1. Introdução contextualizada: por que estudar cosseno?

O cosseno aparece sempre que há repetição regular, oscilação, rotação ou movimento circular. Ele ajuda a descrever fenômenos como marés, ciclos de iluminação solar, corrente alternada, altura de uma roda-gigante, vibração de uma mola, som, temperatura ao longo do ano e movimento de pistões em motores.

Na vida real, muitas grandezas não crescem para sempre nem diminuem para sempre. Elas sobem e descem em ciclos. A função cosseno é uma das ferramentas matemáticas mais importantes para representar esse comportamento.

Esta aula começa pela ideia geométrica no ciclo trigonométrico, avança para a definição de função e chega às transformações que permitem adaptar o gráfico a situações concretas.

Ideia central

A função cosseno associa um ângulo ou número real x a um valor entre -1 e 1. Seu gráfico é uma onda periódica que se repete a cada 2π unidades.

2. Conceitos prévios indispensáveis

2.1 Ângulos, graus e radianos

Em trigonometria de funções, a unidade mais natural é o radiano. Uma volta completa mede 360° ou 2π radianos. Meia volta mede 180° ou π radianos. Um quarto de volta mede 90° ou π/2 radianos.

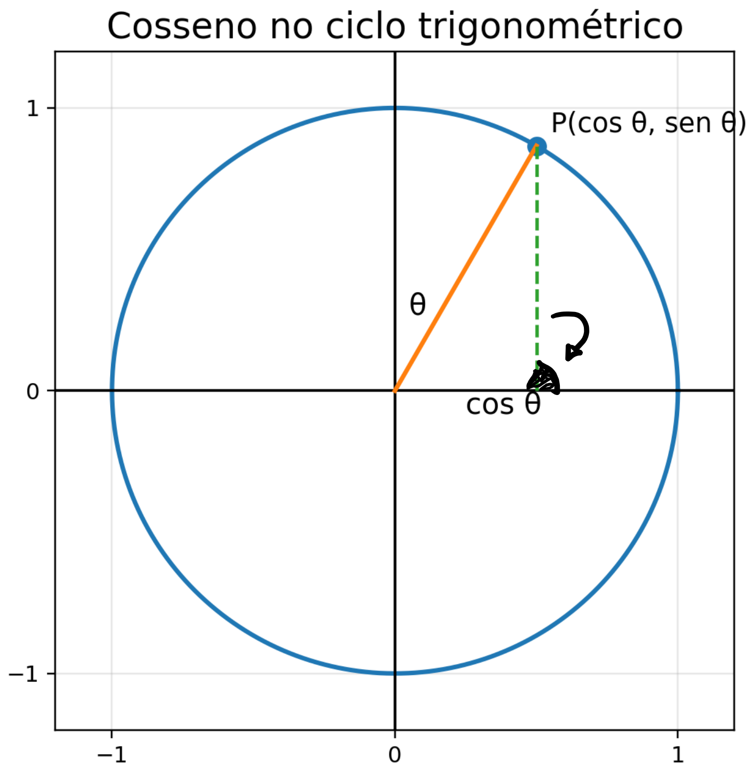
Ângulo em graus	Ângulo em radianos	Posição no ciclo
0°	0	ponto inicial à direita
90°	π/2	ponto superior
180°	π	ponto à esquerda
270°	3π/2	ponto inferior
360°	2π	volta completa

2.2 Ciclo trigonométrico

O ciclo trigonométrico é a circunferência de raio 1 centrada na origem do plano cartesiano. Cada ângulo determina um ponto P sobre a circunferência. Esse ponto possui coordenadas:

$$P = (\cos x, \text{sen } x)$$

Assim, o cosseno de x é a abscissa, isto é, a coordenada horizontal do ponto associado ao ângulo x.



> **Atenção**
> No ciclo trigonométrico, o cosseno não é uma medida de comprimento qualquer: ele é uma coordenada horizontal. Por isso pode ser positivo, nulo ou negativo.

3. Definição da função cosseno

A função cosseno é a função f: R -> R definida por:

$$f(x) = \cos x$$

Para cada número real x, interpretado como medida de arco em radianos, a função associa o valor cos x. Como qualquer número real pode ser usado como entrada, o domínio é todo o conjunto dos números reais.

3.1 Domínio

$$D(f) = R$$

O domínio é R porque é possível calcular cos x para qualquer número real x: positivo, negativo, inteiro, decimal, racional ou irracional.

3.2 Imagem

Im(f) = [-1, 1]

A imagem é o intervalo de -1 a 1 porque, no ciclo trigonométrico de raio 1, a coordenada horizontal nunca fica menor que -1 nem maior que 1.

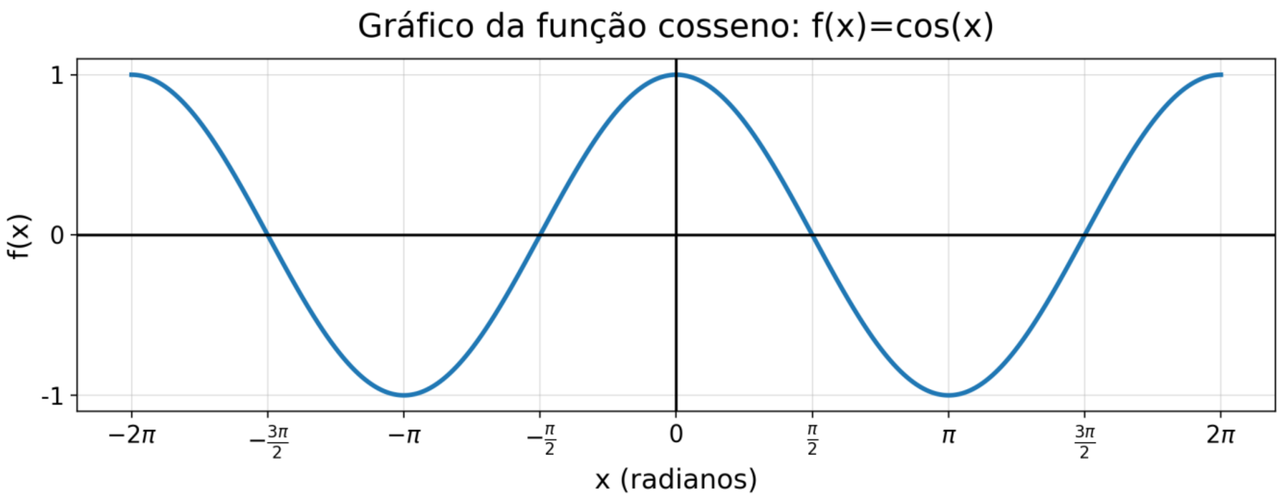
Leitura importante
A função cosseno nunca assume valores como 2, 5 ou -3, no campo dos reais. Equações como cos x = 2 não possuem solução real.

4. Valores notáveis do cosseno

x	0	π/2	π	3π/2	2π
cos x	1	0	-1	0	1

Esses valores são a base para construir o gráfico da função cosseno. Observe que a função começa em 1 quando x = 0, desce até 0 em π/2, chega ao mínimo -1 em π, volta a 0 em 3π/2 e retorna a 1 em 2π.

5. Gráfico da função f(x)=cos x



O gráfico tem formato ondulatório. Ele é chamado de cossenoide. Suas principais características são:

- Começa no ponto (0, 1).
- Possui máximo igual a 1 e mínimo igual a -1.
- Corta o eixo x nos pontos x = π/2 + kπ, com k inteiro.
- Repete exatamente o mesmo comportamento a cada 2π unidades.
- É simétrico em relação ao eixo y, pois cos(-x) = cos x (logo, a função cosseno é uma **função par**).

6. Período da função cosseno

Uma função é periódica quando seus valores se repetem em intervalos regulares. A função cosseno satisfaz:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Portanto, seu período fundamental é:

$$T = 2\pi$$

Isso significa que basta conhecer o gráfico em um intervalo de comprimento 2π para conhecer o gráfico inteiro.

> **Erro comum**
> Não confunda período com amplitude vertical. O período indica repetição horizontal. A amplitude indica afastamento vertical em relação à linha média.

7. Zeros, máximos, mínimos e sinal

7.1 Zeros

Os zeros da função são os valores de x para os quais $\cos x = 0$:

$$x = \pi/2 + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

7.2 Máximos

Os máximos ocorrem quando $\cos x = 1$:

$$x = 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

7.3 Mínimos

Os mínimos ocorrem quando $\cos x = -1$:

$$x = \pi + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

7.4 Sinal

No intervalo $[0, 2\pi]$, o cosseno é positivo no 1º e no 4º quadrantes, negativo no 2º e no 3º quadrantes, e nulo em $\pi/2$ e $3\pi/2$.

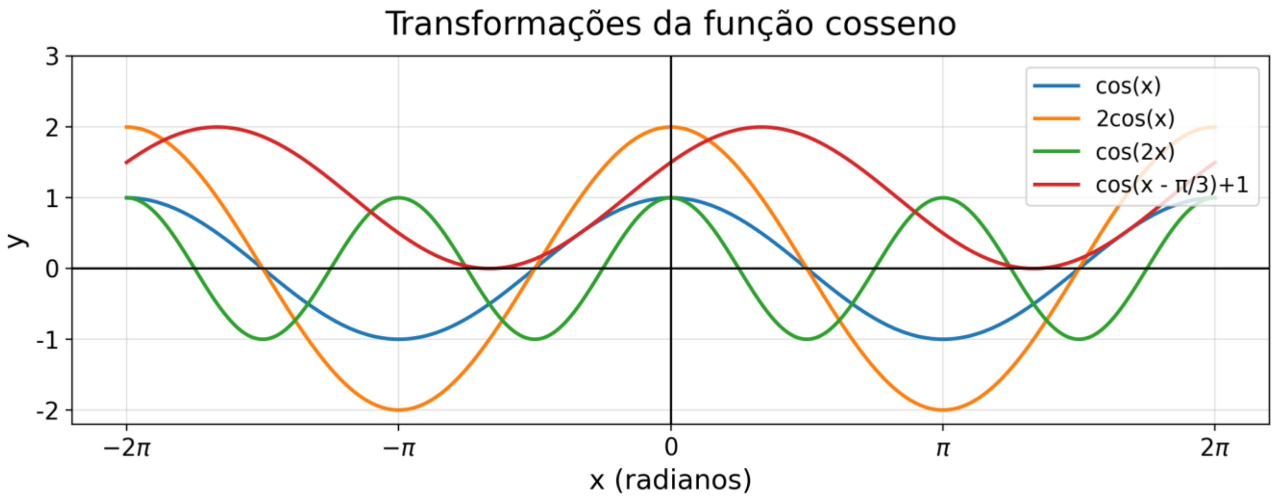
8. Transformações da função cosseno

A forma geral mais usada para estudar transformações é:

$$f(x) = a \cos(bx + c) + d$$

Cada parâmetro altera o gráfico de uma maneira específica.

Parâmetro	Efeito no gráfico	Interpretação
a	Altera a amplitude e pode refletir o gráfico.	Amplitude = $\|a\|$. Se $a < 0$, há reflexão em relação à linha média.
b	Altera o período.	Período = $2\pi/\|b\|$.
c	Desloca horizontalmente o gráfico.	Também chamado de fase. Escrever $bx+c = b(x + c/b)$.
d	Desloca verticalmente o gráfico.	Linha média: $y = d$. Imagem: $[d-\|a\|, d+\|a\|]$.



8.1 Amplitude

Na função $f(x)=a \cos x$, a amplitude é $|a|$. Ela indica a distância vertical entre a linha média e o máximo ou mínimo.

Exemplo: $f(x)=3\cos x$ tem amplitude 3, imagem $[-3,3]$ e período 2π.

8.2 Período em f(x)=cos(bx)

Quando x é multiplicado por b, o gráfico comprime ou dilata horizontalmente:

$$T = 2\pi / |b|$$

Exemplo: $f(x)=\cos(2x)$ tem período π, pois $T=2\pi/2=\pi$.

8.3 Deslocamento vertical

Na função $f(x)=\cos x + d$, todo o gráfico sobe ou desce. A linha média passa a ser $y=d$.

Exemplo: $f(x)=\cos x + 2$ tem imagem $[1,3]$.

8.4 Deslocamento horizontal

Na função $f(x)=\cos(x - \alpha)$, o gráfico de cos x é deslocado α unidades para a direita. Na função $f(x)=\cos(x + \alpha)$, é deslocado α unidades para a esquerda.

> **Dica de leitura**
> Para identificar o deslocamento horizontal, procure escrever a expressão no formato $\cos[b(x-h)]$. O número h indica o deslocamento para a direita quando é positivo.

9. Modelagem com função cosseno

Muitos problemas usam a forma:

$$f(t) = A \cos(Bt-C) + D$$

Nessa expressão: A é a amplitude, B determina o período, C desloca o ciclo no tempo e D é a linha média. Em problemas de mundo real, a imagem costuma representar limites físicos, como altura mínima e máxima ou temperatura mínima e máxima.

Exemplo resolvido 1: altura em uma roda-gigante

Uma cabine de roda-gigante tem altura, em metros, dada por $h(t)=12\cos(\pi t/10) + 15$, em que t é medido em segundos. Determine a altura máxima, a mínima e o período.

Solução: a amplitude é 12 e a linha média é 15. Logo, a altura máxima é 15+12=27 m e a mínima é 15-12=3 m. Como $B=\pi/10$, o período é $T=2\pi/(\pi/10) = 20$ segundos.

Exemplo resolvido 2: temperatura anual

Considere $T(m)=5\cos(\pi m/6) + 22$, em que m é o mês medido a partir de janeiro. A temperatura média oscila entre 17°C e 27°C, pois a linha média é 22 e a amplitude é 5. O período é $T=2\pi/(\pi/6) = 12$ meses.

10. Estratégia para resolver problemas

- Identifique se a situação se repete. Se houver ciclo, procure o período.
- Determine o valor máximo e o valor mínimo. A linha média é a média aritmética entre eles.
- Calcule a amplitude como metade da diferença entre máximo e mínimo.
- Escolha seno ou cosseno conforme o valor inicial. Se o fenômeno começa no máximo, o cosseno costuma ser mais natural.
- Monte a função e confira se domínio, imagem e período fazem sentido no contexto.

> **Síntese essencial**
> Para $f(x)=a\cos(bx+c) + d$: domínio R; imagem $[d-|a|, d+|a|]$; amplitude $|a|$; período $2\pi/|b|$; linha média $y=d$.