MATEMÁTICA — ENSINO MÉDIO

FUNÇÕES: PARIDADE

Funções Pares e Ímpares

Objetivos da Aula

Conhecimentos	Habilidades
• Definir funções pares e ímpares • Identificar simetrias nos gráficos • Conhecer exemplos clássicos	• Classificar funções quanto à paridade • Usar simetria para esboçar gráficos • Resolver exercícios de vestibular

1. Introdução e Motivação

Ao estudar funções, frequentemente observamos que o gráfico de algumas delas apresenta uma **simetria especial**. Essa simetria não é coincidência: ela reflete uma propriedade algébrica fundamental chamada **paridade**. Entender a paridade de uma função permite antecipar o comportamento do seu gráfico, simplificar cálculos e resolver problemas com maior elegância.

Pergunta motivadora

Por que o gráfico de $f(x) = x^2$ é perfeitamente simétrico em relação ao eixo y?
E por que $f(x) = x^3$ apresenta uma simetria diferente, em relação à origem?
Essas perguntas são respondidas pelo conceito de paridade de funções.

2. Função Par

2.1 Definição Formal

Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é dita **par** quando, para todo x pertencente ao domínio A, temos:

$$f(-x) = f(x), \quad \text{para todo } x \text{ pertencente ao domínio } A$$

(o domínio A deve ser simétrico em relação à origem)

2.2 Interpretação Geométrica

Geometricamente, a condição $f(-x) = f(x)$ significa que o gráfico da função é **simétrico em relação ao eixo y**. Isso quer dizer: se o ponto (a, b) pertence ao gráfico, então o ponto (−a, b) também pertence.

Em outras palavras, o lado esquerdo do gráfico é o **reflexo espelhado** do lado direito.

2.3 Exemplos de Funções Pares

Função	Verificação: f(−x) = ?	Conclusão
$f(x) = x^2$	$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ ✓	**É par**
$f(x) = x^4$	$f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$ ✓	**É par**
$f(x) = \|x\|$	$f(-x) = \|-x\| = \|x\| = f(x)$ ✓	**É par**
$f(x) = \cos(x)$	$f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$ ✓	**É par**
$f(x) = x^2 + 3$	$f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$ ✓	**É par**

3. Função Ímpar

3.1 Definição Formal

Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é dita **ímpar** quando, para todo x pertencente ao domínio A, temos:

$$f(-x) = -f(x), \quad \text{para todo } x \text{ pertencente ao domínio } A$$

(o domínio A deve ser simétrico em relação à origem e f(0) = 0 quando 0 pertence a A)

3.2 Interpretação Geométrica

Para funções ímpares, o gráfico possui **simetria em relação à origem (0, 0)**. Isso significa: se o ponto (a, b) está no gráfico, então o ponto (−a, −b) também está.

Visualmente, ao rotacionar o gráfico 180° em torno da origem, ele coincide com ele mesmo.

3.3 Propriedade Importante: f(0) = 0

Atenção: Condição necessária para funções ímpares

Se f é uma função ímpar e 0 pertence ao seu domínio, então obrigatoriamente f(0) = 0.

Demonstração: Aplicando a definição em x = 0:

$f(-0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

Consequência: Se f(0) for diferente de 0, então f NÃO pode ser ímpar!

3.4 Exemplos de Funções Ímpares

Função	Verificação: f(−x) = ?	Conclusão
$f(x) = x$	$f(-x) = -x = -f(x)$ ✓	É ímpar
$f(x) = x^3$	$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ ✓	É ímpar
$f(x) = x^5$	$f(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -f(x)$ ✓	É ímpar
$f(x) = \text{sen}(x)$	$f(-x) = \text{sen}(-x) = -\text{sen}(x) = -f(x)$ ✓	É ímpar
$f(x) = x^3 - x$	$f(-x) = -x^3+x = -(x^3-x) = -f(x)$ ✓	É ímpar

4. Funções Sem Paridade

Nem toda função é par ou ímpar. Uma função pode ser **nenhuma das duas** quando não satisfaz nenhuma das condições anteriores. Também existe um caso especial: a função identicamente nula f(x) = 0, que é simultaneamente par e ímpar.

4.1 Como identificar funções sem paridade

Para verificar que f é nem par nem ímpar, é suficiente encontrar um único valor de x para o qual $f(-x)$ seja diferente de $f(x)$ e diferente de $-f(x)$.

Exemplo: $f(x) = x^2 + x$

Calculamos $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$

Comparamos com $f(x) = x^2 + x$:

$f(-x) = x^2 - x \neq x^2 + x = f(x)$ → NÃO é par

Comparamos com $-f(x) = -(x^2 + x) = -x^2 - x$:

$f(-x) = x^2 - x \neq -x^2 - x = -f(x)$ → NÃO é ímpar

Conclusão: $f(x) = x^2 + x$ é uma função sem paridade.

5. Quadro Comparativo

O quadro a seguir resume as principais diferenças entre funções pares e ímpares:

Característica	Função Par	Função Ímpar
Definição	$f(-x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$
Simetria do gráfico	Em relação ao eixo y (eixo das ordenadas)	Em relação à origem (0, 0)
Domínio necessário	Simétrico em relação à origem	Simétrico em relação à origem
Condição em x = 0	f(0) pode ser qualquer valor	$f(0) = 0$, se $0 \in Domínio$.
Exemplos	$f(x) = x^2$, $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \|x\|$	$f(x) = x^3$, $f(x) = \text{sen}(x)$, $f(x) = x$
Contraexemplos	$f(x) = x^2 + x$ (nem par nem ímpar)	$f(x) = x + 1$ (nem par nem ímpar)

6. Método Prático: Passo a Passo

Para classificar qualquer função quanto à paridade, siga o roteiro abaixo:

Passo 1	Verifique o domínio: ele deve ser simétrico em relação à origem para que a função possa ser par ou ímpar. Caso contrário, a função não tem paridade.
Passo 2	Calcule $f(-x)$: substitua x por $-x$ na expressão da função e simplifique completamente.
Passo 3	Compare com $f(x)$: se $f(-x) = f(x)$, a função é PAR.
Passo 4	Compare com $-f(x)$: se $f(-x) = -f(x)$, a função é ÍMPAR.
Passo 5	Se nenhuma das condições anteriores for satisfeita, a função não é par nem ímpar.

7. Exemplo Resolvido Completo

Determine a paridade da função $\mathbf{f(x) = x^4 - 2x^2 + 1}$, com domínio nos reais.

Solução detalhada:

1) Domínio: $D = \mathbb{R}$, que é simétrico em relação à origem. ✓

2) Calculamos $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1$$
$$f(-x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

3) Comparamos com $f(x)$:

$$\mathbf{f(-x) = x^4 - 2x^2 + 1 = f(x)} \quad ✓$$

Conclusão: f é uma função PAR. Seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y.

8. Exercícios de Fixação

8.1 Classificar quanto à paridade

Classifique cada função abaixo como par, ímpar ou sem paridade, apresentando a justificativa:

1. $f(x) = x^6 - 4x^2$
2. $g(x) = x^3 + 2x$
3. $h(x) = x^2 + 3x + 1$
4. $p(x) = 2x^5 - x^3 + x$
5. $q(x) = x^4 - x^2 + \cos(x)$
6. $r(x) = \text{sen}(x) + \cos(x)$

8.2 Questões de Vestibular

(FUVEST) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = |x^3| - x^2$. Determine a paridade de f.

(UNICAMP) Se f é uma função ímpar tal que $f(2) = 5$, quanto vale $f(-2) + f(0)$?

(ENEM) Determine os valores reais de k para que a função $f(x) = kx^3 + (k-1)x^2 + x$ seja ímpar.

8.3 Desafio

Problema desafio

Seja f uma função par e g uma função ímpar, ambas com mesmo domínio simétrico.
Prove as seguintes afirmações:

a) $f + g$ é uma função sem paridade (em geral).
b) $f \cdot g$ é uma função ímpar.
c) f composta com g ($f \circ g$) é uma função par.
d) g composta com f ($g \circ f$) é uma função par.

9. Gabarito

9.1 Exercício 8.1

Função	Paridade	Justificativa
f(x)	PAR	$f(-x) = (-x)^6-4(-x)^2 = x^6-4x^2 = f(x)$
g(x)	ÍMPAR	$g(-x) = (-x)^3+2(-x) = -x^3-2x = -g(x)$
h(x)	SEM PAR.	$h(-x) = x^2-3x+1$, que não é $h(x)$ nem $-h(x)$
p(x)	ÍMPAR	$p(-x) = -2x^5+x^3-x = -(2x^5-x^3+x) = -p(x)$
q(x)	PAR	$q(-x) = x^4-x^2+\cos(x) = q(x)$ (cos é par)
r(x)	SEM PAR.	$r(-x) = -\text{sen}(x)+\cos(x)$, diferente de $r(x)$ e $-r(x)$

9.2 Gabarito das Questões de Vestibular

FUVEST: $f(-x) = |(-x)^3| - (-x)^2 = |-x^3| - x^2 = |x^3| - x^2 = f(x)$. Portanto, f é PAR.

UNICAMP: Como f é ímpar, $f(-2) = -f(2) = -5$, e $f(0) = 0$. Logo $f(-2) + f(0) = -5 + 0 = -5$.

ENEM: Para f ser ímpar, o termo par deve ser nulo: $(k-1)x^2 = 0$ para todo x, logo $k = 1$.

RESUMO DA AULA

Função PAR: $f(-x) = f(x)$ → simetria em relação ao eixo y

Função ÍMPAR: $f(-x) = -f(x)$ → simetria em relação à origem

O domínio deve ser simétrico em relação à origem nos dois casos.
Se f é ímpar e 0 pertence ao domínio, então f(0) = 0.
Uma função pode também não ter paridade (nem par, nem ímpar).