Atividades propostas

Problema 1: Sejam as funções reais $f(x) = 4x - 5$ e $g(x) = 2x + 3$. Determine a expressão algébrica para a função composta $h(x) = f(g(x))$.
Problema 2: Considere as funções $f(x) = x^2 - 3x + 2$ e $g(x) = x - 4$. Encontre a lei da função composta $g(f(x))$.
Problema 3: Se $f(g(x)) = 6x + 11$ e $g(x) = 3x + 2$, determine a expressão da função externa $f(x)$.
Problema 4: Sabendo que $f(x) = 2x - 7$ e $f(g(x)) = 2x^2 - 4x + 5$, determine a lei da função interna $g(x)$.
Problema 5: Dadas as funções $f(x) = 3x + a$ e $g(x) = 2x - 1$, determine o valor da constante real a para que as funções sejam comutativas, ou seja, para que $f(g(x)) = g(f(x))$ para todo x real.
Problema 6: Determine o domínio de validade da função composta $h(x) = f(g(x))$, sabendo que $f(x) = \sqrt{(x - 4)}$ e $g(x) = x^2 - 5$. Considere apenas o conjunto dos números reais.
Problema 7: Uma função real f possui a propriedade de que $f(f(x)) = x$ para todo x pertencente ao seu domínio. Sabendo que $f(x) = (2x + 1) / (3x - a)$ para $x \neq a/3$, calcule o valor numérico da constante a.
Problema 8: Seja a função $f(x) = x / (x + 1)$, definida para todos os reais exceto $x = -1$. Encontre a lei geral para a sua décima iteração funcional, ou seja, determine a expressão simplificada de $f^{10}(x)$.
Problema 9: Seja $f(x) = 1 / (1 - x)$ uma função real definida para $x \neq 1$. Determine a expressão resultante da tripla composição $f(f(f(x)))$ e indique o seu valor para $x = 5$.
Problema 10: Sejam f, g e h funções reais tais que $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x - 5$ e $f(g(h(x))) = 4x^2 - 8x + 1$. Determine a expressão algébrica da função $h(x)$.

Gabarito

Resolução do Problema 1:

Queremos encontrar $f(g(x))$. Substituímos a lei de $g(x)$ no lugar de x na lei de $f(x)$:

$f(g(x)) = 4(g(x)) - 5$

$f(g(x)) = 4(2x + 3) - 5$

$f(g(x)) = 8x + 12 - 5$

$f(g(x)) = 8x + 7$.

Gabarito: $f(g(x)) = 8x + 7$

Resolução do Problema 2:

Queremos encontrar $g(f(x))$. Substituímos a lei de $f(x)$ no argumento de $g(x)$:

$g(f(x)) = (f(x)) - 4$

$g(f(x)) = (x^2 - 3x + 2) - 4$

$g(f(x)) = x^2 - 3x - 2$.

Gabarito: $g(f(x)) = x^2 - 3x - 2$

Resolução do Problema 3:

Temos $f(g(x)) = 6x + 11$ e $g(x) = 3x + 2$. Fazemos uma mudança de variável, definindo $t = 3x + 2$. Isolando x nesta equação, obtemos:

$t - 2 = 3x \rightarrow x = (t - 2) / 3$.

Agora, substituímos x na lei da composta:

$f(t) = 6((t - 2) / 3) + 11$

$f(t) = 2(t - 2) + 11$

$f(t) = 2t - 4 + 11$

$f(t) = 2t + 7$.

Substituindo t de volta por x, temos $f(x) = 2x + 7$.

Gabarito: $f(x) = 2x + 7$

Resolução do Problema 4:

Como $f(x) = 2x - 7$, sabemos que $f(g(x)) = 2(g(x)) - 7$. O enunciado nos dá que $f(g(x)) = 2x^2 - 4x + 5$. Igualando as duas expressões:

$2(g(x)) - 7 = 2x^2 - 4x + 5$

Isolando $g(x)$:

$2(g(x)) = 2x^2 - 4x + 5 + 7$

$2(g(x)) = 2x^2 - 4x + 12$

Dividindo todos os termos por 2:

$g(x) = x^2 - 2x + 6$.

Gabarito: $g(x) = x^2 - 2x + 6$

Resolução do Problema 5:
Primeiro, determinamos $f(g(x))$:
$f(g(x)) = 3(2x - 1) + a = 6x - 3 + a$.
Em seguida, determinamos $g(f(x))$:
$g(f(x)) = 2(3x + a) - 1 = 6x + 2a - 1$.
Para que as funções comutem, $f(g(x))$ deve ser idêntica a $g(f(x))$:
$6x - 3 + a = 6x + 2a - 1$.
Cancelamos $6x$ de ambos os lados e isolamos a:
$-3 + a = 2a - 1$
$-3 + 1 = 2a - a$
$a = -2$.
Gabarito: a = -2
Resolução do Problema 6:
Para que $h(x) = f(g(x))$ exista no conjunto dos números reais, a função interna $g(x)$ deve fornecer resultados que pertençam ao domínio de $f(x)$. Como $f(x) = \sqrt{(x - 4)}$, seu domínio exige que o radicando seja não-negativo: $x - 4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4$. Portanto, precisamos garantir que $g(x) \geq 4$:
$x^2 - 5 \geq 4$
$x^2 - 9 \geq 0$.
Resolvendo a inequação quadrática $x^2 - 9 \geq 0$, encontramos as raízes da equação correspondente ($x = 3$ e $x = -3$). O gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima, logo os valores positivos ocorrem nos intervalos externos às raízes:
$x \leq -3$ ou $x \geq 3$.
Gabarito: Dom(h) = { x ∈ R | x ≤ -3 ou x ≥ 3 }
Resolução do Problema 7:
A condição $f(f(x)) = x$ indica que a função é a sua própria inversa (função involutiva). Vamos calcular $f(f(x))$ aplicando a lei da função nela mesma:
$f(f(x)) = [2(f(x)) + 1] / [3(f(x)) - a]$
$f(f(x)) = [2((2x + 1)/(3x - a)) + 1] / [3((2x + 1)/(3x - a)) - a]$
Multiplicando o numerador e o denominador por $(3x - a)$ para eliminar as frações secundárias:
Numerador: $2(2x + 1) + 1(3x - a) = 4x + 2 + 3x - a = 7x + 2 - a$
Denominador: $3(2x + 1) - a(3x - a) = 6x + 3 - 3ax + a^2 = (6 - 3a)x + (3 + a^2)$
Assim, $f(f(x)) = (7x + 2 - a) / [(6 - 3a)x + (3 + a^2)]$.
Queremos que essa expressão seja idêntica a x, ou seja, $x / 1$. Multiplicando em cruz:

$7x + 2 - a = x[(6 - 3a)x + (3 + a^2)]$
$7x + 2 - a = (6 - 3a)x^2 + (3 + a^2)x$.
Para que essa igualdade seja válida para todo x, o coeficiente de x^2 no lado direito deve ser nulo (pois não há termo x^2 no lado esquerdo):
$6 - 3a = 0 \rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2$.
Vamos testar se a = 2 satisfaz os outros termos: o coeficiente de x seria $3 + 2^2 = 7$ (confere com o 7x da esquerda) e o termo independente seria 2 - 2 = 0 (confere com o lado esquerdo se considerarmos 2 - a = 2 - 2 = 0). Tudo bate perfeitamente.
Gabarito: a = 2
Resolução do Problema 8:
Vamos calcular as primeiras iterações para identificar o comportamento da sequência:
$f^1(x) = x / (x + 1)$
$f^2(x) = f(f(x)) = [x / (x + 1)] / [(x / (x + 1)) + 1] = [x / (x + 1)] / [(x + x + 1) / (x + 1)] = x / (2x + 1)$
$f^3(x) = f(f^2(x)) = [x / (2x + 1)] / [(x / (2x + 1)) + 1] = [x / (2x + 1)] / [(x + 2x + 1) / (2x + 1)] = x / (3x + 1)$
Por indução matemática, percebemos que o coeficiente que acompanha a variável x no denominador cresce linearmente de acordo com o número da iteração n. Logo, a regra geral para a n-ésima iteração é:
$f^n(x) = x / (nx + 1)$.
Para n = 10, temos $f^{10}(x) = x / (10x + 1)$.
Gabarito: $f^{10}(x) = x / (10x + 1)$
Resolução do Problema 9:
Calculamos passo a passo cada nível da composição de $f(x) = 1 / (1 - x)$:
Primeiro nível: $f(x) = 1 / (1 - x)$
Segundo nível: $f^2(x) = f(f(x)) = 1 / (1 - (1 / (1 - x))) = 1 / [((1 - x) - 1) / (1 - x)] = 1 / [-x / (1 - x)] = (1 - x) / (-x) = (x - 1) / x$
Terceiro nível: $f^3(x) = f(f^2(x)) = f((x - 1) / x) = 1 / [1 - ((x - 1) / x)] = 1 / [(x - (x - 1)) / x] = 1 / (1 / x) = x$.
Descobrimos que $f(f(f(x))) = x$. Trata-se de uma função cíclica de período 3. Como a expressão simplificada de $f(f(f(x)))$ é a própria identidade x, o valor da função para x = 5 será o próprio 5.
Gabarito: $f(f(f(x))) = x$, e para x = 5 o valor é 5
Resolução do Problema 10:
Temos uma tripla composição dada por $f(g(h(x))) = 4x^2 - 8x + 1$. Sabemos que $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = x - 5$.
Primeiro, vamos construir a lei da composta $f(g(t))$ para uma variável genérica t:
$f(g(t)) = 2(g(t)) + 3 = 2(t - 5) + 3 = 2t - 10 + 3 = 2t - 7$.
Se substituirmos t pela função h(x), teremos:
$f(g(h(x))) = 2h(x) - 7$.
O enunciado afirma que essa composição equivale a $4x^2 - 8x + 1$. Desse modo, montamos a igualdade:
$2h(x) - 7 = 4x^2 - 8x + 1$

Isolamos o termo contendo $h(x)$:

$2h(x) = 4x^2 - 8x + 1 + 7$

$2h(x) = 4x^2 - 8x + 8$

Dividindo todos os membros por 2 para obter a lei final:

$h(x) = 2x^2 - 4x + 4$.

Gabarito: $h(x) = 2x^2 - 4x + 4$