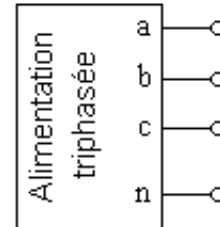


Systèmes triphasés

I. Alimentation triphasée

1. Présentation

On considère une alimentation triphasée équilibrée disposant de quatre bornes : trois phases repérées par les lettres a, b et c et un neutre repéré par la lettre n.



2. Tensions simples et composées

- Les trois tensions prises entre une borne de phase et le neutre $v_a(t)$, $v_b(t)$ et $v_c(t)$ sont appelées tensions simples (elles sont parfois notées $v_{an}(t)$, $v_{bn}(t)$ et $v_{cn}(t)$).
- Les six tensions définies entre deux bornes de phase sont appelées tensions composées :

$u_{ab}(t) = v_a(t) - v_b(t)$	$u_{ba}(t) = v_b(t) - v_a(t) = -u_{ab}(t)$
$u_{bc}(t) = v_b(t) - v_c(t)$	$u_{cb}(t) = v_c(t) - v_b(t) = -u_{bc}(t)$
$u_{ca}(t) = v_c(t) - v_a(t)$	$u_{ac}(t) = v_a(t) - v_c(t) = -u_{ca}(t)$

3. Cas d'un système triphasé équilibré direct de tension

a. Définitions

- Équilibré : les trois tensions ont même fréquence, même valeur efficace et sont déphasées de 120° .
- Direct : $v_b(t)$ est en retard de 120° sur $v_a(t)$ et $v_c(t)$ est en retard de 120° sur $v_b(t)$ (donc de 240° sur $v_a(t)$).

b. Tensions simples

Les équations des valeurs instantanées sont données ci-dessous :

$$v_a(t) = V \sqrt{2} \sin \omega t$$

$$v_b(t) = V \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$v_c(t) = V \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right)$$

V est la valeur efficace des tensions simples, $V\sqrt{2}$ est leur valeur maximale. ω est la pulsation (en rad/s).

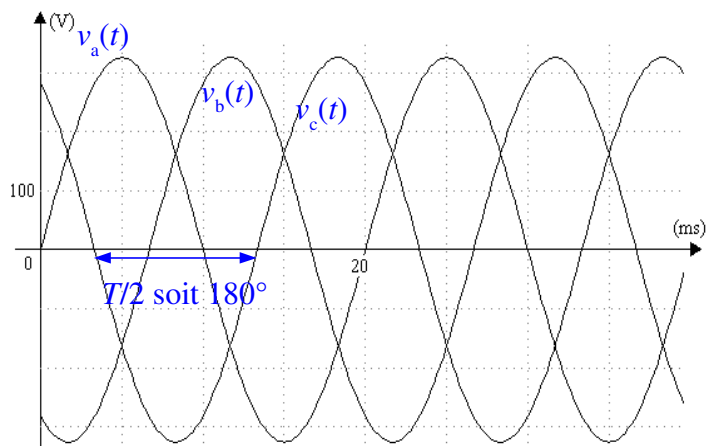
Le graphe ci-contre représente les courbes des trois tensions simples formant un système triphasé équilibré direct.

Mesurer la valeur efficace des tensions.

La valeur maximale est proche de 325 V donc la valeur efficace des tensions simples est de 230 V.

Indiquer la courbe correspondant à $v_a(t)$, celle correspondant à $v_b(t)$ et celle correspondant à $v_c(t)$.

D'après les équations précédentes, $v_a(t)$ passe par zéro en croissant à l'instant initial, $v_b(t)$ est en retard de 120° sur $v_a(t)$ et $v_c(t)$ est en retard de 120° sur $v_b(t)$.

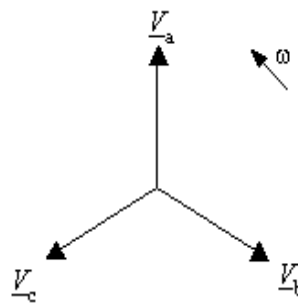


Placer les vecteurs $\underline{V}_a$, $\underline{V}_b$ et $\underline{V}_c$ associés à $v_a(t)$, $v_b(t)$ et $v_c(t)$ sur un diagramme de Fresnel (Échelle : 1 cm représente 50 V).

Le diagramme ci-contre est une représentation possible : l'ordre des phases et les déphasages doivent être respectés, les phases à l'origine peuvent être quelconques.

Tracer le vecteur associé à $v_a(t) + v_b(t) + v_c(t)$.

Le vecteur somme est nul, la somme des valeurs instantanées est nulle.



Un observateur placé devant le diagramme voit passer successivement $\underline{V}_a$, $\underline{V}_b$ puis $\underline{V}_c$.

c. Tensions composées

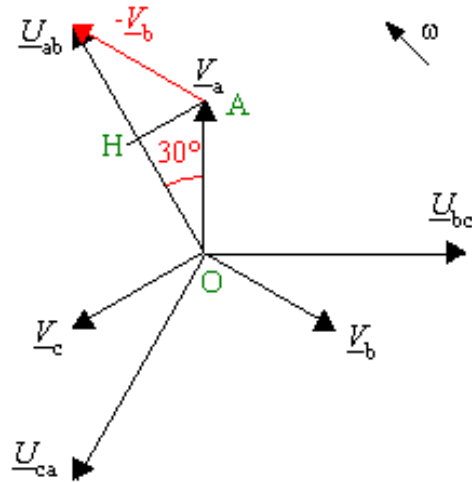
On étudie les tensions composées issues de la même alimentation que celle de la partie précédente.

Rappeler la relation entre $u_{ab}(t)$, $v_a(t)$ et $v_b(t)$.

$u_{ab}(t) = v_a(t) - v_b(t)$ (voir ci-dessus)

Placer le vecteur $\underline{U}_{ab}$, associé à $u_{ab}(t)$, sur le diagramme de Fresnel : $\underline{U}_{ab} = \underline{V}_a - \underline{V}_b$. Tracer la portion de droite allant de la pointe de $\underline{V}_a$ au milieu de $\underline{U}_{ab}$ (Voir le graphe ci-contre). Combien vaut l'angle entre $\underline{U}_{ab}$ et $\underline{V}_a$? Cet angle est égal à 30° . Exprimer la longueur de $\underline{V}_a$ en fonction de la moitié de la longueur de $\underline{U}_{ab}$ et de l'angle entre $\underline{U}_{ab}$ et $\underline{V}_a$. On note V_a la longueur de $\underline{V}_a$ (OA sur le graphe) et U_{ab} la longueur de $\underline{U}_{ab}$ (OH correspond à la moitié de U_{ab}):

$$\cos 30 = \frac{\frac{U_{ab}}{2}}{V_a} \quad \text{car } V_a \text{ correspond à l'hypoténuse et } \frac{U_{ab}}{2} \text{ à l'adjacent dans le triangle rectangle.}$$



La valeur efficace des tensions simples est notée V et la valeur efficace des tensions composées est notée U , déduire de ce qui précède que $U = \sqrt{3} V$.

D'après ce qui précède $V_a \cos 30 = \frac{U_{ab}}{2}$ soit $V \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{U}{2}$ car $V = V_a$ et $U = U_{ab}$ et $\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et en simplifiant par deux, on obtient $\sqrt{3} V = U$.

Exercice 1

Une alimentation triphasée équilibrée peut être représentée par l'un des schémas équivalents ci-contre. La valeur efficace des tensions $e_a(t)$, $e_b(t)$ et $e_c(t)$ est notée E . Répondre aux questions suivantes pour chaque représentation.

1. Exprimer la valeur efficace des tensions simples et composées en fonction de E .
2. Si les tensions composées ont pour valeur efficace 400 V, quelle est la valeur de E ?
3. Si les tensions simples ont pour valeur efficace 230 V, quelle est la valeur de E ?

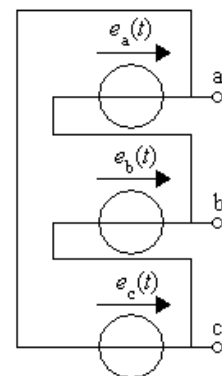
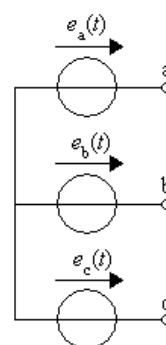


Schéma de gauche

1. $V = E$ et $U = E\sqrt{3}$

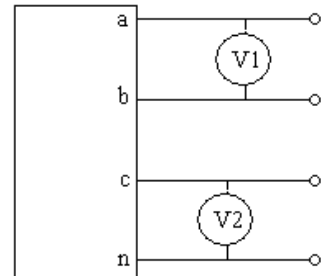
Schéma de droite

2. $E = 230 \text{ V}$
3. $E = 230 \text{ V}$

1. $V = \frac{E}{\sqrt{3}}$ et $U = E$
2. $E = 400 \text{ V}$
3. $E = 133 \text{ V}$

Exercice 2

Le schéma ci-contre représente une alimentation triphasée équilibrée. L'indication de V1 correspond à une tension composée et celle de V2 correspond à une tension simple, d'où la relation $V_1 = V_2 \sqrt{3}$



1. Quelle est l'indication de V1 si V2 indique 400 V ? **693 V**
2. Est-ce cohérent si V1 indique 230 V alors que V2 indique 133 V ? **Oui, la relation ci-dessus est vérifiée.**
3. Si V2 indique 230 V, quelle est l'indication d'un voltmètre branché entre les bornes b et n ? **Le voltmètre branché entre b et n indique 230 V car il s'agit d'une tension simple.**
4. Quelle est l'indication de V2 si V1 indique 400 V ? **230V**

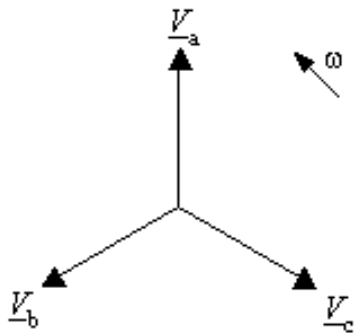
4. Autres systèmes équilibrés

Il existe deux autres systèmes équilibrés :

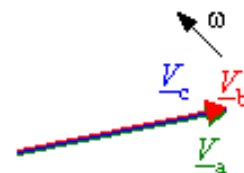
- Système triphasé équilibré inverse (ou indirect) : les trois tensions ont même valeur efficace, même fréquence et sont déphasées de 120° mais l'ordre des phases est inversé par rapport au système direct. $v_b(t)$ est en retard de 240° sur $v_a(t)$ et $v_c(t)$ est en retard de 120° sur $v_a(t)$.
- Système équilibré homopolaire : les trois tensions ont même valeur efficace, même fréquence et même phase à l'origine (pas de déphasage).

Représenter les diagrammes de Fresnel associés à un système inverse et un système homopolaire (les valeurs efficaces sont égales à 230 V).

Système inverse : un observateur « voit passer » successivement $\underline{V}_a$ puis $\underline{V}_c$ et enfin $\underline{V}_b$.



Système homopolaire : les trois vecteurs représentant les tensions sont confondus.



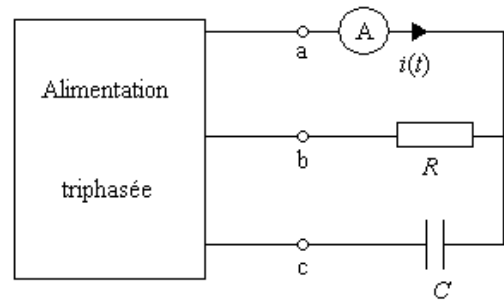
Exercice 3

Pour de nombreuses applications, il est nécessaire de déterminer l'ordre de succession des phases d'un système de tension triphasées. Cet exercice illustre un principe utilisé.

On considère le montage de la page suivante : $R = 6,8 \text{ k}\Omega$ et $C = 470 \text{ nF}$, les tensions simples forment un système triphasé équilibré de valeur efficace 230 V et de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$.

- 1.a. Le condensateur est débranché, exprimer I en fonction de R , $\underline{V}_a$ et $\underline{V}_b$.

- b. La résistance est débranchée, exprimer $\underline{I}$ en fonction de C , f , $\underline{V}_a$ et $\underline{V}_c$.
 c. Déduire des résultats précédents la relation donnant $\underline{I}$ en fonction de R , C , f , $\underline{V}_a$, $\underline{V}_b$ et $\underline{V}_c$.



2. Les tensions $\underline{V}_a$, $\underline{V}_b$ et $\underline{V}_c$ forment un système direct.
 a. Représenter sur un diagramme de Fresnel $\underline{V}_a$, $\underline{V}_b$, $\underline{V}_c$ et $\underline{I}$.
 b. En déduire l'indication de l'ampèremètre correspondant à cette situation.

3. Les tensions $\underline{V}_a$, $\underline{V}_b$ et $\underline{V}_c$ forment un système inverse.
 a. Représenter sur un diagramme de Fresnel $\underline{V}_a$, $\underline{V}_b$, $\underline{V}_c$ et $\underline{I}$.
 b. En déduire l'indication de l'ampèremètre correspondant à cette situation.

Corrigé :

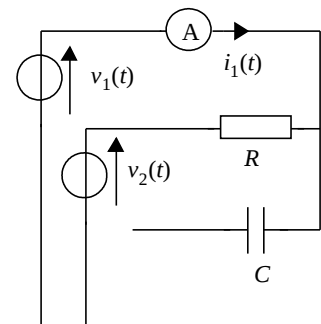
1.a. Le schéma correspondant est représenté ci-contre. Il n'y a pas de courant circulant dans le condensateur ; la tension aux bornes de R est $\underline{U}_{12}$.

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{12}}{R}$$

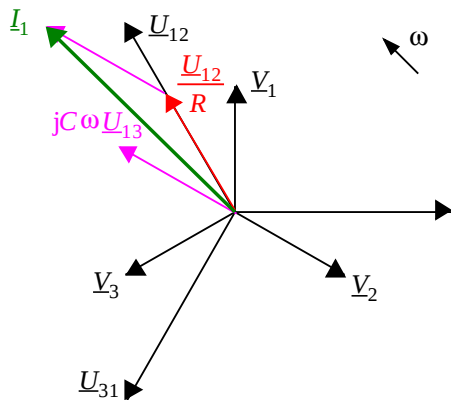
b. De la même manière lorsque $v_2(t)$ est remplacé par un circuit ouvert, on obtient : $\underline{I}_1 = \underline{U}_{13} jC 2\pi f$

c. Si les trois générateurs sont en service, on obtient :

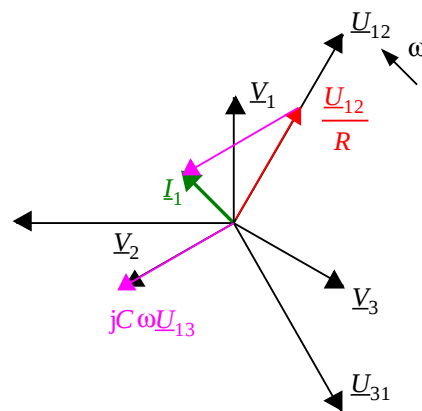
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{12}}{R} + \underline{U}_{13} jC 2\pi f$$



2.a



3.a



$$\frac{U_{12}}{R} = \frac{400}{6800} = 58,8 \text{ mA et } C \cdot 2\pi f \cdot U_{13} = 470 \cdot 10^{-9} \cdot 100 \cdot \pi \cdot 400 = 59 \text{ mA}$$

2.b. L'angle entre la direction de $\underline{U}_{12}$ et $\underline{I}_1$ vaut 15° :
 $I_1 = 2 \cdot 59 \cdot \cos(15) = 114 \text{ mA}$

3.b. L'angle entre la direction de $\underline{U}_{12}$ et $\underline{I}_1$ vaut 75° :
 $I_1 = 2 \cdot 59 \cdot \cos(75) = 30 \text{ mA}$

II. Charges triphasées

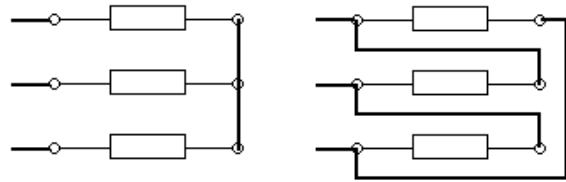
1. Présentation

Une charge triphasée est constituée de trois dipôles ou éléments, elle est accessible par six bornes. Si les trois éléments sont identiques la charge est dite équilibrée.

2. Couplages

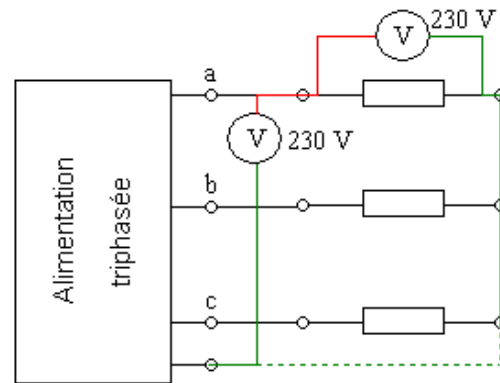
Une charge triphasée peut être couplée en étoile (schéma de gauche) ou en triangle (à droite). Le couplage est défini à la construction ou est modifiable par l'utilisateur.

Avec un couplage étoile, le neutre de l'alimentation (s'il existe) peut être relié au point étoile de la charge. Cette liaison est impossible dans le cas d'un couplage triangle.



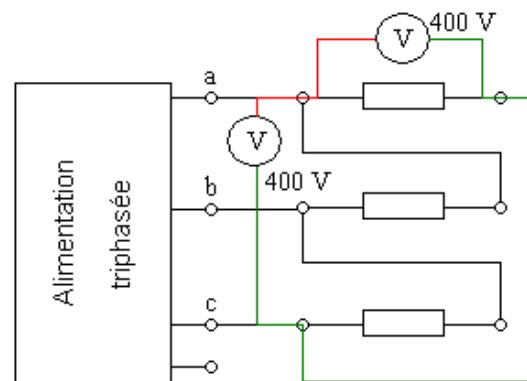
- Une charge triphasée couplée en étoile est reliée à une alimentation triphasée imposant des tensions simples formant un système triphasé équilibré direct de valeur efficace 230 V. Représenter le schéma de câblage. Quelle est la valeur efficace de la tension aux bornes d'un élément de la charge ?

La tension aux bornes d'un élément de la charge est égale à 230 V.



- Une charge triphasée couplée en triangle est reliée à une alimentation triphasée imposant des tensions simples formant un système triphasé équilibré direct de valeur efficace 230 V. Représenter le schéma de câblage. Quelle est la valeur efficace de la tension aux bornes d'un élément de la charge ?

La tension aux bornes d'un élément de la charge est égale à 400 V.

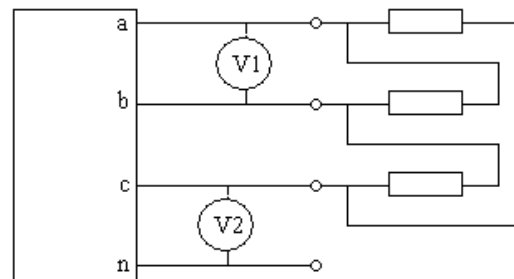


Exercice 4

On considère le montage représenté ci-contre :

L'indication de V1 correspond à une tension composée et celle de V2 correspond à une tension simple, d'où la relation $V_1 = V_2 \sqrt{3}$

1. Quelle est la valeur efficace des tensions aux bornes des éléments de la charge si V1 indique 400 V ? Un élément de la charge est soumis à une tension composée donc 400 V en valeur efficace.



2. Si la valeur efficace nominale de la tension aux bornes d'un élément de la charge est égale à 230 V, quelle doit être l'indication du voltmètre V2 ? La valeur efficace des tensions composées doit être égale à la valeur nominale pour un élément de la charge soit 230 V donc V1 indique 132 V.
3. L'alimentation impose des tensions simples de valeur efficace 230 V, quelle doit être la valeur efficace nominale des tensions aux bornes des éléments de la charge ? Quelle est l'indication du voltmètre V1 ? Les

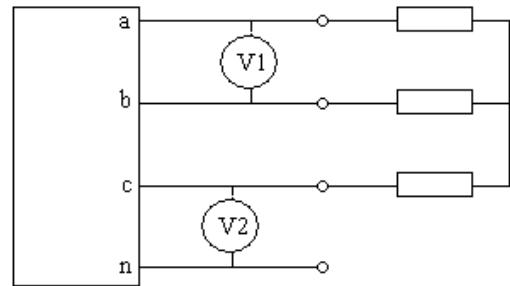
éléments de la charge doivent supporter 400 V efficace, V1 indique 230 V.

Exercice 5

On considère le montage représenté ci-contre : L'indication de V1 correspond à une tension composée et celle de V2 correspond à une tension simple, d'où la relation

$$V_1 = V_2 \sqrt{3}$$

1. Quelle est la valeur efficace des tensions aux bornes des éléments de la charge si V1 indique 400 V ? Un élément de la charge est soumis à une tension simple soit ici une valeur efficace de 230 V.



2. Si la valeur efficace nominale de la tension aux bornes d'un élément de la charge est égale à 230 V, quelle doit être l'indication du voltmètre V2 ? 230 V

3. L'alimentation impose des tensions simples de valeur efficace 230 V, quelle doit être la valeur efficace nominale des tensions aux bornes des éléments de la charge ? Quelle est l'indication du voltmètre V1 ? Un élément de la charge doit supporter 230 V et V1 indique 400 V.

3. Courants de ligne et de phase

a. Définition

On appelle « courants de ligne » les courants circulant dans les fils de la ligne reliant la charge triphasée à l'alimentation. On appelle « courants de phase » les courants circulant dans les éléments de la charge.

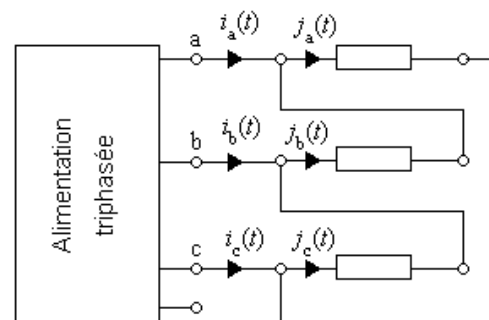
b. Application

➤ Pour une charge couplée en étoile, quelle est la différence entre les courants de ligne et de phase ? Il n'y a pas de différence dans ce cas.

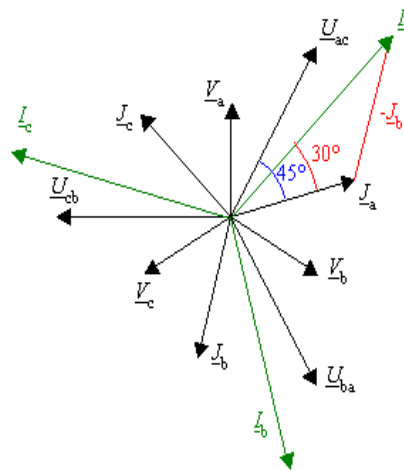
➤ Le graphe ci-contre représente une charge couplée en triangle reliée à une alimentation imposant des tensions formant un système triphasé équilibré direct (les tensions composées ont une valeur efficace égale à 400 V).

- Placer sur un diagramme de Fresnel les vecteurs $\underline{V}_a$, $\underline{V}_b$ et $\underline{V}_c$ associés aux tensions simples (voir le graphe ci-dessous à droite). Placer sur ce même diagramme les vecteurs $\underline{U}_{ac}$, $\underline{U}_{ba}$ et $\underline{U}_{cb}$. $\underline{U}_{ac} = \underline{V}_a - \underline{V}_c$; $\underline{U}_{ba} = \underline{V}_b - \underline{V}_a$ et $\underline{U}_{cb} = \underline{V}_c - \underline{V}_b$ (voir le graphe ci-dessous à droite).

La charge est constituée de trois éléments identiques d'impédance 10Ω et imposant un retard de 45° au courant par rapport à la tension.



- Calculer l'intensité efficace des courants dans les éléments de la charge. Si les tensions composées imposées par l'alimentation ont une valeur efficace de 400 V alors, les éléments de la charge sont parcourus par des courants de valeur efficace 40 A. Placer les vecteurs $\underline{I}_a$, $\underline{I}_b$ et $\underline{I}_c$ sur le diagramme vectoriel : $\underline{I}_a$ est en retard de 45° sur $\underline{U}_{ac}$, $\underline{I}_b$ est en retard de 45° sur $\underline{U}_{ba}$ et $\underline{I}_c$ est en retard de 45° sur $\underline{U}_{cb}$. Écrire les lois des nœuds (il y en a trois) permettant d'obtenir les relations entre les courants en ligne et en phase : au point a, $\underline{I}_a = \underline{I}_a - \underline{I}_b$; au point b, $\underline{I}_b = \underline{I}_b - \underline{I}_c$; au point c, $\underline{I}_c = \underline{I}_c - \underline{I}_a$. Placer les vecteurs associés aux courants en ligne sur le diagramme de Fresnel.

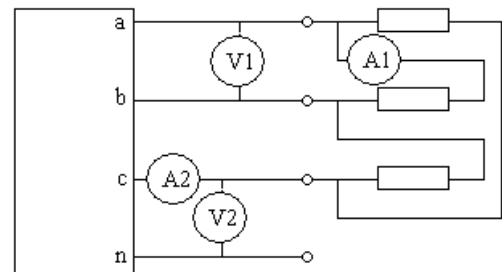


- On note J la valeur efficace des courants de phase et I la valeur efficace des courants de ligne. Montrer que $I = \sqrt{3} J$. La démonstration est identique à celle pour la relation entre les valeurs efficaces des tensions simples et composées.

Exercice 6

On considère le montage représenté ci-contre, les trois impédances sont identiques.

A1 indique la valeur efficace d'un courant de phase alors que A2 indique la valeur efficace d'un courant en ligne, d'où la relation entre les indications $I_2 = I_1 \sqrt{3}$



1. Est-il possible que l'ampèremètre A2 indique 50 A alors que A1 indique 87 A ? Non car la relation ci-dessus n'est pas vérifiée (l'intensité efficace en ligne serait plus faible que l'intensité dans un élément).
2. Quelle est l'indication de l'ampèremètre A1 si A2 indique 35 A ? 20,2 A
3. Le voltmètre V1 indique 400 V et l'ampèremètre A1 indique 20 A. Calculer l'impédance des éléments de la charge et donner l'indication de l'ampèremètre A2. L'indication de V1 correspond à la valeur efficace de la tension aux bornes d'un élément de la charge et celle de A1 correspond à l'intensité efficace du courant dans un élément : l'impédance d'un élément est donc égale à 20Ω . A2 indique 34,6 A.

Exercice 7

Le schéma ci-contre représente une charge triphasée équilibrée alimentée par une source triphasée délivrant un système équilibré direct de tensions triphasées.

Chaque résistance est égale à $5\ \Omega$ et chaque inductance à 10 mH . La valeur efficace des sources de tension est égale à 230 V .

1. Placer les vecteurs associés aux tensions simples sur un diagramme. Voir le diagramme ci-dessous à droite.

2. Calculer la valeur efficace des intensités dans un élément de la charge. L'impédance complexe d'un élément de la charge est égale à la somme des impédances complexes de la résistance et de l'inductance soit $\underline{Z} = R + jL\omega$. L'intensité efficace est égale à la valeur efficace des tensions $e_a(t)$, $e_b(t)$ et $e_c(t)$ divisée par le module de l'impédance complexe :

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} = \frac{230}{\sqrt{5^2 + (10 \cdot 10^{-3} \cdot 100\pi)^2}} = 38,9\text{ A}$$

3. Calculer le déphasage entre la tension et l'intensité pour un élément de la charge. L'argument de l'impédance complexe est égal au déphasage entre l'intensité et la tension pour un élément de la charge, sa tangente est donnée par

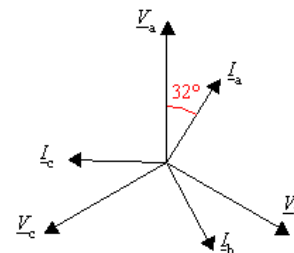
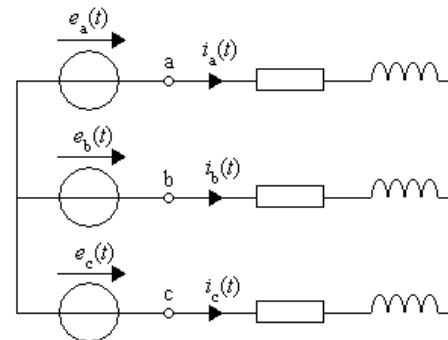
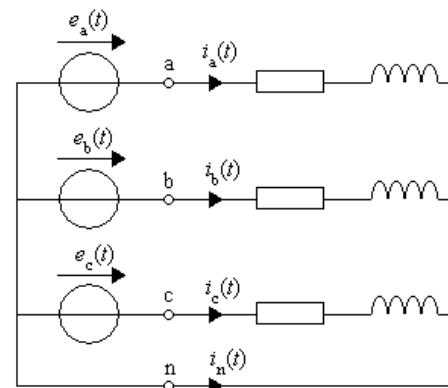
$$\tan \varphi = \frac{L\omega}{R} = \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 100\pi}{5} = 0,628 \quad \text{soit un retard de } 32^\circ \text{ de}$$

l'intensité par rapport à la tension.

4. Placer les vecteurs associés aux intensités $i_a(t)$, $i_b(t)$ et $i_c(t)$ sur le diagramme vectoriel. Voir le diagramme.

5. Déterminer graphiquement l'intensité circulant dans le neutre. Est-il possible de le supprimer ? D'après la loi des nœuds, $i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) + i_n(t) = 0$ donc $I_a + I_b + I_c + I_n = 0$, la construction graphique montre que le courant dans le neutre est nul.

6. Le fil de neutre est supprimé, quelle est la valeur de la tension entre le point étoile de la charge et le neutre (point étoile reliant les sources de tension) ? Dans la situation précédente, l'intensité du courant de neutre était nulle, la tension entre les points considérés est donc nulle. Les valeurs efficaces des intensités et leurs phases à l'origine sont-elles modifiées par rapport à la situation précédente ? Il n'y a aucun changement par rapport à ce qui précède.

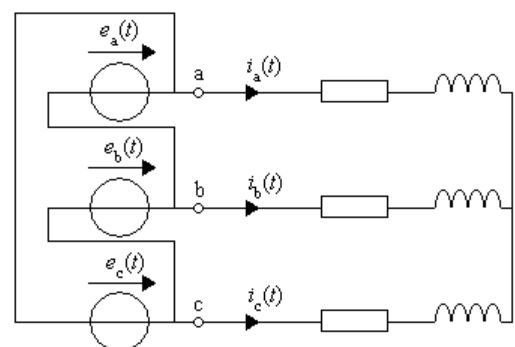


Exercice 8

Les tensions $e_a(t)$, $e_b(t)$ et $e_c(t)$ forment un système triphasé équilibré direct de valeur efficace 230 V , les résistances sont égales à $5\ \Omega$ et les inductances à 10 mH .

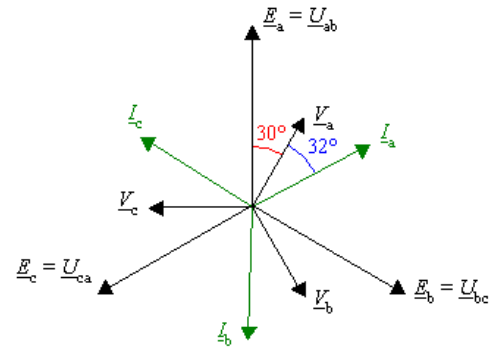
1. Placer les vecteurs associés à $e_a(t)$, $e_b(t)$ et $e_c(t)$ sur un diagramme vectoriel. Voir le diagramme page suivante.

2. Placer sur ce même diagramme les vecteurs associés aux tensions aux bornes des éléments de la charge. $e_a(t)$ correspond à $u_{ab}(t)$, $e_b(t)$ correspond à $u_{bc}(t)$ et $e_c(t)$ correspond à $u_{ca}(t)$ et comme ces tensions forment un système triphasé équilibré direct alors $v_a(t)$ est en retard de 30° sur $u_{ab}(t)$ (voir les diagrammes tracés au début du cours).



3. Calculer la valeur efficace des intensités $i_a(t)$, $i_b(t)$ et $i_c(t)$.
Le seul changement par rapport à ce qui précède est la valeur efficace des tensions aux bornes des éléments qui est ici égale à $230/\sqrt{3}=133\text{ V}$ donc l'intensité efficace dans les éléments est égale à 22,4 A.

4. Calculer le déphasage entre la tension et l'intensité pour les éléments de la charge. Les déphasages sont inchangés par rapport à l'exercice précédent.



5. Placer les vecteurs associés aux intensités sur le diagramme. Voir le diagramme ci-dessus.

III. Puissances dans les systèmes triphasés

1. Puissance instantanée

On considère une alimentation triphasée équilibrée reliée à une charge triphasée constituée de trois éléments notés a, b et c (le couplage n'est pas connu et la charge n'est pas nécessairement équilibrée). Les tensions aux bornes des éléments de la charge sont notées $v_{ca}(t)$, $v_{cb}(t)$ et $v_{cc}(t)$, les intensités des courants à travers les éléments de la charge sont notées $i_{ca}(t)$, $i_{cb}(t)$ et $i_{cc}(t)$.

Exprimer les puissances instantanées pour chaque élément de la charge, notées $p_a(t)$, $p_b(t)$ et $p_c(t)$, puis en déduire la puissance instantanée totale.

Chaque élément de la charge se comporte comme une charge monophasée : $p_a(t) = v_{ca}(t)i_{ca}(t)$; $p_b(t) = v_{cb}(t)i_{cb}(t)$ et $p_c(t) = v_{cc}(t)i_{cc}(t)$. La puissance totale est obtenue en faisant la somme de ces trois puissances.

2. Puissances active, réactive et apparente

a. La charge n'est pas équilibrée

Les valeurs efficaces des tensions aux bornes des éléments de la charge sont notées V_c , et les intensités efficaces des courants sont notées I_{ca} , I_{cb} et I_{cc} . Les tensions et intensités pour chaque élément sont déphasées de φ_{ca} , φ_{cb} et φ_{cc} .

- Exprimer les puissances actives et réactives pour chaque élément de la charge.

Chaque élément de la charge se comporte comme une charge monophasée :

Puissances actives : $P_a = V_c I_{ca} \cos \varphi_{ca}$; $P_b = V_c I_{cb} \cos \varphi_{cb}$ et $P_c = V_c I_{cc} \cos \varphi_{cc}$

Puissances réactives : $Q_a = V_c I_{ca} \sin \varphi_{ca}$; $Q_b = V_c I_{cb} \sin \varphi_{cb}$ et $Q_c = V_c I_{cc} \sin \varphi_{cc}$

- En déduire les puissances active, réactive et apparente pour l'ensemble de la charge.

Les puissances active P_t et réactive Q_t pour l'ensemble de la charge sont égales aux sommes des puissances actives et réactives : $P_t = P_a + P_b + P_c$ et $Q_t = Q_a + Q_b + Q_c$. Pour la puissance apparente :

$S_t = \sqrt{P_t^2 + Q_t^2}$, il ne faut pas additionner les puissances apparentes de chaque élément.

b. La charge est équilibrée

Dans ce cas, les intensités des courants à travers chaque élément de la charge sont égales : $I_{ca} = I_{cb} = I_{cc} = I_c$ ainsi que les déphasages : $\varphi_{ca} = \varphi_{cb} = \varphi_{cc} = \varphi$.

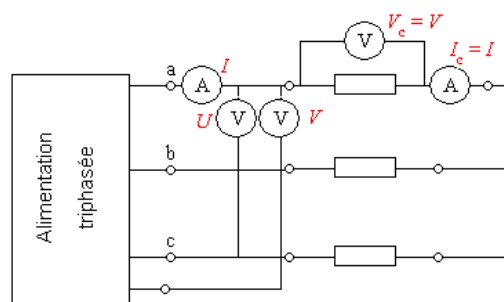
Écrire les expressions des puissances active, réactive et apparente. Les trois puissances actives sont identiques : $P_t = 3 V_c I_c \cos \varphi$; les trois puissances réactives sont identiques : $Q_t = 3 V_c I_c \sin \varphi$. La puissance apparente est alors égale à $S_t = 3 V_c I_c$

Couplage étoile : la valeur efficace des tensions simples est notée V , celle des tensions composées est notée U . L'intensité efficace des courants en ligne est notée I . Écrire les expressions des puissances active, réactive et apparente en fonction de V , I et φ puis en fonction de U , I et φ .

Dans cette situation : $V_c = V$ et $I_c = I$ donc

$$P_t = 3VI \cos \varphi$$

Puisque $U = \sqrt{3}V$ alors $P_t = \sqrt{3}UI \cos \varphi$. On obtient aussi $Q_t = \sqrt{3}UI \sin \varphi$ et $S_t = \sqrt{3}UI$

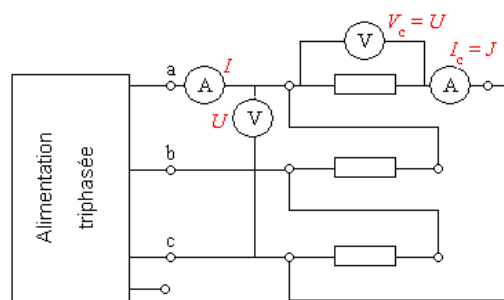


➤ **Couplage triangle** : la valeur efficace des tensions simples est notée V , celle des tensions composées est notée U . L'intensité efficace des courants en ligne est notée I celle des courants de phase est notée J . Écrire les expressions des puissances active, réactive et apparente en fonction de U , J et φ puis en fonction de U , I et φ .

Dans cette situation : $V_c = U$ et $I_c = J$ donc

$$P_t = 3UJ \cos \varphi$$

Puisque $I = \sqrt{3}J$ alors $P_t = \sqrt{3}UI \cos \varphi$. On obtient aussi $Q_t = \sqrt{3}UI \sin \varphi$ et $S_t = \sqrt{3}UI$



3. Puissance apparente complexe, théorème de Boucherot

a. Définition

On note $\underline{V}_{cn}$ et $\underline{I}_{cn}$ les nombres complexes associés à la tension et l'intensité pour l'élément « n » (a ou b ou c) d'une charge triphasée équilibrée. Le déphasage entre la tension et l'intensité pour un élément de la charge est noté φ_c .

- la puissance apparente complexe est définie par : $\underline{S} = P + jQ = 3V_c I_c \cos \varphi_c + j3V_c I_c \sin \varphi_c$,
- si la tension est prise comme origine des phases alors

$\underline{V}_{cn} = V_c$; $\underline{I}_{cn} = I_c(\cos \varphi_c - j \sin \varphi_c)$ et $\underline{I}_{cn}^* = I_c(\cos \varphi_c + j \sin \varphi_c)$ est le complexe conjugué de $\underline{I}_{cn}$ donc :

$$\underline{S} = 3 \cdot \underline{V}_{cn} \cdot \underline{I}_{cn}^*$$

b. Propriété : théorème de Boucherot

Les puissances apparentes complexes s'ajoutent :

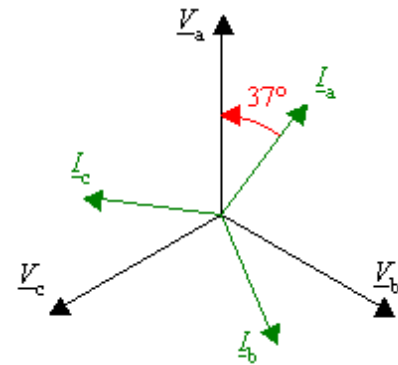
- la puissance active pour une association de charges triphasées est égale à la somme des puissances actives pour chaque élément.
- la puissance réactive pour une association de charges triphasées est égale à la somme des puissances réactives pour chaque élément.

4. Facteur de puissance

Il est égal au rapport de la puissance active sur la puissance apparente. Si les tensions et intensités sont sinusoïdales alors le facteur de puissance est égal au cosinus du déphasage entre la tension et l'intensité pour un élément de la charge.

Exercice 9

Une charge triphasée couplée en étoile est reliée à une alimentation triphasée imposant des tensions composées de valeur efficace 400 V. L'intensité des courants en ligne est égale à 37 A. Le facteur de puissance des éléments de la charge est égal à 0,8 et les intensités sont en retard sur les tensions.



1. Calculer les puissances apparente, active et réactive.

Puissance apparente : $S = \sqrt{3} U I = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 37 = 25,6 \text{ kVA}$

Puissance active : $P = \sqrt{3} U I \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 37 \cdot 0,8 = 20,5 \text{ kW}$

Puissance réactive : $Q = \sqrt{3} U I \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 37 \cdot 0,6 = 15,4 \text{ kvar}$

2. Placer les vecteurs associés aux tensions simples et aux intensités en ligne sur un diagramme vectoriel. **Les intensités en ligne sont en retard de 37° sur les tensions simples.**

Exercice 10

Une alimentation triphasée (tensions simples de valeur efficace 230 V) est connectée avec une charge équilibrée de puissance active 20 kW dont le facteur de puissance est égal à 0,7 (comportement inductif).

1. Calculer l'intensité efficace en ligne.

Elle est obtenue à partir de la relation donnant la puissance active : $I = \frac{P}{\sqrt{3} U \cos \varphi} = \frac{20 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 400 \cdot 0,7} = 41,2 \text{ A}$

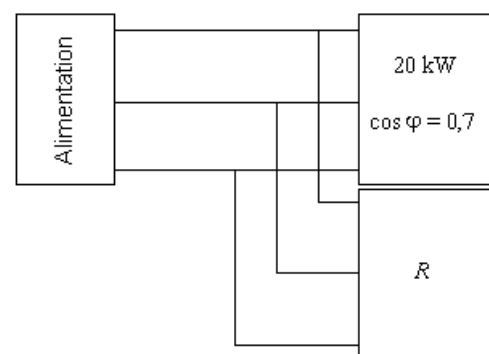
Une charge triphasée résistive équilibrée (10Ω pour chaque élément) est ajoutée en sortie de l'alimentation.

2. Calculer l'intensité efficace des courants dans chaque élément de la charge résistive si elle couplée en étoile puis en triangle. En déduire dans chaque cas la puissance active pour l'ensemble des éléments de cette charge.

Couplage étoile	Couplage triangle
Une résistance de 10Ω est soumise à une tension de valeur efficace 230 V soit une intensité efficace égale à $I = \frac{230}{10} = 23 \text{ A}$	Une résistance de 10Ω est soumise à une tension de valeur efficace 400 V soit une intensité efficace égale à $I = \frac{400}{10} = 40 \text{ A}$
La puissance active est égale à trois fois la puissance active pour une résistance : $P = 3 R I^2 = 3 \cdot 10 \cdot 23^2 = 15,9 \text{ kW}$	La puissance active est égale à trois fois la puissance active pour une résistance : $P = 3 R I^2 = 3 \cdot 10 \cdot 40^2 = 48 \text{ kW}$

3. Calculer les puissances actives et réactives pour l'association des deux charges lorsque la charge résistive est couplée en étoile puis en triangle. En déduire la puissance apparente et le facteur de puissance pour chaque situation.

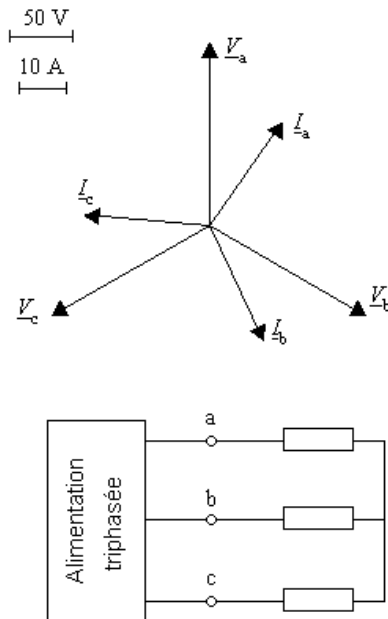
On applique le théorème de Boucherot en additionnant les puissances actives et réactives pour chaque charge. Les puissances actives ont été calculées précédemment, la puissance réactive est nulle pour la charge résistive et égale à 20,4 kvar pour la charge de 20 kW (facteur de puissance 0,7).



Puissance active totale $P_t = 20 + 15,9 = 35,9 \text{ kW}$	Puissance active totale $P_t = 20 + 48 = 68 \text{ kW}$
Puissance réactive totale $Q_t = 20,4 \text{ kvar}$	Puissance réactive totale $Q_t = 20,4 \text{ kvar}$
Puissance apparente $S_t = \sqrt{P_t^2 + Q_t^2} = \sqrt{35,9^2 + 20,4^2}$	Puissance apparente $S_t = \sqrt{P_t^2 + Q_t^2} = \sqrt{68^2 + 20,4^2}$
$S_t = 41,3 \text{ kVA}$ et $\cos \varphi = \frac{P_t}{S_t} = \frac{20}{41,3} = 0,87$	$S_t = 71 \text{ kVA}$ et $\cos \varphi = \frac{P_t}{S_t} = \frac{68}{71} = 0,96$

Exercice 11

Le diagramme vectoriel ci-dessous représente les vecteurs associés aux tensions simples et intensités en ligne pour chaque élément de la charge.



1. Placer les vecteurs associés aux intensités dans les éléments de la charge et ceux associés aux tensions composées. Les intensités des éléments correspondent à I_a , I_b et I_c . $U_{ab} = V_a - V_b$, ...

2. Faire apparaître les déphasages entre tension et intensité pour les éléments de la charge. Calculer le facteur de puissance. Le facteur de puissance est le cosinus de l'angle entre V_a et I_a (ou V_b et I_b ou V_c et I_c). La mesure de l'angle sur le diagramme donne 39° soit un facteur de puissance de $\cos 39 = 0,78$

3. Calculer les puissances apparente, active et réactive.

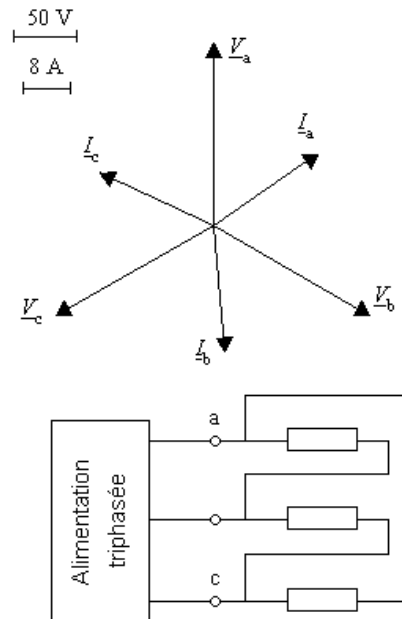
La valeurs efficaces des tensions simples et des intensités en ligne sont déterminées sur le diagramme à partir des échelles : $V = 150 \text{ V}$ et $I = 26,7 \text{ A}$.

$$P = 3 V I \cos \varphi = 3 \cdot 150 \cdot 26,7 \cdot 0,78 = 9,4 \text{ kW}$$

$$S = 3 V I = 3 \cdot 150 \cdot 26,7 = 12 \text{ kVA}$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{12^2 - 9,4^2} = 7,46 \text{ kvar} \quad \text{ou} \\ Q = 3 V I \sin \varphi = 3 \cdot 150 \cdot 26,7 \cdot \sin 39 = 7,46 \text{ kvar}$$

Le diagramme vectoriel ci-dessous représente les vecteurs associés aux tensions simples et intensités en ligne pour chaque élément de la charge.



1. Placer les vecteurs associés aux intensités dans les éléments de la charge et ceux associés aux tensions composées.

L'élément supérieur de la charge est soumis à U_{ab} , celui du milieu est soumis à U_{bc} et celui du bas est soumis à U_{ca} . $U_{ab} = V_a - V_b$, ...

Les intensités des éléments de la charge sont différentes de celles en ligne. D'après la relation :

$P = 3 V I \cos \varphi = 3 U J \cos \varphi$, le déphasage entre la tension et l'intensité pour un élément de la charge est égal à celui entre une tension simple et l'intensité en ligne pour le réseau alimentant la charge triphasée.

2. Faire apparaître les déphasages entre tension et intensité pour les éléments de la charge. Calculer le facteur de puissance.

Le facteur de puissance est le cosinus de l'angle entre U_{ab} et I_a (ou U_{bc} et I_b ou U_{ca} et I_c). La mesure de l'angle sur le diagramme donne 62° soit un facteur de puissance de $\cos 62 = 0,47$

3. Calculer les puissances apparente, active et réactive. Les valeurs efficaces des tensions simples et des intensités en ligne sont déterminées sur le diagramme à partir des échelles : $V = 150 \text{ V}$ et $I = 26,7 \text{ A}$.

$$P = 3 V I \cos \varphi = 3 \cdot 150 \cdot 26,7 \cdot 0,47 = 5,64 \text{ kW}$$

$$S = 3 V I = 3 \cdot 150 \cdot 26,7 = 12 \text{ kVA}$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{12^2 - 5,64^2} = 10,6 \text{ kvar} \quad \text{ou} \\ Q = 3 V I \sin \varphi = 3 \cdot 150 \cdot 26,7 \cdot \sin 62 = 10,6 \text{ kvar}$$

Exercice 12

Une charge triphasée équilibrée est reliée à une alimentation délivrant des tensions simples formant un système triphasé équilibré direct (valeur efficace 230 V). Chaque élément de la charge est constitué d'une résistance de $10\ \Omega$ en parallèle avec une inductance de 20 mH.

1. Calculer le module et l'argument de l'impédance d'un élément de la charge.

• Première méthode : utilisation de l'admittance

L'admittance complexe de l'association est égale à la somme des admittances complexes de la résistance et

de l'inductance :
$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} = \frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega}$$

D'où son module :
$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{L\omega}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot \pi}\right)^2} = 0,188\ \text{S}$$
 et comme $Z = \frac{1}{Y}$ alors $Z = 5,32\ \Omega$.

Tangente de l'argument de l'admittance complexe :
$$\tan(\text{Arg}(Y)) = \frac{\frac{-1}{L\omega}}{\frac{1}{R}} = \frac{-R}{L\omega} = \frac{-10}{20 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot \pi} = -1,59$$

L'argument de l'admittance complexe est donc égal à -58° . Puisque $Z = \frac{1}{Y}$ alors l'argument de l'impédance complexe est égal à 58° : pour un élément de la charge, l'intensité est en retard de 58° sur la tension.

• Deuxième méthode

L'impédance complexe est égal au produit des impédances de l'inductance et de la résistance sur la somme de

leurs impédances :
$$Z = \frac{R \cdot jL\omega}{R + jL\omega}$$

Le module de Z est égal au module du numérateur ($R \cdot L\omega$) divisé par le module du dénominateur

($\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$) donc
$$Z = \frac{R \cdot L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} = \frac{10 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot \pi}{\sqrt{10^2 + (20 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot \pi)^2}} = 5,32\ \Omega$$

L'argument de Z est égal à l'argument du numérateur (égal à 90° car $jR \cdot L\omega$ est un imaginaire pur) moins celui du dénominateur.

Tangente de l'argument du dénominateur $\tan(\text{Arg}(\text{Dén})) = \frac{L\omega}{R} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot \pi}{10} = 0,628$, ce qui correspond à un angle de 32° .

L'argument de Z est donc égal à $90 - 32 = 58^\circ$

La charge est couplée en étoile.

2. Calculer l'intensité efficace des courants en ligne.

Un élément d'impédance $Z = 5,32\ \Omega$ est soumis à une tension simple de valeur efficace 230 V donc

$$I = \frac{230}{5,32} = 43,2\ \text{A}$$

Placer sur un diagramme de Fresnel les vecteurs associés aux tensions simples et aux intensités. Voir diagramme ci-contre.

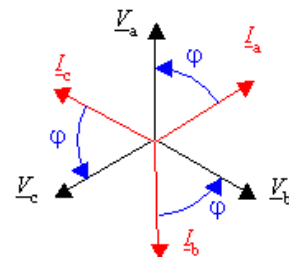
4. Faire figurer sur le diagramme les déphasages entre tension et intensité pour les éléments de la charge. Voir diagramme.

5. Calculer les puissances apparente, active et réactive.

Puissance active : $P = 3 V I \cos \varphi = 3 \cdot 230 \cdot 43,2 \cdot \cos 58 = 15,8\ \text{kW}$

Puissance réactive : $Q = 3 V I \sin \varphi = 3 \cdot 230 \cdot 43,2 \cdot \sin 58 = 36,6\ \text{kvar}$

Puissance apparente : $S = 3 V I = 3 \cdot 230 \cdot 43,2 = 29,8\ \text{kVA}$



IV. Mesure des puissances

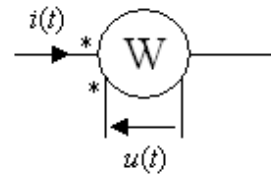
1. Rappels sur le fonctionnement d'un wattmètre

a. Constitution

Un wattmètre comporte :

- un circuit tension aux bornes duquel est imposée la tension $u(t)$,
- un circuit courant parcouru par l'intensité $i(t)$.

Les bornes de chacun des circuits sont repérés (signe « * » sur le schéma ci-contre) pour tenir compte des différences de polarité entre l'intensité et la tension.



b. Indication du wattmètre

- **Le wattmètre indique la valeur moyenne du produit $u(t).i(t)$** : Cette valeur moyenne peut être obtenue par « calcul » dans le cas d'un appareil numérique ou par « construction » (inertie des parties mobiles et facteur d'échelle) dans le cas d'un appareil à aiguille. Dans tous les cas, il faut vérifier que les signaux appliqués sur les entrées du wattmètre sont compatibles avec les spécifications du constructeur.

Attention : selon le branchement des deux circuits (tension et intensité) du wattmètre l'indication ne correspond pas obligatoirement à une puissance active.

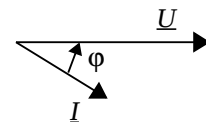
- **Si l'intensité et la tension sont sinusoïdales** alors l'indication du wattmètre correspond à la partie réelle de la puissance apparente complexe « vue » par le wattmètre : $\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$ ($\underline{I}^*$ est le complexe conjugué de $\underline{I}$)

Si $u(t)$ est prise comme origine des phases alors $\underline{U} = U$

On note φ le déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$ alors $\underline{I} = I \cos\varphi - jI \sin\varphi$

Puissance apparente complexe : $\underline{S} = UI \cos\varphi + jUI \sin\varphi$

L'indication du wattmètre correspond à $UI \cos\varphi$



2. Montages utilisés en triphasé

a. Avec trois wattmètres : la ligne comporte un neutre

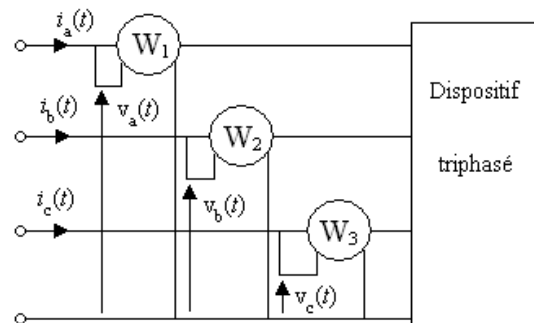
Le schéma de montage est représenté ci-contre :

Puissances apparentes complexe

- pour le wattmètre W_1 : $\underline{S}_1 = \underline{V}_a \cdot \underline{I}_a^*$
- pour le wattmètre W_2 : $\underline{S}_2 = \underline{V}_b \cdot \underline{I}_b^*$
- pour le wattmètre W_3 : $\underline{S}_3 = \underline{V}_c \cdot \underline{I}_c^*$

Les puissances apparentes complexes sont additionnées :

$$\underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 = \underline{V}_a \cdot \underline{I}_a^* + \underline{V}_b \cdot \underline{I}_b^* + \underline{V}_c \cdot \underline{I}_c^*$$



La partie réelle de la somme des indications des deux wattmètres correspond à la puissance active reçue par le dispositif triphasé.

- Ce résultat reste valable si le dispositif est déséquilibré.
- Si le dispositif est équilibré, un seul wattmètre, correctement branché, est suffisant, il suffit de multiplier son indication par trois.

b. Méthode des deux wattmètres : la ligne ne comporte pas de neutre ou le courant dans le neutre est nul.

Le schéma de montage est représenté ci-contre :

Puissances apparentes complexe

- pour le wattmètre W_1 : $\underline{S}_1 = \underline{U}_{ac} \cdot \underline{I}_a^* = (\underline{V}_a - \underline{V}_c) \cdot \underline{I}_a^*$

- pour le wattmètre W_2 : $\underline{S}_2 = \underline{U}_{bc} \cdot \underline{I}_b^* = (\underline{V}_b - \underline{V}_c) \cdot \underline{I}_b^*$

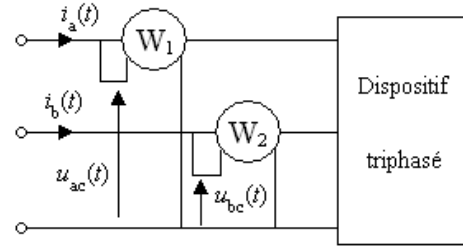
Les puissances apparentes complexes sont additionnées :

$$\underline{S}_1 + \underline{S}_2 = \underline{U}_{ac} \cdot \underline{I}_a^* + \underline{U}_{bc} \cdot \underline{I}_b^*$$

$$\underline{S}_1 + \underline{S}_2 = (\underline{V}_a - \underline{V}_c) \cdot \underline{I}_a^* + (\underline{V}_b - \underline{V}_c) \cdot \underline{I}_b^*$$

$$\underline{S}_1 + \underline{S}_2 = \underline{V}_a \cdot \underline{I}_a^* - \underline{V}_c \cdot \underline{I}_a^* + \underline{V}_b \cdot \underline{I}_b^* - \underline{V}_c \cdot \underline{I}_b^*$$

$$\underline{S}_1 + \underline{S}_2 = \underline{V}_a \cdot \underline{I}_a^* + \underline{V}_b \cdot \underline{I}_b^* - \underline{V}_c \cdot (\underline{I}_a^* + \underline{I}_b^*)$$



En pratique, on utilise un seul wattmètre et un « chahuteur ».

Puisque la ligne ne comporte pas de neutre (ou que le courant dans le neutre est nul) : $\underline{I}_a^* + \underline{I}_b^* + \underline{I}_c^* = 0$

$$\underline{S}_1 + \underline{S}_2 = \underline{V}_a \cdot \underline{I}_a^* + \underline{V}_b \cdot \underline{I}_b^* + \underline{V}_c \cdot \underline{I}_c^*$$

La partie réelle de la somme des indications des deux wattmètres correspond à la puissance active reçue par le dispositif triphasé.

Ce résultat reste valable si le dispositif est déséquilibré.

Exercice 13 : application au cas d'une charge équilibrée

On reprend le dispositif triphasé étudié précédemment. Le déphasage entre la tension et l'intensité pour un élément de la charge est noté φ , U est la valeur efficace des tensions composées et V la valeur efficace des tensions simples, I est la valeur efficace des intensités en ligne.

1.a. Rappeler la relation donnant la puissance active P en fonction de V , I et φ puis celle donnant P en fonction de U , I et φ .

D'après ce qui précède $P = 3 V I \cos \varphi$ et $P = \sqrt{3} U I \cos \varphi$

b. Rappeler la relation donnant la puissance réactive Q en fonction de V , I et φ puis celle donnant Q en fonction de U , I et φ .

D'après ce qui précède $Q = 3 V I \sin \varphi$ et $Q = \sqrt{3} U I \sin \varphi$

2. Le diagramme vectoriel ci-contre représente les vecteurs associés aux tensions simples et aux intensités en ligne ainsi que ceux associés à $u_{13}(t)$ et $u_{23}(t)$.

a. Quelle est la valeur de l'angle entre $\underline{V}_1$ et $\underline{U}_{13}$? entre $\underline{V}_2$ et $\underline{U}_{23}$?

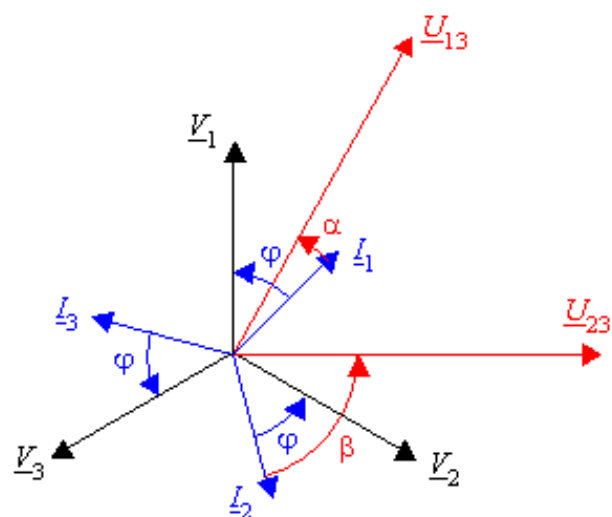
b. Exprimer les angles α et β (voir diagramme) en fonction de φ .

L'angle entre $\underline{V}_1$ et $\underline{U}_{13}$ est égal à 30° donc

$$\varphi = \alpha + \frac{\pi}{6} \quad (\text{angles en radians}) \quad \text{soit}$$

$$\alpha = \varphi - \frac{\pi}{6} \quad . \quad \text{De même L'angle entre } \underline{V}_2 \text{ et } \underline{U}_{23} \text{ est}$$

$$\text{égal à } 30^\circ \text{ donc } \beta = \varphi + \frac{\pi}{6} \quad (\text{angles en radians}).$$



Pour la suite, les indices 1, 2 et 3 correspondent aux lettres a, b et c du schéma en haut de cette page.

c. Exprimer l'indication W_{1ue} du wattmètre W_1 en fonction de U , I et φ .

Ce wattmètre « voit » la tension $\underline{U}_{13}$ et l'intensité $\underline{I}_1$, son indication correspond au produit des valeurs efficaces de ces deux grandeurs multiplié par le cosinus de leur déphasage soit α :

$$W_{1\text{lue}} = U \cdot I \cos \alpha = U \cdot I \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)$$

d. Exprimer l'indication $W_{2\text{lue}}$ du wattmètre W_2 en fonction de U , I et φ .

Ce wattmètre « voit » la tension $\underline{U}_{23}$ et l'intensité $\underline{I}_2$, son indication correspond au produit des valeurs efficaces de ces deux grandeurs multiplié par le cosinus de leur déphasage soit β :

$$W_{2\text{lue}} = U \cdot I \cos \beta = U \cdot I \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$$

3. Additionner les indications des deux wattmètres et comparer le résultat avec la puissance active P pour le dispositif.

Relations trigonométriques utiles :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

D'après les résultats précédents :

$$W_{1\text{lue}} + W_{2\text{lue}} = U \cdot I \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) + U \cdot I \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = U \cdot I \left[\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

D'après les relations trigonométriques $\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \varphi \cos \frac{\pi}{6} + \sin \varphi \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi$

et $\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi$ soit $\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \cos \varphi$. ce qui donne finalement $W_{1\text{lue}} + W_{2\text{lue}} = U \cdot I \sqrt{3} \cos \varphi$. La somme des indications des deux wattmètres est égale à la puissance active pour le dispositif triphasé : $P = W_{1\text{lue}} + W_{2\text{lue}}$

4. Soustraire l'indication du wattmètre W_2 de celle de W_1 et comparer le résultat avec la puissance réactive Q pour le dispositif.

D'après les résultats précédents :

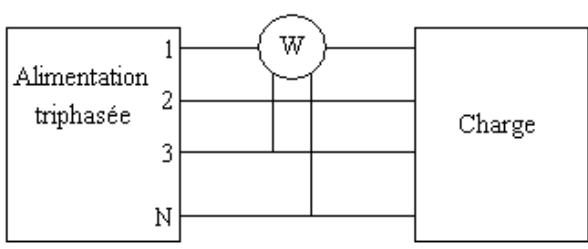
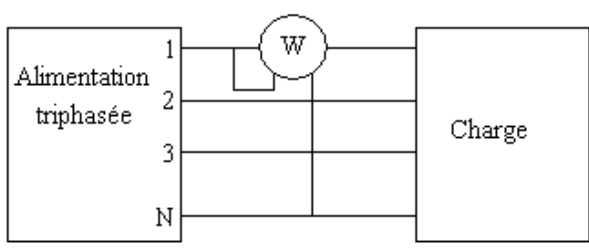
$$W_{1\text{lue}} - W_{2\text{lue}} = U \cdot I \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) - U \cdot I \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = U \cdot I \left[\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

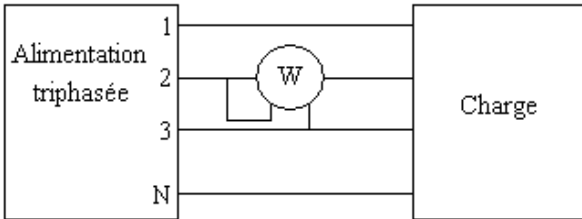
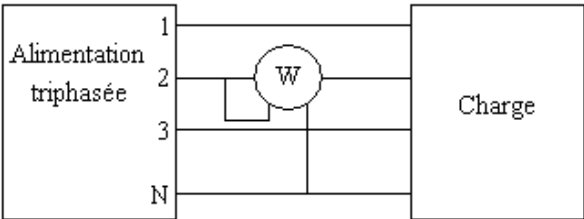
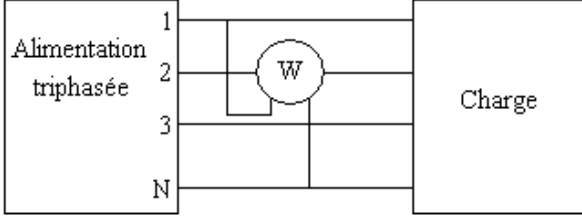
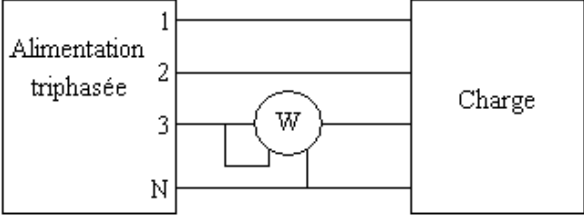
D'après ce qui précède $\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \varphi$ ce qui donne finalement

$W_{1\text{lue}} - W_{2\text{lue}} = U \cdot I \sin \varphi$. La différence des indications des deux wattmètres multipliée par $\sqrt{3}$ est égale à la puissance réactive pour le dispositif triphasé : $Q = \sqrt{3} (W_{1\text{lue}} - W_{2\text{lue}})$

Exercice 14

Une charge triphasée équilibrée est connectée aux bornes d'une alimentation triphasée équilibrée. Indiquer parmi les wattmètres représentés sur les schémas ci-dessous ceux qui sont susceptibles d'indiquer le tiers de la puissance active pour la charge. Pour les autres, indiquer pourquoi le branchement est erroné.

 Branchement erroné : le circuit tension est relié à une tension composée.	 Branchement correct.
--	--

 Branchement erroné : le circuit tension est relié à une tension composée.	 Branchement correct.
 Branchement erroné : le circuit tension est bien relié à une tension simple mais le circuit « voit » le courant pour une autre phase.	 Branchement correct.

Exercice 15

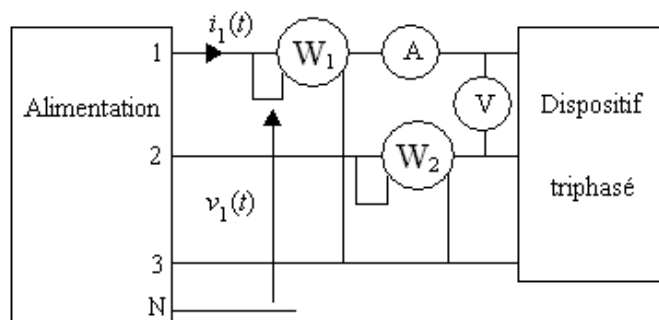
On considère le montage représenté ci-contre. L'alimentation délivre des tensions triphasées équilibrées. Le dispositif triphasé est équilibré.

Tous les appareils de mesure sont supposés parfaits.

Indication de W_1 : 37800

Indication de W_2 : 16500

Indication du voltmètre : 400 V



1. Calculer la puissance active et la puissance réactive.

La puissance active est égale à la somme des indications des deux wattmètres $P = W_{1\text{lue}} + W_{2\text{lue}}$ soit $P = 37800 + 16500 = 54300 \text{ W}$

La puissance réactive est égale à la différence des indications des deux wattmètres multipliée par $\sqrt{3}$ $Q = \sqrt{3}(W_{1\text{lue}} - W_{2\text{lue}})$ soit $Q = \sqrt{3}(37800 - 16500) = 36900 \text{ var}$

2. Dédurre de la question précédente le facteur de puissance.

Le facteur de puissance est donné par $k = \frac{P}{S}$ et $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ soit

$$k = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{54300}{\sqrt{54300^2 + 36900^2}} = 0,827$$

3. Quelle est l'indication de l'ampèremètre ?

La puissance apparente est donnée par $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ et $S = \sqrt{3}UI$ soit

$$I = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{\sqrt{3}U} = \frac{\sqrt{54300^2 + 36900^2}}{\sqrt{3} \cdot 400} = 94,8 \text{ A}$$

4. L'un (ou plusieurs) des oscillogrammes de la page suivante, représentant la tension $v_1(t)$ et l'intensité $i_1(t)$,

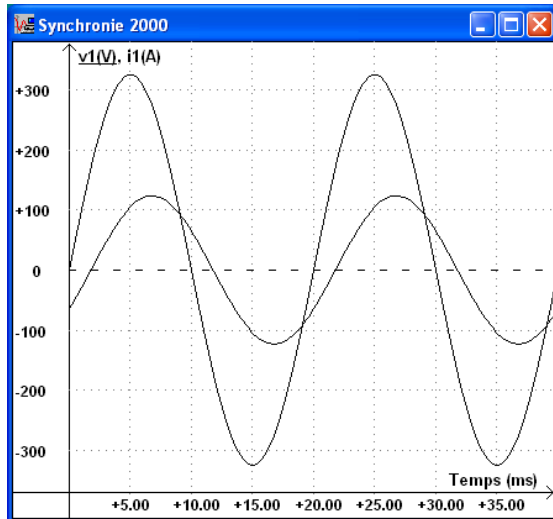
a été relevé sur le dispositif.

a. Déterminer le déphasage entre la tension $v_1(t)$ et l'intensité $i_1(t)$ pour chaque cas. Voir sous chaque oscillogramme. Remarque : la valeur efficace d'une tension simple est égale à 230 V (400 V pour les tensions composées d'après l'énoncé), La tension $v_1(t)$ a donc une amplitude (ou valeur maximale) égale à 325 V.

b. Lequel des oscillogrammes (ou lesquels) a pu être relevé sur le dispositif ?

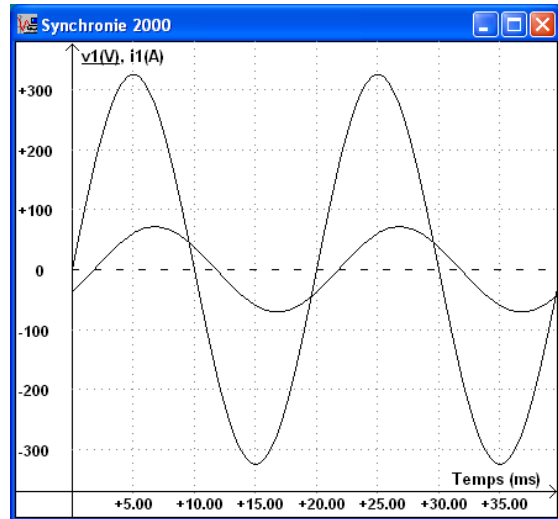
La valeur efficace du courant est égale à 94,8 A soit une valeur maximale de 134 A, le seul oscillogramme qui peut convenir est celui de la situation n°1. Les situations 2 et 3 sont éliminées car l'amplitude est trop faible. La situation 4 ne correspond pas au bon déphasage car le courant est en avance (ce qui n'est pas possible car la puissance réactive est positive).

Situation n°1



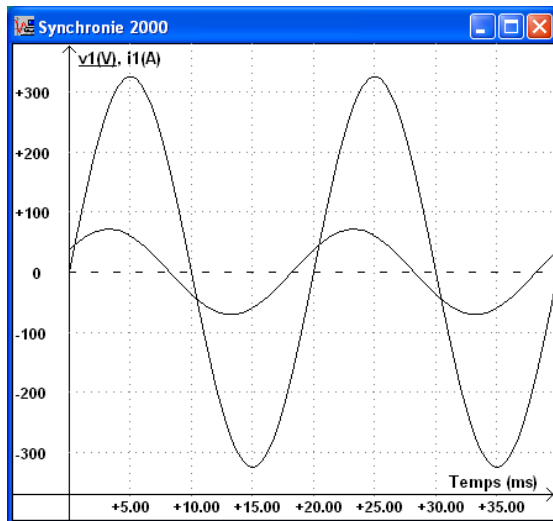
a. Le courant est en retard d'environ un douzième de période soit 30° : φ est proche de 30°

Situation n°2



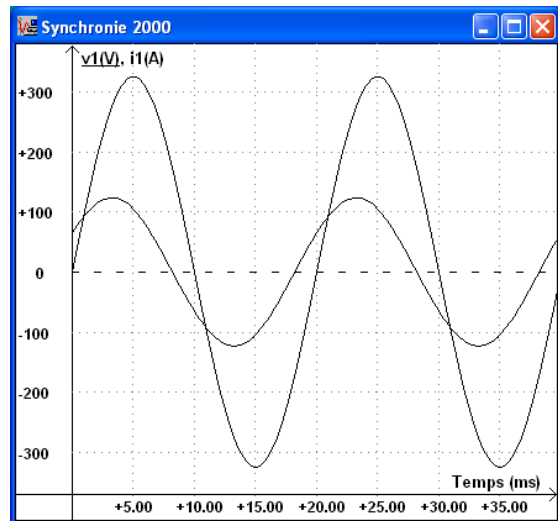
a. Le courant est en retard d'environ un douzième de période soit 30° : φ est proche de 30°

Situation n°3



a. Le courant est en avance d'environ un douzième de période soit 30° : φ est proche de -30°

Situation n°4



a. Le courant est en avance d'environ un douzième de période soit 30° : φ est proche de -30°

Les échelles verticales sont identiques pour l'intensité (en ampères) et la tension (en volts)

Exercice 16 (Extrait BTS)

Notations employées

a : valeur instantanée de la grandeur $a(t)$

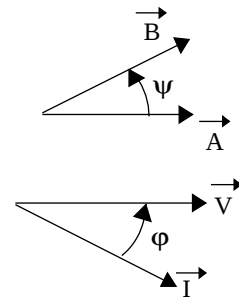
A : valeur efficace de a

$\underline{A}$: grandeur complexe associée à a , $\vec{A}$: vecteur de Fresnel associé à a .

ψ : phase à l'origine d'une grandeur b par rapport à une grandeur a :

$$\Psi = (\vec{A}, \vec{B})$$

φ : déphasage de i par rapport à v : $\varphi = (\vec{I}, \vec{V})$



Équilibrage d'une charge monophasée utilisée sur un réseau triphasé

Pour les fours électriques de forte puissance, les éléments chauffants, résistances ou inductances, sont des dipôles monophasés, et non des ensembles de trois éléments identiques, qui réaliseraient alors des charges triphasées équilibrées.

Pour le réseau qui alimente le four, une charge monophasée constitue une charge triphasée déséquilibrée. L'objet de l'étude est la transformation, par compensation, d'une charge monophasée en une charge triphasée équilibrée.

La charge est alimentée par un réseau triphasé équilibré direct, parfaitement sinusoïdal, (noté R, S, T, N) ; le neutre n'est pas relié. Quand une phase à l'origine est demandée sans précision de la référence, elle devra toujours être donnée par rapport à la tension composée $\underline{U}_{RS}$.

Le réseau fournit un système triphasé équilibré de tensions sinusoïdales. Les courants prélevés au réseau sont sinusoïdaux.

1. Étude des perturbations : four à résistance sans circuit d'équilibrage

Une résistance de chauffage permettant d'obtenir une puissance $P = 104 \text{ kW}$ est branchée entre les phases R et S (figure 1) d'un réseau triphasé 400 V, 50 Hz.

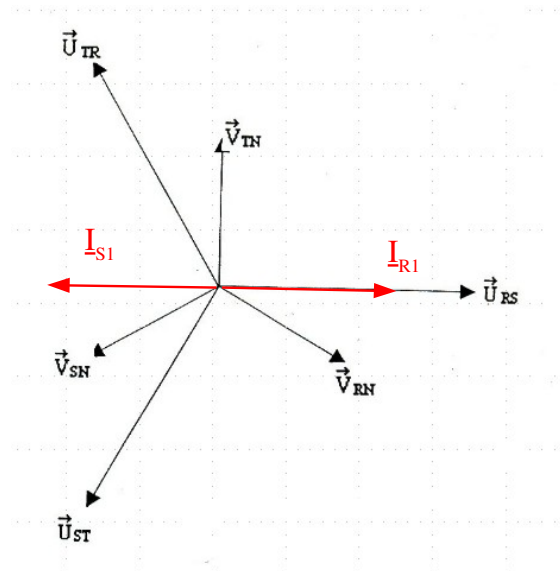
Quel est le déphasage φ du courant j_{RS} dans la résistance R par rapport à la tension u_{RS} ? **L'intensité à travers une résistance est en phase avec la tension à ses bornes donc** $\varphi = (\vec{I}_{RS}, \vec{U}_{RS}) = 0$

Calculer les intensités et les phases à l'origine des trois courants en ligne i_{R1} , i_{S1} , i_{T1} et placer ces courants sur le diagramme correspondant du document réponse n°1 a). On notera ψ_{R1} la phase de i_{R1} et ψ_{S1} celle de i_{S1} .

La puissance pour une résistance R soumise à une tension de valeur efficace U et parcourue par un courant d'intensité efficace I est donnée par $P = UI$ ce qui donne $J_{RS} = I_{R1} = \frac{P}{U} = \frac{104000}{400} = 260 \text{ A}$

i_{R1} est confondu avec j_{RS} et $i_{S1} = -j_{RS}$ et $i_{T1} = 0$ ce qui donne $\psi_{R1} = (\vec{I}_{R1}, \vec{U}_{RS}) = 0$. La valeur efficace de i_{S1} est égale à celle de i_{R1} soit 260 A et $\psi_{S1} = (\vec{I}_{S1}, \vec{U}_{RS}) = 180^\circ$

Voir les vecteurs sur le diagramme ci-contre.



2. Correction des perturbations : four à résistance avec circuit d'équilibrage

On utilise le circuit d'équilibrage de la figure 2 : une inductance L entre les phases R et T et une capacité C entre les phases S et T. Dans les questions 2.1 et 2.2 seuls ces éléments sont branchés sur le réseau.

Les valeurs de C et L sont choisies de manière à ce que les puissances réactives mises en jeu dans ces deux dipôles soient égales entre elles en valeurs absolues : $Q = 60 \text{ kvar}$.

2.1 Déterminer les valeurs de $C\omega$ et $L\omega$.

L'inductance et la capacité sont soumises à une tension composée (valeur efficace égale à 400 V). Les puissances réactives sont données par $Q = UI \sin \varphi$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad pour l'inductance et

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ rad pour la capacité ce qui donne $Q_L = UI_L$ pour l'inductance et $Q_C = -UI_C$ pour la capacité (I_L et I_C sont les valeurs efficaces des courants à travers l'inductance et la capacité ; le signe moins pour Q_C traduit le fait que la capacité fournit de l'énergie réactive). D'après la loi d'Ohm $I_L = \frac{U}{L\omega}$ donc

$$Q_L = \frac{U^2}{L\omega} \quad \text{et} \quad I_C = UC\omega \quad \text{donc} \quad Q_C = -U^2 C\omega \quad . \quad \text{Puisque } Q = Q_L = |Q_C| = 60 \text{ kvar alors}$$

$$L\omega = \frac{U^2}{Q_L} = \frac{400^2}{60000} = 2,67 \quad \Omega \quad . \quad \text{De même} \quad C\omega = \frac{|Q_C|}{U^2} = \frac{60000}{400^2} = 0,375 \text{ S}$$

2.2 Calculer l'intensité du courant i_{S2} et son déphasage φ_{S2} par rapport à u_{ST} . Calculer l'intensité efficace du courant i_{R2} et son déphasage par rapport à u_{RT} , puis sa phase ψ_{R2} par rapport à u_{TR} .

i_{S2} est l'intensité à travers la capacité qui est soumise à la tension u_{ST} : l'intensité du courant est donnée par

$$I_{S2} = UC\omega = 400 \cdot 0,375 = 150 \text{ A} \quad ; \quad \text{le courant à travers une capacité est en avance de } 90^\circ \text{ sur la tension à ses bornes soit}$$

$\varphi_{S2} = (\vec{I}_{S2}, \vec{U}_{ST}) = -90^\circ$

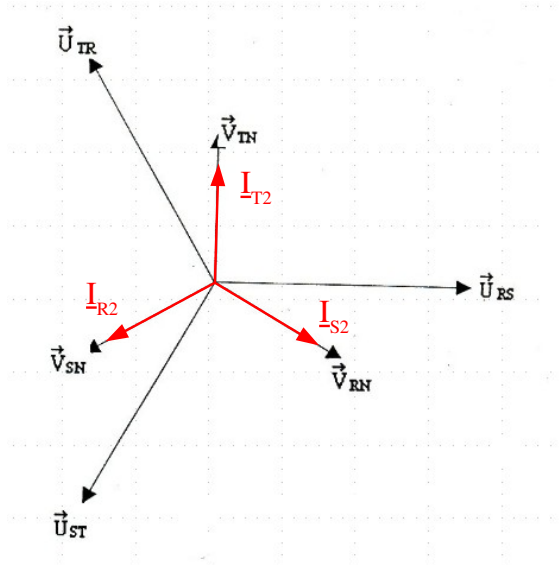
i_{R2} est l'intensité à travers l'inductance qui est soumise à la tension u_{RT} : l'intensité du courant est donnée par

$$I_{R2} = \frac{U}{L\omega} = \frac{400}{2,67} = 150 \text{ A} \quad ; \quad \text{le courant à travers une inductance est en retard de } 90^\circ \text{ sur la tension à ses bornes soit}$$

$\varphi_{R2} = (\vec{I}_{R2}, \vec{U}_{RT}) = 90^\circ$; comme u_{RT} est en opposition de phase avec u_{TR} alors

$$\psi_{R2} = (\vec{I}_{R2}, \vec{U}_{TR}) = -90^\circ$$

Placer ces courants sur un diagramme de Fresnel identique à celui du document réponse n°1 a). En déduire l'intensité du courant i_{T2} et sa phase par rapport à u_{RS} .



Voir le document réponse. D'après la loi des nœuds : $i_{R2} + i_{S2} + i_{T2} = 0$ soit $i_{T2} = -i_{R2} - i_{S2}$. On lit sur le document réponse $\psi_{T2} = (\vec{I}_{T2}, \vec{U}_{RS}) = 90^\circ$

2.3 On ajoute ce circuit de compensation à la résistance de la première question (figure 3). Déterminer les intensités efficaces et les phases des trois courants de ligne : i_{R3} , i_{S3} , i_{T3} . Placer ces courants sur un diagramme de Fresnel identique à celui du document réponse n°1 a). Calculer la puissance active P et la puissance réactive Q fournies par le réseau R, S, T.

D'après la loi des nœuds :

$$i_{R3} = j_{RS} + i_{R2} = i_{R1} + i_{R2} \text{ ce qui donne pour les vecteurs associés } \vec{I}_{R3} = \vec{I}_{R1} + \vec{I}_{R2}$$

$$i_{S3} = -j_{RS} + i_{S2} = i_{S1} + i_{S2} \text{ ce qui donne pour les vecteurs associés } \vec{I}_{S3} = \vec{I}_{S1} + \vec{I}_{S2}$$

$$i_{T3} = i_{T2}$$

Voir le diagramme à la page suivante. On mesure sur ce diagramme une intensité efficace de 150 A pour chaque courant.

Pour les phases, on mesure : $\psi_{R3} = (\vec{I}_{R3}, \vec{U}_{RS}) = -30^\circ$; $\psi_{S3} = (\vec{I}_{S3}, \vec{U}_{RS}) = -120^\circ$ et $\psi_{T3} = (\vec{I}_{T3}, \vec{U}_{RS}) = 90^\circ$

La puissance active est donnée par $P=3VI\cos\varphi$ et $\varphi=0$ (i_{R3} est en phase avec v_{RN} , i_{S3} est en phase avec v_{SN} , ...) soit $P=3VI$

$P=3\frac{400}{\sqrt{3}}150=104\text{ kW}$ (on retrouve la puissance active du four). La puissance réactive est donnée par $Q=3VI\sin\varphi$ et comme $\varphi=0$ alors $Q=0\text{ var}$.

Résolution utilisant les nombres complexe associés :

La grandeur u_{RS} étant choisie comme origine des phases alors le nombre complexe associé à i_{R1} (en phase avec u_{RS}) est un réel de module égal à 260 A :

$$\underline{I}_{R1}=260$$

Le courant i_{R2} est en retard de 150° sur u_{RS} et sa valeur efficace est égale à 150 A donc

$\underline{I}_{R2}=150(\cos(-150)+j\sin(-150))=-130-j75$ d'où $\underline{I}_{R3}=260-130-j75=130-j75$ (loi des nœuds) ce qui donne $I_{R3}=\sqrt{130^2+(-75)^2}=150\text{ A}$ pour la valeur efficace.

Pour l'argument, on utilise les relations trigonométriques : $\cos\psi_{R3}=\frac{130}{\sqrt{130^2+(-75)^2}}=0,866$ et

$$\sin\psi_{R3}=\frac{-75}{\sqrt{130^2+(-75)^2}}=-0,5 \text{ ce qui donne } \psi_{R3}=-30^\circ$$

Le nombre complexe associé à i_{S1} (en opposition de phase avec u_{RS}) est un réel de module égal à -260 A :

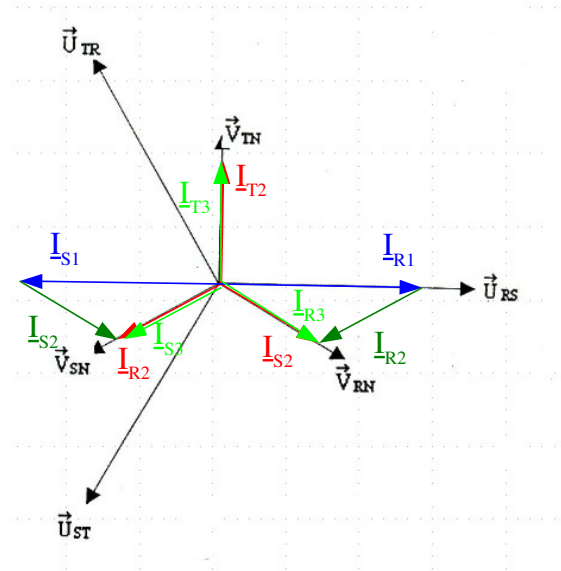
$\underline{I}_{R1}=-260$. Le courant i_{S2} est en retard de 30° sur u_{RS} et sa valeur efficace est égale à 150 A donc

$\underline{I}_{S2}=150(\cos(-30)+j\sin(-30))=130-j75$ d'où $\underline{I}_{S3}=-260+130-j75=-130-j75$ (loi des nœuds) ce qui donne $I_{S3}=\sqrt{(-130)^2+(-75)^2}=150\text{ A}$

Pour l'argument, on utilise les relations trigonométriques : $\cos\psi_{S3}=\frac{-130}{\sqrt{(-130)^2+(-75)^2}}=-0,866$ et

$$\sin\psi_{S3}=\frac{-75}{\sqrt{(-130)^2+(-75)^2}}=-0,5 \text{ ce qui donne } \psi_{S3}=-150^\circ$$

Enfin $\underline{I}_{T3}=\underline{I}_{T2}=150(\cos 90+j\sin 90)=j150$. $I_{T3}=150\text{ A}$ et i_{T3} est en avance de 90° sur u_{RS} .



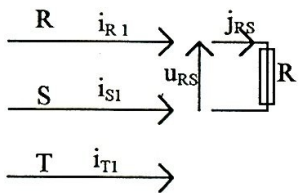


FIGURE 1

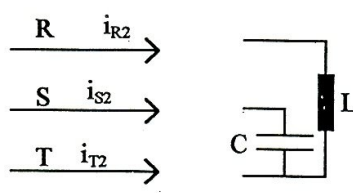


FIGURE 2

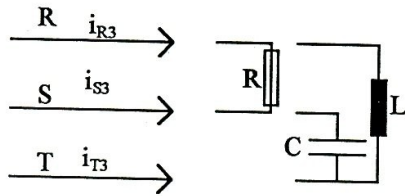


FIGURE 3

