MATEMÁTICA SE APRENDE

FUNÇÕES INJETIVA, SOBREJETIVA E BIJETIVA

1. Introdução

Em Matemática, uma **função** $f: A \to B$ associa cada elemento do conjunto A (domínio) a exatamente um elemento do conjunto B (contradomínio). Dependendo de como essa associação ocorre, a função pode receber classificações especiais: injetiva, sobrejetiva ou bijetiva. Compreender essas propriedades é fundamental para o estudo de Álgebra, Cálculo, Análise e muitas áreas da Matemática Aplicada.

2. Função Injetiva (ou Injetora)

Definição Formal

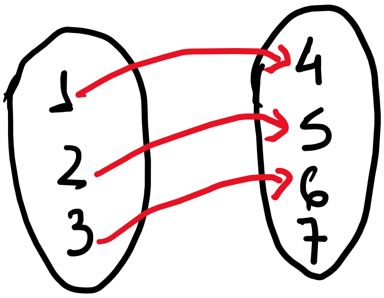
Uma função $f: A \to B$ é dita injetiva (ou injetora) se, e somente se, para quaisquer $x_1 \neq x_2$ pertencentes a A, temos: $f(x_1) \neq f(x_2)$. Equivalentemente por contrapositiva: $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$. Ou seja, elementos distintos do domínio têm imagens distintas no contradomínio.

Exemplo 1:

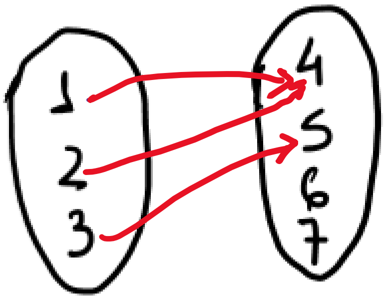
Três amigos criaram regras para ligar os números do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ ao conjunto $B = \{4, 5, 6, 7\}$.

- **Regra do Carlos:** O número 1 liga no 4, o 2 liga no 5 e o 3 liga no 6.
- **Regra da Ana:** O número 1 liga no 4, o 2 liga no 4 e o 3 liga no 5.
- **Regra da Julia:** O número 1 liga no 4, o 2 liga no 5, o 3 liga no 6 e o 3 também liga no 7.

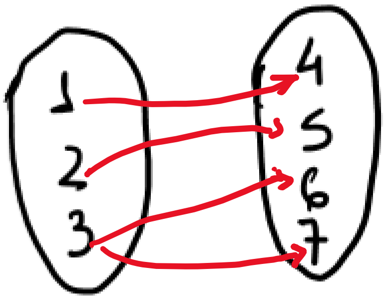
Qual regra representa uma **função injetiva**?



a regra de Carlos é injetiva.

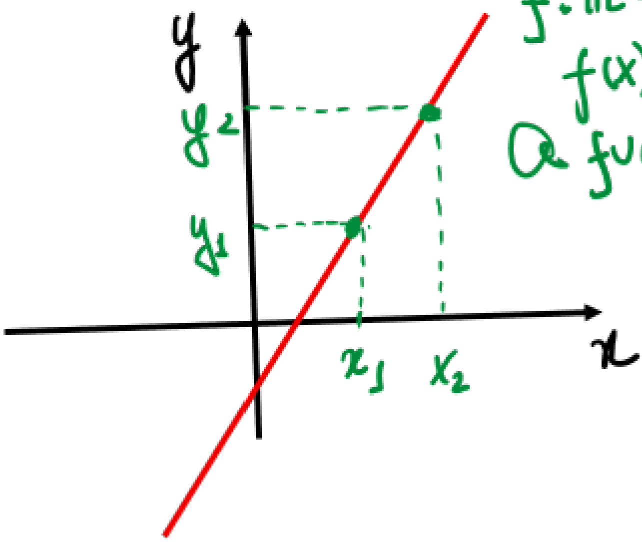


A regra de Ana não é injetiva.



A regra de Júlia não é função.

Exemplo 2:



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
$f(x) = x - 2$.
A função é injetiva.

2.1 Regra Prática — Como identificar

Uma função é injetiva quando nenhum valor do contradomínio é atingido por mais de um elemento do domínio. Graficamente: toda reta horizontal corta o gráfico em no máximo um ponto.

Outros exemplos:

Seja f: ℝ → ℝ definida por f(x) = 3x + 1.

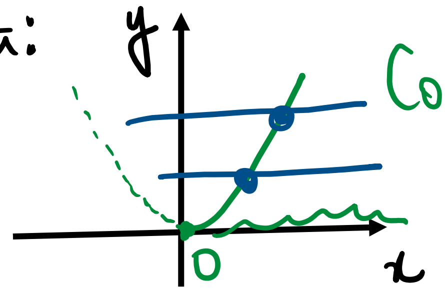
Considere $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\underset{-1}{3x_1 + 1} = \underset{-1}{3x_2 + 1} \Rightarrow \frac{3x_1}{3} = \frac{3x_2}{3} \Rightarrow \underline{x_1 = x_2}$$

Injetiva.

Seja g: [0, +∞) → ℝ definida por g(x) = x².

Veja:



Considerando o domínio [0, +∞) a função é injetiva.
É só usar a reta horizontal.

2.3 Contraexemplos — Funções NÃO injetivas

Função	Por que NÃO é injetiva
f(x) = x², com f: ℝ → ℝ	f(2) = f(-2) = 4; dois elementos têm a mesma imagem
f(x) = 5 (constante)	Todo x mapeia para 5; todos os elementos têm a mesma imagem

3. Função Sobrejetiva (ou Sobrejetora)

Definição Formal

Uma função f: A → B é dita sobrejetiva (ou sobrejetora) se, e somente se, para todo elemento y pertencente a B, existe pelo menos um elemento x pertencente a A tal que f(x) = y. Em notação: ∀ y ∈ B, ∃ x ∈ A tal que f(x) = y. Ou seja, a imagem da função coincide com todo o contradomínio: Im(f) = B.

3.1 Regra Prática — Como identificar

Uma função é sobrejetiva quando todo elemento do contradomínio é 'alcançado' por pelo menos um elemento do domínio. Não pode haver elementos 'sobrando' no contradomínio sem uma pré-imagem.

Exemplos:

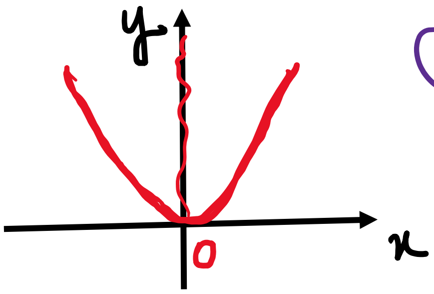
Seja f: ℝ → ℝ definida por f(x) = 2x – 5.

Observe o seguinte:

$$y = 2x - 5 \Rightarrow \frac{y+5}{2} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{y+5}{2}},$$

ou seja, para qualquer y real existe um x associado a ele.

Seja g: ℝ → [0, +∞) definida por g(x) = x².



Considerando o contradomínio $[0,+\infty)$, temos que para qualquer y temos sempre um x associado.

Seja: $y = x^2 \Rightarrow x = +\sqrt{y}$, pois $y \in [0,+\infty)$.

3.2 Contraexemplos — Funções NÃO sobrejetivas

Função	Por que NÃO é sobrejetiva
f: ℝ → ℝ, $f(x) = x^2$	Números negativos não têm pré-imagem; $Im(f) = [0,+\infty) \neq \mathbb{R}$
f: {1,2} → {a,b,c}, f(1)=a, f(2)=b	O elemento 'c' de B não tem pré-imagem em A

4. Função Bijetiva (ou Bijetora)

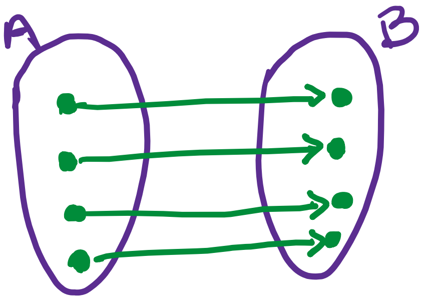
Definição Formal

Uma função f: A → B é dita bijetiva (ou bijetora, ou correspondência biunívoca) se, e somente se, ela for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

4.1 Regra Prática — Como identificar

Uma função é bijetiva quando há uma correspondência um-a-um perfeita entre domínio e contradomínio: cada elemento de A corresponde a exatamente um elemento de B, e vice-versa. É a 'função mais comportada' possível.

Veja:



Exemplo 1

Seja f: ℝ → ℝ definida por $f(x) = 5x - 3$. (bijetiva)

Injetiva: $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 5x_1-3 = 5x_2-3 \Rightarrow 5x_1=5x_2$ ($+3$ em ambos os lados)

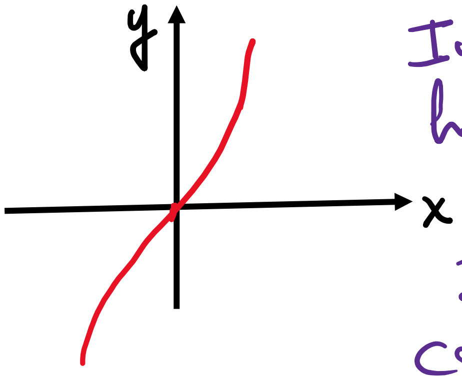
$\Rightarrow x_1=x_2$.

Sobrejetiva: $y=5x-3 \Rightarrow y+3 = 5x \Rightarrow x = \frac{y+3}{5}$.

Exemplo 2

Qualquer que seja o y, existe um x associado a ele.

Seja f: ℝ → ℝ definida por $f(x) = x^3$.



Injetiva: regra da horizontal.
sobrejetiva: Domínio real e contradomínio real.
A função é estritamente crescente.
Logo, bijetiva.

4.2 Contraexemplos — Funções NÃO bijetivas

Função	Injetiva?	Sobrejetiva?	Bijetiva?
f: ℝ → ℝ, $f(x) = x^2$	Não	Não	Não
f: $[0,+\infty)$ → ℝ, $f(x) = x^2$	Sim	Não	Não
f: ℝ → $[0,+\infty)$, $f(x) = x^2$	Não	Sim	Não
f: $[0,+\infty)$ → $[0,+\infty)$, $f(x) = x^2$	Sim	Sim	Sim

Julgue as frases abaixo com **V** para Verdadeiro ou **F** para Falso:

- (V) A função que liga cada pessoa viva ao seu CPF oficial é **injetiva**.
- (V) A função que liga cada carro emplacado no Brasil ao seu estado de registro é **sobrejetiva**.
- (V) A função que liga cada aluno de uma sala de aula à sua cadeira própria e numerada é **bijetiva** (considere que não sobram cadeiras nem alunos).