Énoncé 2012

Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique (Sénégal)

Année académique 2011/2012

(ENSAE)

TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A
DURÉE 3 Heures

Le sujet comporte vingt questions indépendantes , chacune notée sur deux points. La réponse à chaque question doit être bien rédigée. Tout résultat non justifié est considéré comme non valable.

1. Etudier la limite en *zéro* des fonctions définie par :

$$f(x) = \frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^4 - x^2}; \quad g(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}; \quad k(x) = \frac{(1-x)^4 - 1 + 4x - x^3}{3x^2};$$

$$l(x) = \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation définie par

$$\frac{(-3x^2+4x+7)(5x^2+3x-2)}{(x^2-4)(-3x^2-7x+10)} \geq 0.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante: $\sqrt{\dfrac{3x^2+7x+8}{-x^3+7x^2-14x+8}} \geq 0$

4. Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes:

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x + \sqrt{x} - 1}{x}, \quad u(x) = \frac{(x+1)^2(x+2)^2}{x^2+3x-4}; \quad g(x) = \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2;$$

$$h(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

(5) On considère la suite (U_n) telle que $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{n}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et $u_0 = 2/3$.

Calculer $s_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ en fonction de n.

(6) Montrer que si une fonction f continue sur un segment $[a,\, b]$ admet sur ce segment une fonction réciproque , f est monotone sur $[a,\, b]$.

(7) Etudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = |x|^{\alpha} \sin \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

où α est un rationnel strictement positif puis la continuité de la fonction dérivée.

(8) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal.

$a)$ Déterminer $a,\, b,\, c$ pour que $(\mathcal{C})$ ait les propriétés suivantes :
– $(\mathcal{C})$ passe par le point $A(0; 5)$
– la tangente à $(\mathcal{C})$ au point A est parallèle à l'axe des abscisses;
– la tangente à $(\mathcal{C})$ au point B d'abscisse 1 a pour coefficient directeur -3.

$b)$ Etudier les variations de la fonction f ainsi obtenue.Tracer $(\mathcal{C})$.

(9) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(10) Déterminez quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique sachant que leur somme est 12 et la somme de leurs carrés est 116.

(11) Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{m\sqrt{x^2+3} - 2mx}{x^2 - 1} & \text{si} \quad |x| \neq 1 \\ 2x^3 + px + 1 & \text{si } |x| = 1. \end{cases}$$

Déterminer m et p pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

(12) Soit $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1$

$a)$ Montrer qu'un réel $\alpha \neq 0$ est racine de $P(x)$ si et seulement si α est solution de

$$\textbf{(E)} \quad : \quad \alpha^2 - \alpha - 4 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 0.$$

$b)$ En posant $u = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$, Résoudre l'equation **(E)** et en déduire les racines de $P(x)$.

(13) On considère l'expression $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right]$.

$a)$ Vérifier que $P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \dfrac{1}{4}P_{n-2} = 0 \quad (n \in \{3,4\})$.

$b)$ On pose $u = x + \sqrt{x^2-1}, \quad v = x - \sqrt{x^2-1}$.
Calculer $(u^{n-1} + v^{n-1})(u+v)$. En déduire que,
pour tout $n \geq 3$ on a : $P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \dfrac{1}{4}P_{n-2} = 0$.

(14) Soit la fraction continue x défine par $x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cdots}}}; \quad a > 0, \quad b > 0.$

$a)$ Montrer que x est solution de l'équation $bx^2 - abx - a = 0$.

$b)$ En déduire une écriture sous forme de fraction continue de x dans les cas suivants:

$(i) \qquad x = 1 + \sqrt{3} \qquad (ii) \qquad x = \dfrac{3+\sqrt{21}}{6}$

(15) Soit les nombres A et B définis par $A = \dfrac{1,0000000002}{1,0000000004}$ et $\quad B = \dfrac{0,9999999996}{0,9999999998}$.
En utilisant les fonctions $f(x) = \dfrac{1+2x}{1+4x}$ et $g(x) = \dfrac{1-4x}{1-2x}$, déterminer le signe de $A - B$.

(16) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\quad 1 + \dfrac{x+1}{x-1} + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3 = 0.$

(17) On considére P et Q deux polynômes de degrés respectifs n et q tels que pour tout $x \quad P(x)Q(x) = 0$.

$a)$ Prouver que P admet au moins $n+1$ racines ou que Q admet au moins $q+1$ racines.

$b)$ Soit $f(x) = x + |x|$ et $g(x) = x - |x|$. $f(x)$ et $g(x)$ sont elles des fonctions polynômes?

(18) Montrer par recurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$a)$ $\forall n \geq 1, \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$b)$ $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11.

(19) Peut-on choisir m de telle sorte que le polynôme $f(x) = mx^2 + (3m-1)x + 1$ admette deux racines x' et $x"$ telles que $x' < 5 < x"$?

(20) Soit la fonction f definie sur son domaine par $f(x) = \dfrac{x^2 - ax}{x^2 - 4x + 3}$. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles la fonction :

$a)$ n'admet ni maximum, ni minimum?

$b)$ admet un maximum M et un minimum m? (Démontrer alors que $M \cdot m > 0$.)

$c)$ admet seulement un minimum?

FIN DU SUJET et BONNE CHANCE

Corrigé 2012

Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique (Sénégal)

Année académique 2011/2012

(ENSAE)

TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A
CORRIGÉ - TYPE

1. **Limites:**
   - $f(x) = \frac{(1-\cos x)}{x^4-x^2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(1-\cos x)}{x^4-x^2} \\ &= \frac{2\sin^2\frac{x}{2}(1+2x)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2(4x^2-4)} \end{aligned}$$

   comme $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, on a :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$$

   - $g(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. Posons $y^6 = 1+x$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1} \\ &= \lim y \to 1\frac{y^2+y+1}{y+1} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{3}{2}$$

   .

- $k(x) = \frac{(1-x)^4 - 1 + 4x - x^3}{3x^2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} k(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-x)^4 - 1 + 4x - x^3}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3x^4 - 7x^3 + 6x}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}(x^2 - 7x + 6) \\
&= \frac{6}{3} \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0} k(x) = 2$$

- $l(x) = \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

$$\begin{aligned}
l(x) &= \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} \\
&= \frac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})} \\
&= \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2(1+\sqrt{\cos x})} \\
&= 2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right) \frac{1}{4(1+\sqrt{\cos x})} \text{ d'où}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0} l(x) = \frac{1}{4}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\dfrac{(-3x^2+4x+7)(5x^2+3x-2)}{(x^2-4)(3x^2-7x+10)} \geq 0$. Cette fraction est définie dans $\mathbb{R} - \{-2, -\frac{10}{3}, 1, 2\}$. Posons $A(x) = -3x^2 + 4x + 7$, $B(x) = 5x^2 + 3x - 2$, $C(x) = x^2 - 4$, $D(x)0 = -3x^2 - 7x + 10$. On alors le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		$-\frac{10}{3}$		-2		-1		$\frac{2}{5}$		1		2		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$A(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$C(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$D(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Ainsi, $S =]-\infty, \frac{-10}{3}[\cup]-2, \frac{2}{5}] \cup]1, 2[\cup [\frac{7}{3}, +\infty[$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$I(x) = \sqrt{\frac{3x^2+7x+8}{-x^3+7x^2-14x+8}} \geq 0$$

.

L'ensemble solution est le domaine de définition de $I(x)$ car une racine est toujours positive. Le numérateur de la fraction dans la racine est toujours positif, car le polynôme correspondant a un discriminant $\Delta = -37$. 1 est racine du dénominateur et $-x^3+7x^2-14x+8 = (x-1)(-x^2+6x-8)$. On a ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
$-x^2+6x-8$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$I(x)$		$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	

Ainsi, $S =]-\infty, 1[\cup]2, 4[$

4. Calcul des fonctions dérivées:

- $f(x) = \frac{2x^3-3x+\sqrt{x}-1}{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x^2-3+\frac{1}{2\sqrt{x}})x - 2x^3+3x-\sqrt{x}+1}{x^2} \\ &= \frac{6x^3-3x+\frac{\sqrt{x}}{2}-2x^3+3x-\sqrt{x}+1}{x^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $f'(x) = \dfrac{4x^3-\frac{\sqrt{x}}{2}+1}{x^2}$

- $u(x) = \frac{(x+1)^2(x+2)^2}{x^2+3x-4}$

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{[2(x+1)(x+2)^2+2(x+2)(x+1)^2](x^2+3x-4)}{(x^2+3x-4)^2} - \frac{(2x+3)(x+1)^2(x+2)^2}{(x^2+3x-4)^2} \\ &= \frac{(x+1)(x+2)}{(x^2+3x-4)^2}[(4x+6)(x^2+3x-4)-(2x+3)(x+1)(x+2)] \\ &= \frac{(x+1)(x+2)(2x+3)}{(x^2+3x-4)^2}[2x^2+6x-8-x^2-3x-2] \end{aligned}$$

D'où $u'(x) = \dfrac{(x+1)(x+2)(2x+3)(x^2+3x-10)}{(x^2+3x-4)^2}$

- $g(x) = \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2$.

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= 2\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\frac{x+2-x+1}{(x+2)^2} \\
&= \frac{-2(x-1)}{(x+2)^3}
\end{aligned}
$$

Ainsi, $g'(x) = \dfrac{-2(x-1)}{(x+2)^3}$

- $h(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

$$
h'(x) = \left(\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}
$$

d'où $h'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

5. Soit la suite (U_n) définie par la relation de recurrence $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ où $u_0 = \frac{2}{3}$. Calcul de la somme des n premiers termes:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2}u_{n+1} &= \frac{u_n}{\sqrt{2}} + \frac{n}{2} + 1 \\
\sqrt{x}un+1-(n+1) &= \frac{u_n}{\sqrt{2}} + \frac{n+2-2n-2}{2} \\
&= \frac{u_n}{\sqrt{2}} - \frac{n}{2} \\
\sqrt{2}u_{n+1}-(n+1) &= \frac{1}{2}(\sqrt{2}u_n - n).
\end{aligned}
$$

Ainsi, si on définit $v_n = \sqrt{2}u_n - n$ avec $v_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, alors v_n serait une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et donc $u_n = \frac{v_n+n}{\sqrt{2}}$. On a donc:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} u_i &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sum_{i=0}^{n} v_i + \sum_{i=0}^{n} i) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} + \frac{n(n+1)}{2}]
\end{aligned}
$$

d'où $s_n = \frac{4}{3}(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}) + \frac{\sqrt{2}}{4}(n+1)$

6. Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Puisque f est injective, $f(a) \neq f(b)$. Supposons que $f(a) < f(b)$. Soit $x \in]a, b[$. Si $f(x) \leq f(a)$, l'image de l'intervalle $[x, b]$ par la fonction continue f est un intervalle contenant $[f(x), f(b)]$, donc contenant $[f(a), f(b)]$. $f(a)$ a donc un antécédant α dans $[x, b]$ et on a alors $a \neq \alpha$ et $f(\alpha) = f(a)$, ce qui est contraire au fait que f soit injective. Ainsi, on n'a pas $f(x) \leq f(a)$ et donc forcément $f(x) > f(a)$. Un même raisonnement permet de voir qu'on n'a pas $f(x) \geq f(b)$.

   Soient maintenant x et y deux éléments de $[a, b]$ tels que $a < x < y < b$. En appliquant le même principe que précédemment aux segments $[a, x]$ à y (resp. $[y, b]$ à x), on obtient $f(x) < f(y) < f(b)$. f est donc monotone. On utilise un même principe lorsque $f(a) > f(b)$.

7. Dérivabilité de la fonction par

   $$f(x) = |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

   où α est un rationnel strictement positif.

   On remarque que f est impaire. Il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$

   $$\forall x > 0, |f(x)| \leq |x|^\alpha \text{ car } |\sin \frac{1}{x}| \leq 1 \ \forall x > 0.$$
   $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \text{ et } f \text{ est continue en } 0.$$

   Etudions la dérivabilité en 0. Posons $\phi(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$. Ainsi, $\phi(x) = x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x}$. ϕ n'a donc pas de limite en 0 quand $0 < \alpha \leq 1$ et que si $\alpha > 1$, $\lim_{x \to 0} \phi(x) = 0$. Etudions la dérivée:

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x} \\ &= x^{\alpha-2}[\alpha x - \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}]. \end{aligned}$$

   On en déduit que si $\alpha \geq 2$, f' n'a pas de limite en 0. En conclusion:

   - $0 < \alpha \leq 1$: f est dérivable sur chaque segment de $\mathbb{R}^*$
   - $1 < \alpha \leq 2$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' est continue sur $\mathbb{R}$.
   - $\alpha > 2$: f est dérivable de dérivée continue sur $\mathbb{R}^*$

8. Soit f définie sur $\mathbb{R} - 2$ par

   $$f(x) = \frac{ax^2bx + c}{x - 2}$$

a. La courbe $(\mathcal{C})$ passe par $A(0,5)$ i.e $f(o) = 5$ donc $\frac{c}{2} = 5$ et donc $c = -10$.

b. La tangente au point A est parallèle à l'axe des abscisses; donc

$$\begin{aligned}\frac{(2ax_0+b)(x_0-2)-ax_0^2+bx_0-c}{(x-2)^2} &= 0 \text{ avec } x_0 = 0\\ -2b-c &= 0\\ b &= -\frac{c}{2}\\ b &= 5\end{aligned}$$

c. tangente au point B d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 3:

$$\begin{aligned}f'(1) &= 3\\ \frac{(2a+b)(1+2)-a-b-c}{(1-2)^2} &= -3\\ -2a-b-a-b-c &= -3\\ -3a-2b-c &= -3\\ -3a &= -3\\ a &= 1\end{aligned}$$

En conclusion, $f(x) = \frac{x^2+5x-10}{x-2}$ et la droite d'équation $y = x+7$ est une asymptote de f. Représentation graphique de f:

9. Calculons $\sum_{i=1} +\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ Pour cela, posons:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

En procédant par identification, on a: $A = C = \frac{1}{2}$, et $B = -1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1} 100 \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{100}\frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{100}\frac{1}{i+1} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{100}\frac{1}{i+2}\\ &= \text{....(Une erreur se trouve dans les calculs je retraite).}\end{aligned}$$

10. Soit (U_n) une suite arithmétique de raison a: $u_n = u_0 + na$.

$$\begin{cases} u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} &= 12\\ u_n^2 + u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2 + u_{n+3}^2 &= 116\end{cases}$$

En introduisant le terme général de la suite on a:

$$\left\{\begin{array}{lll} 4u_0 + 4na + 6a & = & 12 \\ 4u_0^2 + 8na + \sum_{i=n}^{n+3} i^2 & = & 116 \end{array}\right.$$

Ce système admet deux solutions pour a: $a = 4$ et $a = -4$.

- Si $a = 4$, les quatre termes de la suite sont -3, 1, 5, 9.
- Si $a = -4$, les termes consécutifs de la suite sont 9, 5, 1, -3.

11. Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{m\sqrt{x^2+3} - 2mx}{x^2-1} & si \quad |x| \neq 1 \\ 2x^3 + px + 1 & si \quad |x| = 1 \end{array}\right.$$

Les points d'étude de la fonction sont 1 et -1. Pour $|x| \neq 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{m\sqrt{x^2+3} - 2mx}{x^2-1} \\ &= \frac{m(x^2+3-(2x)^2)}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)} \\ &= \frac{m(-3x^2+3)}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)} \\ &= \frac{-3m}{\sqrt{x^2+3}+2x} \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{-3m}{4}$. Si f est continue en 1, alors $\frac{-3m}{4} = 3 + p$, soit $3m + 4p = -12$. De même de (il me semble aussi qu'il y a une erreur. Je vais relever.)

12. Soit $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 1$. 0 n'est pas racine de P car $P(0) = 1$. Soit $\alpha \neq 0$

a.

$$\begin{aligned} P(\alpha) = 0 &\Longleftrightarrow \alpha^4 - \alpha^3 - 4\alpha^2 - \alpha + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \alpha^2(\alpha^2 - \alpha - 4 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}) = 0 \text{ et puisque } \alpha \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 4 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 0 \end{aligned}$$

b. Posons $u = \alpha + \frac{1}{\alpha}$. Puisque $(\alpha + \frac{1}{\alpha})^2 = \alpha^2 + 2 + \frac{1}{\alpha^2}$, on en déduit que $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = u^2 - 2$. Dès lors, l'équation (E) devient:

$$u^2 - u - 6 = 0$$

Cette équation admet -2 et 3 comme solution. On a alors les deux équations suivantes, permettant de déterminer α: $\alpha + \frac{1}{\alpha} = -2$ et $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$. En conlusion, l'ensemble solution S de (E) est

$$S = \{1, x_1, x_2\} \text{ où } x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

13. $P_n(x) = \frac{1}{2^n}\left[(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x + \sqrt{x^2-1})^n\right]$
   a. La vérification de l'équation donnée est immédiate.
   b. On pose $u = x + \sqrt{x^2-1}$, $v = x - \sqrt{x^2-1}$. On remarque que : $u.v = 1$ et $u + v = 2x$.

$$\begin{aligned}(u^{n-1} + v^{n-1})(u+v) &= u^n + u^{n-1}v + v^{n-1}u + v^{n-1}u + v^{n-2} \\ &= u^n + v^n + u^{n-2} + v^{n-2}\end{aligned}$$

On remarque que $P_n(x) = \frac{1}{2^n}(u^n + v^n)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \frac{1}{4}P_{n-2} &= \frac{1}{2^n}[u^n + v^n - 2xu^{n-1} - 2xv^{n-1} + u^{n-2} + v^{n-2}] \\ &= \frac{1}{2^n}\left[(u^{n-1} + v^{n-1})(u+v) - 2x(u^{n-1} + v^{n-1})\right] \\ &= \frac{1}{2^n}\left[(u^{n-1} + v^{n-1})(u+v-2x)\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

14. Soit la fraction continue définie par $x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \dots}}}$; $a > 0$, $b > 0$.

   a.

$$\begin{aligned}x &= a + \frac{1}{b + \frac{1}{x}} \\ &= a + \frac{x}{xb+1} \qquad = \frac{axb + a + x}{1 + xb}\end{aligned}$$

On en déduit que x est solution de l'équation suivante:

$$bx^2 - abx - a = 0$$

b. Après résolution de l'équation précédente ($a > 0$ et $b > 0$), on obtient deux solutions dont la solution positive est la suivante:

$x = \frac{ab+\sqrt{(ab)^2+4ab}}{2a}$, soit $x = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{(ab)^2+4ab}}{2a}$.

- Pour $x = 1 + \sqrt{3}$, par identification, on a $\frac{b}{2} = 1$, $b = 2$ et $a = 1$, $x = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\dots}}}$
- Pour $x = \frac{3+\sqrt{21}}{6}$, par identification, $b = 1$ et $a = 3$. $x = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\dots}}}$

15. Soit

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{(1+2x)(1-2x) - (1-4x)(1+4x)}{(1-2x)(1+4x)} \\ &= \frac{1 - 4x^2 + 1 + 16x^2}{(1-2x)(1+4x)} \\ &= \frac{12x^2}{(1-2x)(1+4x)} \end{aligned}$$

$f(x) - g(x)$ est donc du signe de $(1-2x)(1+4x)$ résumé dans le tableau suivant:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+4x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	

$f - g > 0$ sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$. Et puisque, $A = f(10^{-9})$ et $B = g(10^{-9}$ et que $10^{-9} \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$, on conclut que $A - B > 0$.

16. Résolution de l'équation $+\frac{x+1}{x-1} + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 = 0$. Posons $Y = \frac{x+1}{x-1}$. L'équation à résoudre devient $1 + Y + Y^2 + Y^3 = 0$. Le membre de gauche de l'équation est la somme des 4 premiers termes d'une suite géométrique de raison Y. Ainsi, l'équation devient:

$$\frac{1-Y^4}{1-Y} = 0, \text{ avec } Y \neq 1 \, .$$

Comme 1 n'est pas solution de l'équation en Y, on a: $Y^4 = 1$, $Y = -1$. En remplaçant Y par sa valeur, on obient $x = 0$. 0 est donc la seule solution de l'équation.

17. a. Soient P et Q deux polynômes de degrés n et q tels que $PQ = 0$. Soient $\{x_1, \ldots, x_n\}$ les racines de P et $\{x_{n+1}, \ldots, x_{n+q}\}$ les racines de Q. Puisque $PQ = 0$, si x_{n+q+1} est un réel différent des racines de P et Q,on a $P(x_{n+q+1})Q(x_{n+q+1}) = 0$, soit $P(x_{n+q+1}) = 0$ ou $Q(x_{n+q+1}) = 0$. P admet donc au moins $(n+1)$ racines ou Q admet au moins $q+1$ racines. Tout polynôme admettant un nombre de racine supérieur à son degré est forcément nul. On peut donc en dire que $P = 0$ ou $Q = 0$.

    b. $f(x) = x + |x|$ et $g(x) = x - |x|$. On remarque que $f.g = x^2 - |x|^2$, soit $fg = 0$. D'après a. si P et Q sont deux polynômes tels que $PQ = 0$, alors $P = 0$ ou $Q = 0$. Comme f et g sont tous non nuls, f et g ne sont pas des fonctions polynômes.

18. Prouvons les propriétés par récurrence.

    a. $\forall n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ Soit P_n la propriété $\forall n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

vérification : Pour $n = 1$, $\frac{n^2(1+n)^2}{4} = 1$.

hypothèse : supposons P_n vraie; Prouvons P_{n+1}

hérédité :

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{2} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

    b. $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11. Soit Q_n la propriété correspondante

vérification pour $n = 0$, $3^2 + 2 = 11$ qui est divisible par 11.

hypothèses supposons Q_n vraie, prouvons Q_{n+1}

hérédité Soit $A = 3^{2(n+1)+2} + 2^{6(n+1)+1}$

$A = 3^{2n+2} \times 3^2 + 2^{6n+1} \times 2^6$ Puisque $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11,

$$\begin{aligned}
A &= (11k - 2^{6n+1})3^2 + 2^{6n+1} \times 2^6 \\
&= 9 \times 11k - 2^{6n+1}(2^6 - 3^2) \\
&= 11 \times 9k - 5 \times 11 \times 2^{6n+1} \\
&= 11(9k - 5 \times 2^{6n+1})
\end{aligned}$$

19. Existe-il m de telle sorte que le polynômes $f(x) = mx^2 + (3m-1)x + 1$ admette deux racines x' et x'' telles que $x' < 5 < x''$? Pour cela, il faut que:

   - $m \neq 0$
   - le discriminant du polynôme correspondant Δ doit être positif
   - les deux racines x_1 et x_2 du polynôme ($x_1 < x_2$) vérifient $x_1 < 5 < x_2$.

   On a ainsi:

$$\begin{aligned}\Delta &= (3m-1)^2 - 4m \\ &= 9m^2 - 6m + 1 - 4m \\ &= 9m^2 - 10m + 1\end{aligned}$$

   $\Delta \geq 0$ si $m \in]-\infty, \frac{1}{9}] \cup [1, +\infty[$. Les solutions de $f(x) = 0$ sont dans ce cas

$$x_1 = \frac{-3m + 1 - \sqrt{\Delta}}{2m} \text{ et } x_2 = \frac{-3m + 1 + \sqrt{\Delta}}{2m}$$

   .

   Deux cas sont donc à distinguer:

   - Pour $m \in]0, \frac{1}{9}] \in [1, +\infty[$, on résoud le système d'inéquations suivant:

$$\begin{cases} -3m + 1 - \sqrt{9m^2 - 10m + 1} & < 10m \\ -3m + 1 + \sqrt{9m^2 - 10m + 1} & > 10m \end{cases}$$

   - Pour $m \in]-\infty, 0[$ on résoud le système suivant:

$$\begin{cases} -3m + 1 - \sqrt{9m^2 - 10m + 1} & > 10m \\ -3m + 1 + \sqrt{9m^2 - 10m + 1} & < 10m \end{cases}$$

   L'ensemble solution du second système est vide et l'ensemble solution du premier système correspond à son domaine de validité. Ainsi pour $m \in]0, \frac{1}{5}] \in [1, +\infty[$, f admet deux racines x' et x'' qui vérifient $x' < 5 < x''$

20. Soit $f(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - 4x + 3}$.

   a. On suppose que f n'admet ni maximum, ni minimum. Alors la dérivée de f

ne s'annule jamais.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x-a)(x^2-4x+3)-(2x-4)(x^2-ax)}{(x^2-4x+3)^2}\\
&= \frac{-8x^2+6x-ax^2+4ax-3a-2x^3+2ax^2+4x^2-4ax}{(x^2-4x+3)^2}\\
&= \frac{-4x^2+ax^2+6x-3a}{(x^2-4x+3)^2}\\
&= \frac{x^2(a-4)+6x-3a}{(x^2-4x+3)^2}
\end{aligned}$$

Si $f' \neq 0$, alors le discriminant du numérateur de f' est négatif. On a:

$$\begin{aligned}
&\Delta = 12a^2 - 48a + 48\\
&\Delta = 12(a^2-4a+3)\Delta < 0 \qquad\qquad \iff a^2-4a+3<0\\
&\quad \iff a \in]1,3[
\end{aligned}$$

En conlusion, pour $a \in]1,3[$, f n'admet ni maximum, ni minimum.

b. f admet un maximum M et un minimum m. Pour cela, il faut que le numerateur de f' s'annule en deux points, et d'après les calculs précédents, $a \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$.

c. f n'admet qu'un minimum. Il faut que le discriminant du numérateur s'annule et que la dérivée seconde de f soit strictement positive. On a ainsi $a = 3$.