

FUNÇÃO INVERSA

Uma máquina matemática transforma um número de entrada multiplicando-o por 3 e somando 5. O painel da máquina mostra apenas a saída. Se a saída foi 56, qual foi o número de entrada?

Em vez de pedir imediatamente uma fórmula, proponha uma discussão. O que a máquina fez primeiro? O que deve ser desfeito primeiro? A resposta é única? Toda máquina matemática pode ser desfeita?

SITUAÇÃO-PROBLEMA

Uma função é dada por $f(x) = 3x + 5$. Sabendo que $f(x) = 56$, descubra o valor de x . Em seguida, escreva uma regra que receba a saída e devolva a entrada.

A transformação original foi multiplicar por 3 e somar 5. Para desfazer, é necessário subtrair 5 e depois dividir por 3.

$$56 - 5 = 51$$

$$51 \div 3 = 17$$

Portanto, a entrada foi 17. A regra que desfaz a transformação é:

$$f^{-1}(x) = (x - 5)/3$$

1. CONSTRUINDO A IDEIA DE FUNÇÃO INVERSA

Observe a tabela a seguir para a função $f(x) = 3x + 5$.

Entrada x	Saída $f(x)$
0	5
1	8
2	11
3	14
4	17
17	56

A função f leva 17 até 56. A função inversa deve levar 56 de volta até 17.

Assim, enquanto f transforma entrada em saída, f^{-1} transforma saída em entrada.

DEFINIÇÃO INTUITIVA

A função inversa de uma função f é a função que desfaz exatamente a transformação realizada por f , recuperando o valor inicial.

2. DEFINIÇÃO FORMAL DE FUNÇÃO INVERSA

DEFINIÇÃO

Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. Dizemos que f possui função inversa quando existe uma função $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \text{ para todo } x \in A$$

e

$$f(f^{-1}(y)) = y, \text{ para todo } y \in B.$$

Nesse caso, f^{-1} é chamada função inversa de f .

ATENÇÃO

A notação $f^{-1}(x)$ não significa $1/f(x)$. Ela representa a função inversa de f . Portanto, $f^{-1}(x)$ e $1/f(x)$ são conceitos diferentes.

3. CONDIÇÃO PARA A EXISTÊNCIA DA FUNÇÃO INVERSA

Nem toda função possui inversa. Para que a inversa exista como função, cada saída deve ter uma única entrada correspondente, e todos os elementos do contradomínio devem ser alcançados pela função.

DEFINIÇÃO: FUNÇÃO INJETORA

Uma função $f : A \rightarrow B$ é injetora quando elementos diferentes do domínio possuem imagens diferentes.

Formalmente:

$$\text{se } f(x_1) = f(x_2), \text{ então } x_1 = x_2.$$

DEFINIÇÃO: FUNÇÃO SOBREJETORA

Uma função $f : A \rightarrow B$ é sobrejetora quando todo elemento do contradomínio B é imagem de pelo menos um elemento do domínio A .

DEFINIÇÃO: FUNÇÃO BIJETORA

Uma função é bijetora quando é simultaneamente injetora e sobrejetora.

TEOREMA FUNDAMENTAL

Uma função admite função inversa se, e somente se, é bijetora.

A injetividade garante que não haverá dúvida ao voltar da saída para a entrada. A sobrejetividade garante que todo elemento do contradomínio poderá ser usado como entrada da função inversa.

4. POR QUE $f(x)=x^2$ NÃO TEM INVERSA EM \mathbb{R} ?

Considere $f(x) = x^2$, com domínio real. Temos:

$$f(2) = 4$$

$$f(-2) = 4$$

Dois valores diferentes produziram a mesma imagem. Se tentarmos inverter a função, a saída 4 teria duas possíveis entradas: 2 e -2. Isso violaria a definição de função, pois uma mesma entrada da inversa teria duas saídas.

ATENÇÃO

A função $f(x) = x^2$ não possui inversa em \mathbb{R} porque não é injetora. Porém, se restringirmos o domínio a $x \geq 0$, ela passa a admitir inversa: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

5. COMO ENCONTRAR A FUNÇÃO INVERSA

Para determinar a função inversa de uma função dada por fórmula, utilizamos um procedimento algébrico simples.

MÉTODO GERAL

1. Escreva $y = f(x)$.
2. Troque x por y e y por x .
3. Isole y .
4. Escreva y como $f^{-1}(x)$.
5. Verifique a resposta por composição, quando necessário.

6. EXEMPLO RESOLVIDO 1: FUNÇÃO AFIM

Determine a inversa da função $f(x) = 2x + 3$.

$$y = 2x + 3$$

Trocando x por y e y por x :

$$x = 2y + 3$$

Isolando y :

$$x - 3 = 2y$$

$$y = (x - 3)/2$$

Logo,

$$f^{-1}(x) = (x - 3)/2$$

VERIFICAÇÃO

$$f(f^{-1}(x)) = 2 \cdot ((x - 3)/2) + 3 = x - 3 + 3 = x.$$

Logo, a inversa está correta.

7. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO INVERSA

O gráfico de uma função e o gráfico de sua inversa possuem uma relação geométrica muito importante: eles são simétricos em relação à reta $y = x$.

Isso significa que, se o ponto (a, b) pertence ao gráfico de f , então o ponto (b, a) pertence ao gráfico de f^{-1} .

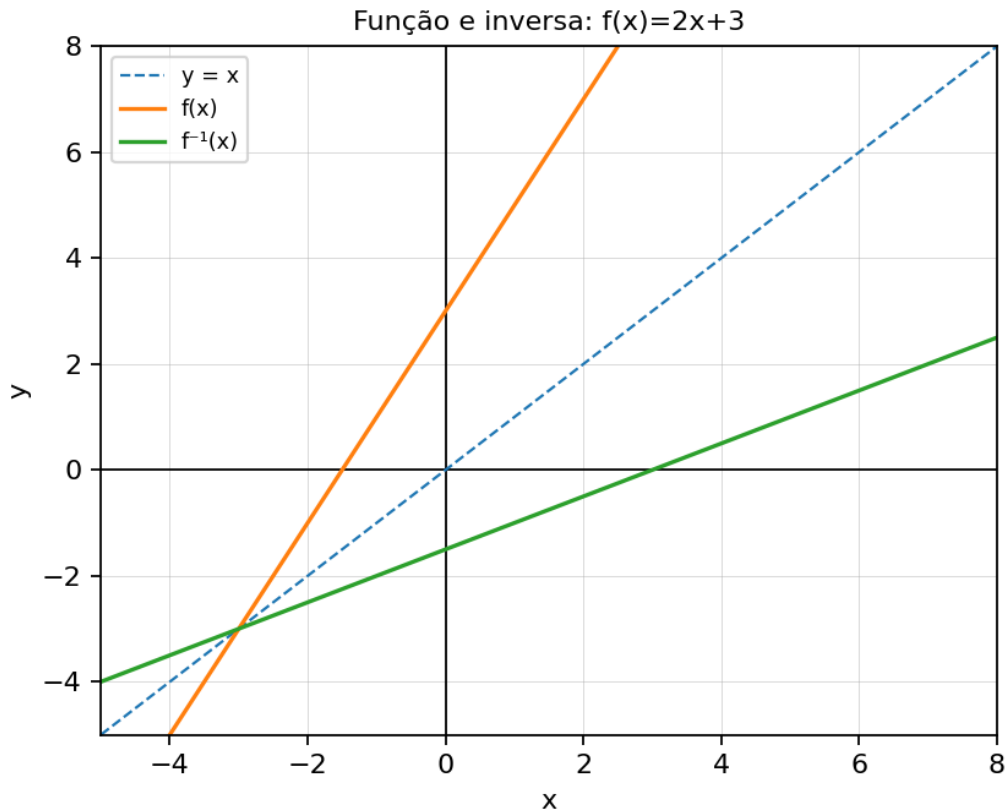


Gráfico da função $f(x) = 2x + 3$, de sua inversa $f^{-1}(x) = (x - 3)/2$ e da reta $y = x$.

ATENÇÃO GRÁFICA

Para construir o gráfico da inversa, podemos refletir o gráfico da função em relação à reta $y = x$. Na prática, cada ponto (x, y) transforma-se em (y, x) .

8. EXEMPLO RESOLVIDO 2: FUNÇÃO QUADRÁTICA COM DOMÍNIO RESTRITO

Considere $f(x) = x^2$ com domínio $x \geq 0$.

Como o domínio foi restringido aos números não negativos, a função se torna injetora. Assim, admite inversa.

$$y = x^2$$

Trocando as variáveis:

$$x = y^2$$

Como $y \geq 0$, temos:

$$y = \sqrt{x}$$

Logo,

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

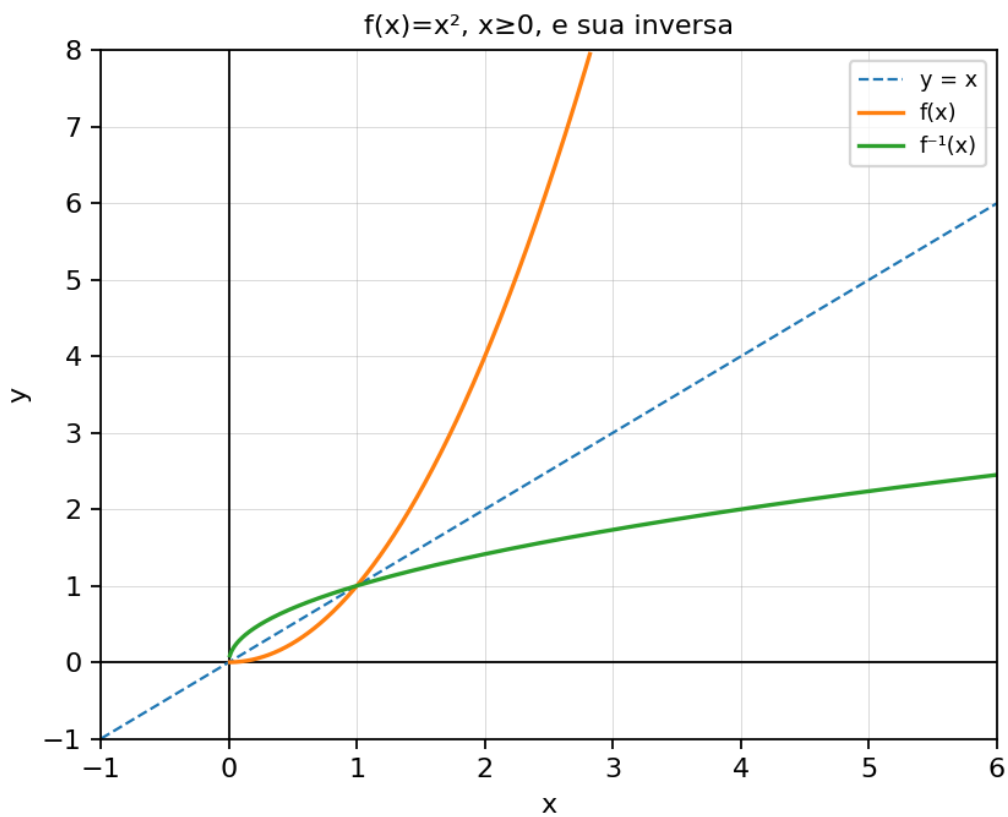


Gráfico de $f(x) = x^2$, com $x \geq 0$, e de sua inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

9. EXEMPLO RESOLVIDO 3: FUNÇÃO RACIONAL

Determine a inversa de $f(x) = (x - 1)/(x + 2)$.

$$y = (x - 1)/(x + 2)$$

Multiplicando:

$$y(x + 2) = x - 1$$

$$yx + 2y = x - 1$$

$$yx - x = -1 - 2y$$

$$x(y - 1) = -(1 + 2y)$$

$$x = (1 + 2y)/(1 - y)$$

Logo,

$$f^{-1}(x) = (2x + 1)/(1 - x)$$

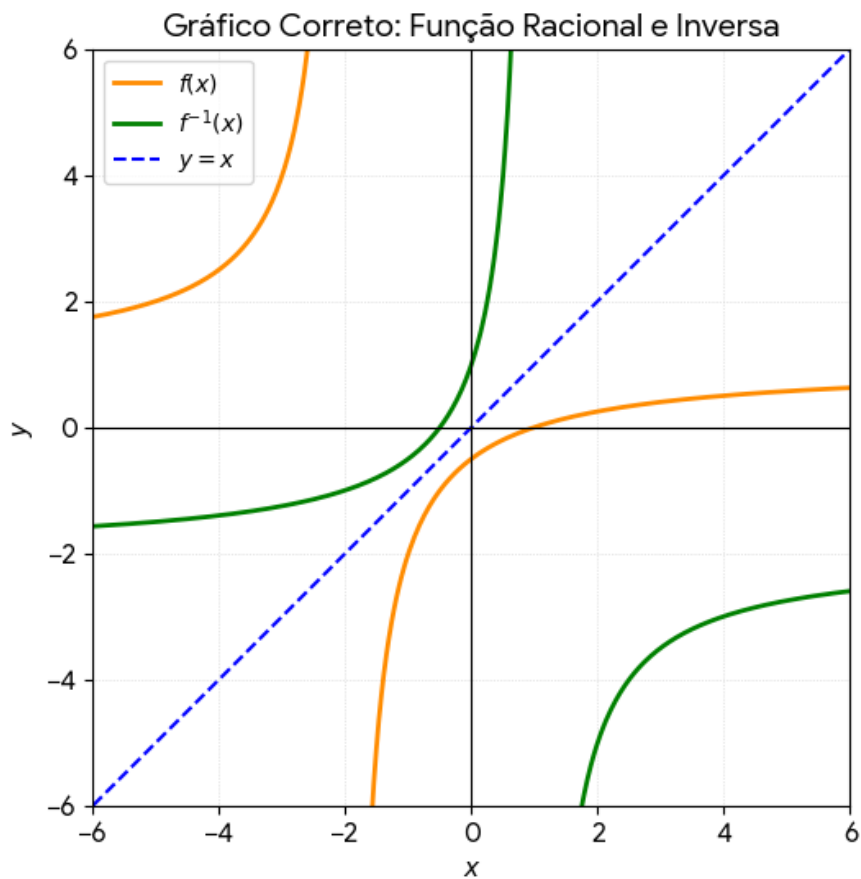


Gráfico de uma função racional e de sua inversa. Observe a simetria em relação à reta $y = x$.

10. APLICAÇÕES DA FUNÇÃO INVERSA

APLICAÇÃO 1: CONVERSÃO DE TEMPERATURAS

A relação entre Celsius e Fahrenheit é dada por:

$$F(C) = (9/5)C + 32$$

Para descobrir a temperatura em Celsius a partir de Fahrenheit, usamos a função inversa.

$$y = (9/5)x + 32$$

$$x = (9/5)y + 32$$

$$x - 32 = (9/5)y$$

$$y = (5/9)(x - 32)$$

Logo,

$$F^{-1}(x) = (5/9)(x - 32)$$

Se a temperatura é 86 °F, então:

$$F^{-1}(86) = (5/9)(86 - 32) = (5/9) \cdot 54 = 30$$

Portanto, 86 °F correspondem a 30 °C.

APLICAÇÃO 2: PREÇO ORIGINAL

Uma loja calcula o preço final de um produto pela função:

$$f(x) = 0,8x$$

Nesse caso, x é o preço original e $f(x)$ é o preço após desconto de 20%.

Se o preço final foi R\$ 160,00, o preço original é dado pela inversa:

$$y = 0,8x$$

$$x = 0,8y$$

$$y = x/0,8$$

Logo,

$$f^{-1}(x) = x/0,8$$

$$f^{-1}(160) = 160/0,8 = 200$$

O preço original era R\$ 200,00.

CONEXÃO COM A CIDADANIA

Funções inversas ajudam a compreender tarifas, descontos, juros, conversões e reajustes. Elas permitem recuperar valores originais e avaliar informações financeiras com maior autonomia.

11. ERROS MAIS COMUNS

- Confundir $f^{-1}(x)$ com $1/f(x)$.
- Trocar as variáveis, mas esquecer de isolar y .
- Determinar a expressão algébrica sem verificar se a função é bijetora.
- Esquecer que domínio e imagem trocam de papel na função inversa.
- Afirmar que $f(x)=x^2$ possui inversa em \mathbb{R} .
- Desconsiderar restrições em funções racionais.

12. SÍNTESE DA AULA

A função inversa desfaz uma transformação matemática. Para que uma função possua inversa, ela precisa ser bijetora, isto é, injetora e sobrejetora. O método algébrico para encontrar a inversa consiste em escrever $y = f(x)$, trocar x por y , isolar y e escrever $f^{-1}(x)$.

Graficamente, a função e sua inversa são simétricas em relação à reta $y = x$. Essa interpretação ajuda a compreender por que domínio e imagem trocam de papel.