

A FUNÇÃO SENO

1. Introdução

A **função seno** é uma das funções mais fundamentais da Matemática. Surgindo naturalmente no estudo de triângulos retângulos e do círculo trigonométrico, ela descreve fenômenos periódicos do mundo real: ondas sonoras, corrente elétrica alternada, marés, movimentos oscilatórios e muito mais. Compreendê-la em profundidade — sua definição, gráfico, propriedades e transformações — é essencial para o estudo de Trigonometria, Cálculo e Física.

2. Definição da Função Seno

2.1 Definição via Triângulo Retângulo

Para um ângulo agudo θ em um triângulo retângulo:

$$\text{sen}(\theta) = \text{cateto oposto} / \text{hipotenusa}$$

Essa definição vale apenas para $0 < \theta < 90^\circ$ (ângulos agudos). Para ampliar o domínio a todos os reais, usamos o círculo trigonométrico.

2.2 Definição via Círculo Trigonométrico

Considere o círculo de raio 1 centrado na origem (círculo unitário). Para qualquer ângulo θ (em radianos ou graus), medido a partir do eixo positivo das abscissas no sentido anti-horário, o ponto $P = (\cos \theta, \text{sen } \theta)$ está sobre o círculo. Assim:

Definição Formal

sen: $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ é a função que associa a cada número real θ (representando um ângulo em graus ou radianos) a ordenada (coordenada y) do ponto P sobre o círculo unitário correspondente ao arco de comprimento $|\theta|$ a partir do ponto $(1, 0)$, percorrido no sentido anti-horário se $\theta > 0$ e no sentido horário se $\theta < 0$.

2.3 Radianos e Graus — Conversão

A função seno pode receber o argumento em graus ou em radianos. Em Matemática e Cálculo, o padrão é radianos.

$$\text{Conversão: } \theta(\text{rad}) = \theta(^{\circ}) \times \pi/180 \quad | \quad \theta(^{\circ}) = \theta(\text{rad}) \times 180/\pi$$

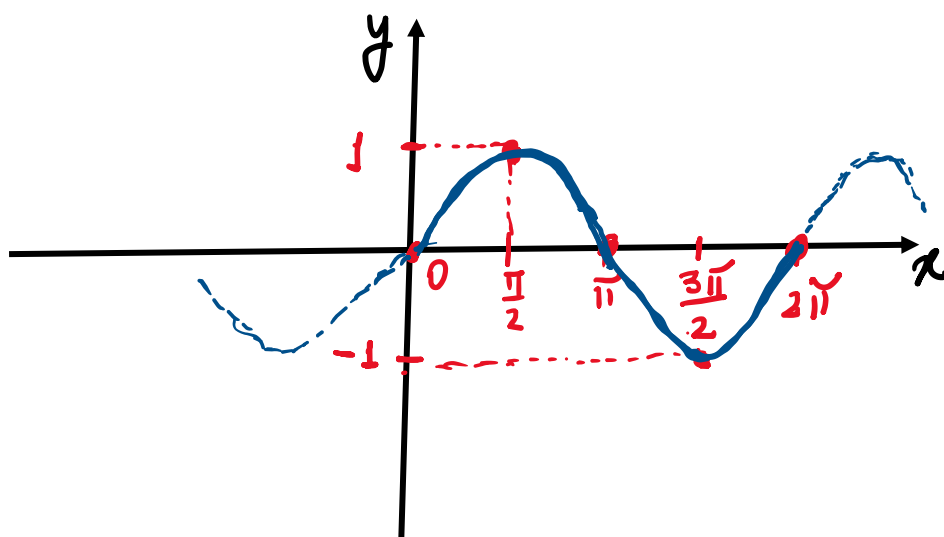
Graus	Radianos	sen(θ)
0°	0	0
30°	$\pi/6$	$1/2 = 0,5$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2 \approx 0,707$
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2 \approx 0,866$
90°	$\pi/2$	1
120°	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2 \approx 0,866$
135°	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2 \approx 0,707$
150°	$5\pi/6$	$1/2 = 0,5$
180°	π	0
210°	$7\pi/6$	$-1/2 = -0,5$
270°	$3\pi/2$	-1
360°	2π	0

3. Gráfico da Função Seno

O gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ é uma curva ondulatória contínua, chamada **senóide**. Suas características visuais fundamentais são:

Característica	Valor / Descrição
Domínio	\mathbb{R} (todos os números reais)
Imagem (contradomínio)	$[-1, 1]$
Período	$2\pi \approx 6,283\dots$ (a curva se repete a cada 2π)
Amplitude	1 (distância do eixo x ao pico ou vale)
Zeros (raízes)	$x = k\pi$, para todo inteiro k ($0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$)
Máximos	$x = \pi/2 + 2k\pi \rightarrow \text{sen}(x) = 1$
Mínimos	$x = -\pi/2 + 2k\pi \rightarrow \text{sen}(x) = -1$
Simetria	Função ímpar: $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$; simetria em relação à origem
Intercepta eixo y	$(0, 0)$

Como esboçar o gráfico manualmente: Marque os 5 pontos-chave em um período $[0, 2\pi]$: $(0, 0)$, $(\pi/2, 1)$, $(\pi, 0)$, $(3\pi/2, -1)$, $(2\pi, 0)$. Una com curva suave e repita o padrão para os demais períodos.



4. Propriedades da Função Seno

4.1 Periodicidade

A função seno é periódica com período fundamental $T = 2\pi$:

$$\text{sen}(x + 2k\pi) = \text{sen}(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \text{ e todo } k \in \mathbb{Z}$$

Isso significa que o comportamento da função se repete indefinidamente em intervalos de comprimento 2π .

4.2 Paridade — Função Ímpar

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Graficamente: o gráfico é simétrico em relação à origem $(0, 0)$. Girar 180° o gráfico ao redor da origem produz o mesmo gráfico.

4.3 Limitação

$$-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \text{ A função seno é limitada.}$$

5. Transformações da Função Seno

A forma geral da função seno transformada é:

$$f(x) = A \cdot \text{sen}(Bx + C) + D$$

Parâmetro	Nome	Efeito no Gráfico
A	Amplitude	$ A $ é a amplitude (altura do pico). Se $ A > 1$, estica verticalmente; se $ A < 1$, comprime. Se $A < 0$, reflete em relação ao eixo x.
B	Frequência angular	Altera o período: $T = 2\pi / B $. Se $ B > 1$, comprime horizontalmente (período menor). Se $ B < 1$, estica.
C	Fase (deslocamento horizontal)	Desloca o gráfico horizontalmente. Deslocamento = $-C/B$. Se $C > 0$, desloca para a esquerda; se $C < 0$, para a direita.
D	Deslocamento vertical	Desloca o gráfico verticalmente. $D > 0$ sobe; $D < 0$ desce. A imagem passa a ser $[D - A , D + A]$.

5.1 Exemplos de Transformações

Exemplo 1 — Amplitude

$f(x) = 3 \operatorname{sen}(x)$: amplitude 3. O gráfico oscila entre -3 e 3 , período 2π inalterado.

$g(x) = 0,5 \operatorname{sen}(x)$: amplitude 0,5. Oscila entre $-0,5$ e $0,5$.

Exemplo 2 — Período

$f(x) = \operatorname{sen}(2x)$: período $T = 2\pi/2 = \pi$. A curva completa um ciclo em π radianos — 'dobra de velocidade'.

$g(x) = \operatorname{sen}(x/2)$: período $T = 2\pi/(1/2) = 4\pi$. A curva 'anda mais devagar'.

Exemplo 3 — Fase

$f(x) = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$: deslocamento de $\pi/2$ para a esquerda. Coincide com $\cos(x)$!

$g(x) = \operatorname{sen}(x + \pi/4)$: deslocamento de $\pi/4$ para a esquerda.

Exemplo 4 — Deslocamento Vertical

$f(x) = \operatorname{sen}(x) + 2$: gráfico sobe 2 unidades. Imagem: $[1, 3]$.

$g(x) = \operatorname{sen}(x) - 1$: gráfico desce 1 unidade. Imagem: $[-2, 0]$.

Exemplo 5 — Combinação Completa

$f(x) = 2 \operatorname{sen}(3x - \pi) + 1$:

- Amplitude: 2 (oscila ± 2 em torno do eixo)
- Período: $T = 2\pi/3$
- Fase: deslocamento = $\pi/3$ para a direita
- Deslocamento vertical: $+1 \rightarrow$ Imagem: $[-1, 3]$

5.2 Fórmulas Rápidas

Grandeza	Fórmula
Amplitude	$ A $
Período	$T = 2\pi / B $
Frequência	$f = 1/T = B / 2\pi$
Deslocamento horizontal	$\varphi = -C / B$
Imagem	$[D - A , D + A]$
Zeros (1 período)	$Bx + C = k\pi \rightarrow x = (k\pi - C)/B$
Máximo	$D + A $, em $Bx + C = \pi/2 + 2k\pi$
Mínimo	$D - A $, em $Bx + C = -\pi/2 + 2k\pi$

6. Exemplos Detalhados de Aplicação

6.1 Encontrar zeros (raízes)

Resolver $\text{sen}(x) = 0$:

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \rightarrow x \in \{\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots\}$$

6.2 Resolver $\text{sen}(x) = 1/2$

No círculo unitário, $\text{sen}(x) = 1/2$ ocorre em dois arcos por período:

$$x = \pi/6 + 2k\pi \text{ ou } x = 5\pi/6 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

6.3 Resolver $\text{sen}(x) = -\sqrt{3}/2$

$\text{sen}(x) < 0$ no 3º e 4º quadrantes:

$$x = \pi + \pi/3 + 2k\pi = 4\pi/3 + 2k\pi \text{ ou } x = 2\pi - \pi/3 + 2k\pi = 5\pi/3 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

6.4 Modelagem — Temperatura ao Longo do Dia

A temperatura $T(h)$ ao longo de um dia (em horas) pode ser modelada por:

$$T(h) = 10 \operatorname{sen}(\pi h/12 - \pi/2) + 25$$

- Amplitude: 10°C — a temperatura varia 10°C acima e abaixo da média.
- Período: $T = 2\pi / (\pi/12) = 24$ horas — ciclo diário completo.
- Deslocamento: $+25^\circ\text{C}$ — temperatura média de 25°C .
- Mínimo ($h = 0$ ou $h = 24$): $T = 15^\circ\text{C}$.
- Máximo ($h = 12$): $T = 35^\circ\text{C}$.
- Momentos de Média ($h = 6$ e $h = 18$): $T = 25^\circ\text{C}$.

6.5 Modelagem — Onda Sonora

Um som puro de frequência f Hz pode ser descrito por:

$$y(t) = A \operatorname{sen}(2\pi ft)$$

Para o Lá central (440 Hz) com amplitude 1: $y(t) = \operatorname{sen}(880\pi t)$. Período $T = 1/440 \text{ s} \approx 2,27$ ms.

7. Bijetividade, Restrição de Domínio e Arcoseno

A função seno definida em \mathbb{R} não é bijetiva: é periódica (portanto não injetiva) e sua imagem é apenas $[-1, 1]$ (não cobre \mathbb{R} inteiro). Para que possua inversa, é necessário restringir o domínio.

Restrição canônica

Restringindo o domínio ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, a função seno torna-se estritamente crescente e bijetiva: $\operatorname{sen}: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$. Sua inversa é a função arcoseno (ou seno inverso): $\operatorname{arcsen}: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$, com $\operatorname{arcsen}(y) = x \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) = y$ e $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

x (entrada)	arcsen(x) (saída em rad)	arcsen(x) (saída em graus)
-1	$-\pi/2$	-90°
$-\sqrt{3}/2$	$-\pi/3$	-60°
$-\sqrt{2}/2$	$-\pi/4$	-45°
$-1/2$	$-\pi/6$	-30°
0	0	0°
$1/2$	$\pi/6$	30°
$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$	45°
$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$	60°
1	$\pi/2$	90°

Propriedades do arco-seno: $\text{arcsen}(\text{sen}(x)) = x$ para $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ | $\text{sen}(\text{arcsen}(x)) = x$ para $x \in [-1, 1]$ | $\text{arcsen}(-x) = -\text{arcsen}(x)$ (função ímpar).