,, \qquad \mathfrak{R}_y = \frac{\ddot{y}}{c^2 r}\,, \qquad \mathfrak{R}_z = 0 \tag{19}$$

e, como a quarta, este quadrivetor $\mathfrak{R}$ é normal à quadrivelocidade em P_1 e, portanto, depende dela.

Comparando com esta afirmação, as formulações atuais da própria lei elementar sobre o efeito motor-peso de cargas pontuais em movimento umas sobre as outras,[22] não se poderá deixar de admitir que aqui as relações tomadas em consideração revelam sua essência íntima em plena simplicidade apenas em quatro dimensões, e apenas lançam uma projeção muito confusa sobre um espaço tridimensional estabelecido no início.

Na mecânica reformada de acordo com o postulado do espaço-tempo, as desarmonias que criaram a confusão entre a mecânica newtoniana e a eletrodinâmica

[21] A. Liénard, Campo elétrico e magnético produzido por uma carga concentrada em um ponto e animada por um movimento arbitrário, L'Éclairage électrique **16** (1898), p. 5, 53, 106; Wiechert, Leis eletrodinâmicas elementares, Arch. néerl. (2), 5, (1900), p. 549.

[22] K. Schwarzschild, Göttinger Nachr. 1903, p. 132. — H. A. Lorentz, Enzykl. d. math. Wissensch., Art. V, 14, p. 199.

moderna desaparecem por si mesmas. Agora quero abordar o uso da lei newtoniana da atração em relação a este postulado. Eu quero supor que, quando duas massas de pontuais m, m_1 descrevem suas linhas de universo, um quadrivetor de força motriz de exatamente a mesma expressão que aquele do caso acima para elétrons é exercido por m em m_1, apenas que em vez de $-ee_1$ agora deve aparecer $+mm_1$. Tratamos, em particular, o caso em que a quadriaceleração de m é constante e zero, de modo que é possível introduzir t de tal forma que m é considerado em repouso e que portanto o movimento de m_1 ocorre apenas na presença daquele quadrivetor de força motriz que deriva de m. Agora modificamos este quadrivetor introduzindo primeiro o fator $\dot{t}^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, que além de grandezas da ordem $1/c^2$ acaba sendo 1, então mostra[23]) que para as posições x_1, y_1, z_1 de m_1 e suas evoluções temporais se encontrariam novamente exatamente as leis de Kepler, apenas que em vez dos tempos t_1 entrariam os tempos próprios τ_1 de m_1. Com base neste simples comentário, pode-se entender que a lei da atração sugerida em combinação com a nova mecânica não é menos adequada para explicar as observações astronômicas do que a lei da atração de Newton ligada à mecânica newtoniana.

As equações fundamentais para processos eletromagnéticos em corpos ponderáveis também são obtidas através do postulado do espaço-tempo. Mesmo a erudita derivação de Lorentz dessas equações com base nos pressupostos da teoria do elétron, em última análise, não precisa ser abandonada, como mostrarei em outro lugar.

A validade irrepreensível do postulado do espaço-tempo é, assim eu gostaria de acreditar, o verdadeiro núcleo de uma concepção do mundo eletromagnético, aquele encontrado por Lorentz, desenvolvido posteriormente por Einstein, até seu estado atual. Com a construção de outras consequências matemáticas, serão encontradas sugestões suficientes para as verificações experimentais do postulado, de modo que mesmo aqueles para quem o abandono das antigas interpretações é desagradável ou doloroso, se consolem com a ideia de uma harmonia pré-estabelecida entre matemática pura e física.

[23]H. Minkowski, loc. cit., p. 110.