1 Funções Trigonométricas

O QUÊ?

Fenômenos Periódicos, Radiano, Funções Seno e Cosseno, Senóides.

POR QUÊ?

Fenômenos periódicos são aqueles que se repetem com o tempo. Alguns exemplos de tais fenômenos são os batimentos cardíacos, as fases da lua, do nascer do sol, o movimento dos ponteiros de um relógio ou de um pêndulo. O próprio movimento de rotação da Terra é um fenômeno periódico que se repete em períodos de 24 horas, sendo o responsável pelas noções de dia e de noite. As funções trigonométricas, diferente das demais que estudamos até aqui, têm a propriedade de serem periódicas, isto é, seus gráficos se replicam ciclicamente em intervalos determinados do seu domínio. Esta característica faz dessas funções as mais adequadas para modelar matematicamente e prever informações sobre os fenômenos periódicos.

Projeto: LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA

Cadastre-se como colaborador no site do projeto: umlivroaberto.com

Título:	Funções Trigonométricas
Ano/ Versão:	2021 / versão 1.0 de 26 de julho de 2021
Editora	Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS)
Realização:	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)
Produção:	Associação Livro Aberto
Coordenação:	Fabio Simas e Augusto Teixeira (livroaberto@impa.br)
Autores:	Douglas Monsôres de Melo Santos (UFRRJ) Gisela Maria da Fonseca Pinto (UFRRJ) Luciano Vianna Félix (UFRRJ)
Revisão:	Wanderley Rezende
Design:	Andreza Moreira (Tangentes Design)
Diagramação:	Tarso Caldas
Capa:	Foto de Kayra Ranai no Unsplash https://unsplash.com/photos/1tOOtR5ti2I

Desenvolvido por

Patrocínio:

EXPLORANDO FENÔMENOS PERIÓDICOS

Iniciaremos este capítulo estudando exemplos de fenômenos do nosso cotidiano que têm uma propriedade até então não observada nos capítulos anteriores do livro de Funções: são fenômenos que se repetem com o passar do tempo. Um dos objetivos desse capítulo é estudar técnicas de modelagem matemática desse tipo de fenômeno, visando antever situações relacionadas a ele. Quais seriam as funções adequadas para realizar essa modelagem? Realizando as atividades a seguir, você irá aos poucos descobrir que funções são essas e que características algébricas e gráficas elas possuem.

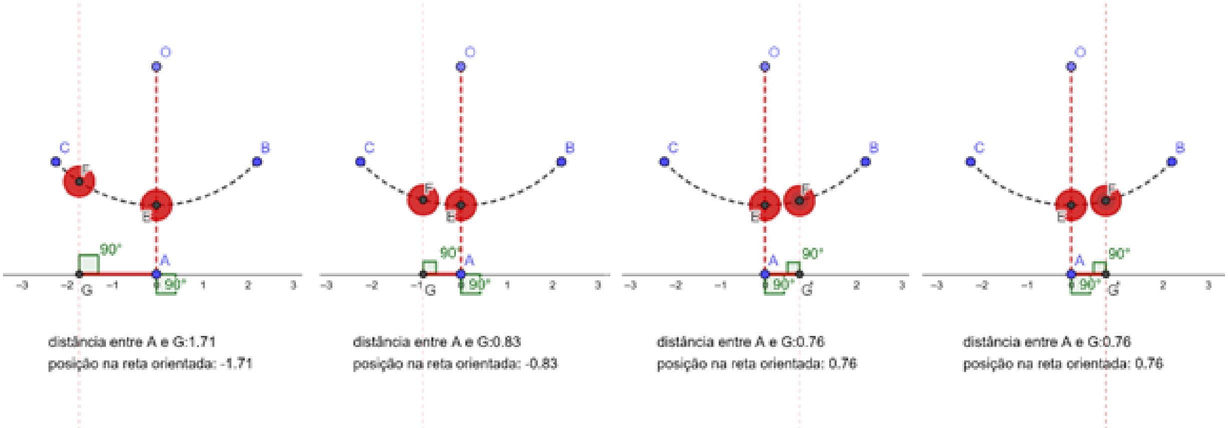
Pêndulo de um relógio

Atividade 1

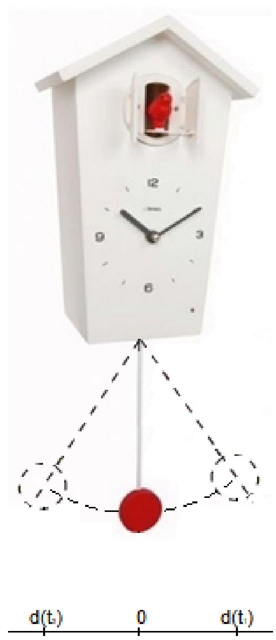
(Adaptado de Costa (2017))

Alguns relógios rústicos têm um pêndulo, composto por uma bolinha presa à parte de baixo de uma haste que oscila continuamente de um lado para o outro. O fato de o pêndulo estar em movimento mostra que o relógio está em pleno funcionamento.

Vamos estudar o comportamento da projeção do centro dessa bola numa reta horizontal localizada abaixo desse relógio, supondo que a origem dessa reta coincida com a projeção do centro da bola quando a haste do pêndulo está na posição vertical. Em outras palavras, vamos estudar as variações dos pontos da reta alcançados pela projeção do centro da bola. As imagens a seguir ilustram algumas possíveis posições do pêndulo. O centro do pêndulo está representado pelo ponto E; os pontos C e B são os pontos extremos do caminho percorrido pelo pêndulo. O ponto O é aquele em que o pêndulo se encontra preso ao relógio. O ponto F indica possíveis posições do pêndulo, e o ponto G indica a projeção de E na reta orientada a seguir. Observe as diferentes posições de F ilustradas e os valores da distância entre A e G (A é a projeção de O na reta orientada). A construção no GeoGebra do movimento de um pêndulo similar a esse pode ser acessada no link `https://www.geogebra.org/classic/uxcqamaz`



Suponha que no tempo t, a função que descreve o deslocamento dessa projeção seja $d(t)$. Note que, como estabelecemos uma posição como origem, esta função é considerada com sinal assumindo um valor positivo quando o pêndulo estiver à direita do segmento $OA(d(t_1) \geq 0)e$ assumindo um valor negativo quando estiver à esquerda de $OA(d(t_2) \leq 0)$, conforme é possível ver na ilustração acima: a distância entre A e G é um módulo, é absoluta; no entanto, quando consideramos a posição na reta orientada, atribuímos um sinal a essa distância.



a) Na malha quadriculada abaixo, considere $D_{\max}$ e $E_{\max}$ o maior e o menor valor assumidos pela função d. Repare que $D_{\max}$ corresponde à projeção do ponto B na reta horizontal, que é o ponto mais à direita que é atingido pelo centro da bolinha ao longo da oscilação do pêndulo. Da mesma forma, $E_{\max}$ corresponde à projeção de C, que é o ponto mais à esquerda que é atingido pelo centro da bolinha durante o movimento. Tente esboçar o gráfico da função $d(t)$, supondo que $d(0) = D_{\max}$.

b) Que aspectos você percebe que esse gráfico possui? Cite algumas diferenças entre ele e os gráficos das funções que você estudou até aqui.

Construindo o próprio pêndulo

Atividade 2

(Adaptado de Costa (2017))

Com madeira, um prego, barbante e uma bolinha de gude, construir um pêndulo como o da figura.

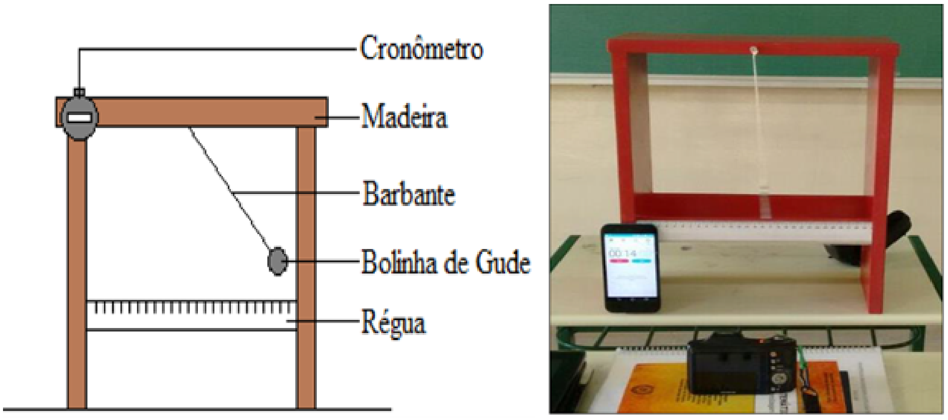


Figura 1.1: Costa (2017)

Será necessário o uso de dois celulares ou um celular e uma câmera. Um dos celulares irá cronometrar o tempo durante a oscilação do pêndulo e o outro, deverá tirar sucessivas fotografias do movimento do pêndulo e do primeiro celular. Uma régua deve ser utilizada também para medir o deslocamento horizontal da projeção do pêndulo, como na figura acima. Posicione o pêndulo exatamente sobre o zero da régua e solte-o no momento em que cronômetro for ligado e as fotos começarem a ser tiradas. Fotografar o movimento ao longo de 4 oscilações completas do pêndulo.

a) Analise as fotografias e forme pares ordenados (x, y) onde x representa o tempo e y, a medida na régua na qual estará a projeção horizontal do pêndulo.

b) Plote os pontos no GeoGebra. Que comportamento você consegue perceber no caminho que os pontos vão percorrendo?

c) Compare o esboço que você obteve aqui com o da atividade anterior. Que conclusões você consegue tirar?

Construindo uma Roda Gigante

Atividade 3

Utilizando papelão, tampinhas de garrafa, cola e um lápis, construir uma roda gigante como a da figura.

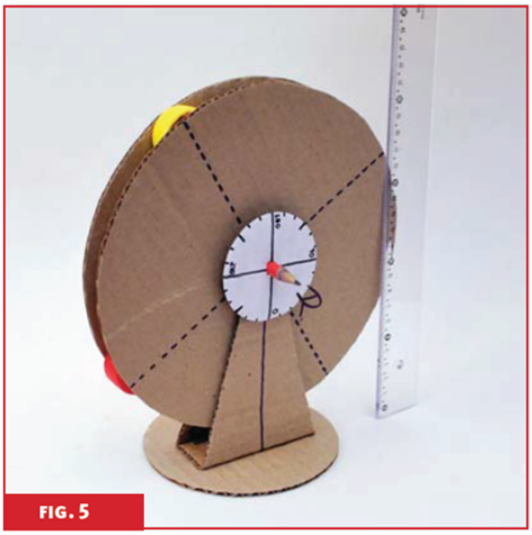


Figura 1.2: Fonte: Soares (2010)

Será necessário também o uso de um transferidor para medir os ângulos e uma régua para medir a altura das "cabines".

Um passageiro entra na cabine quando essa está em seu ponto mais baixo. A partir daí, a roda começa a girar no sentido anti-horário, numa velocidade constante de 20 graus por segundo. Considere $h = h(t)$ a altura em centímetros da cabine no instante de tempo t, medido em segundos.

a) Calcule a medida do raio da roda gigante e também as alturas mínima e máxima que a cabine pode assumir.

b) Quantos segundos a roda gigante demora para dar uma volta completa?

c) Com o auxílio dos seus colegas, encontre a altura da cabine em cada segundo do movimento da roda gigante até ela completar uma volta. Marque num papel milimetrado os pontos $(t, h(t))$ obtidos.

d) Entre a altura máxima e a altura mínima, há alguma altura intermediária que a cabine atinge mais de uma vez ao longo de cada volta da roda gigante? Quanto mede essa altura intermediária?

e) Determine todos os valores assumidos pela altura h da cabine ao longo de uma volta completa da roda gigante.

f) Observando os pontos marcados no item **c)** e a dinâmica do giro da roda gigante, responda: apesar da velocidade com que a roda gigante gira ser constante, também será constante a taxa de variação da altura da cabine?

g) Esboce no papel milimetrado uma curva que represente o gráfico de função $h = h(t)$. Como será o gráfico da função para valores de t maiores que 18 s?

h) Como seria o gráfico de $h = h(t)$ se a velocidade do giro da roda gigante duplicasse, ou seja, se ela demorasse apenas 9 s para dar uma volta completa? Que alterações podem ser observadas em relação ao gráfico traçado no item **g)**?

PARA REFLETIR

Roda Gigante Virutal

Acesse o link de uma roda gigante construída virtualmente no GeoGebra através do seguinte link `https://www.geogebra.org/m/g8mnxpgx`

Também é possível visualizar nesse link o gráfico que relaciona a altura da cabine da roda gigante virtual com o tempo.

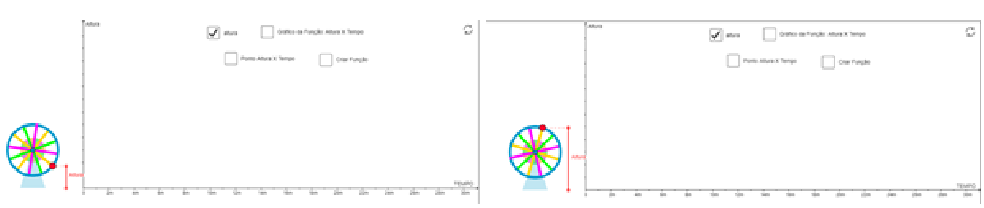


Figura 1.3: Observação da altura da cabine

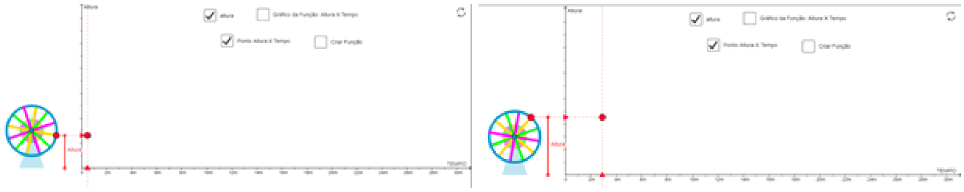


Figura 1.4: Observação do ponto do plano que associa a x o tempo e a y a altura da cadeira

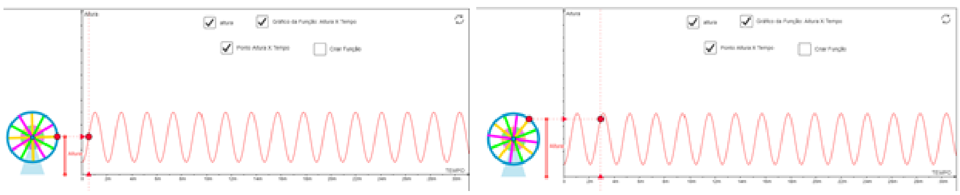


Figura 1.5: Observação do gráfico da função que associa a x o tempo e a y a altura da cadeira

Compare esse gráfico com o gráfico obtido por você e seus colegas na atividade anterior. Como você acha que deveria ser o gráfico se o movimento começasse quando a cabine estivesse no ponto mais alto da roda? E como seria o gráfico se a velocidade com que a roda gigante gira fosse reduzida à metade?

ORGANIZANDO FENÔMENOS PERIÓDICOS.

O que os fenômenos apresentados nas atividades anteriores têm em comum? Se considerarmos uma situação ideal em que o mesmo fenômeno se repete *exatamente* da mesma maneira ao longo do tempo, podemos dizer que o pêndulo do relógio sempre vai e volta ininterruptamente e que a roda gigante dá várias voltas sem parar. Fenômenos assim são chamados de *periódicos*, ou seja, que se repetem exatamente da mesma forma ao longo do tempo. Ao estudarmos matematicamente as situações que usamos como exemplo aqui, consideramos um modelo. Um *modelo matemático* é uma descrição matemática a partir da observação de algum fenômeno observado no mundo físico. Claro que, ao fazermos essa descrição em termos matemáticos, precisamos fazer algumas restrições e suposições que não necessariamente ocorreram ou ocorreriam de fato no fenômeno observado - mas, com um modelo, é razoável que consideremos essas restrições. Por exemplo, a suposição de que um pêndulo como o da primeira ou da segunda atividade oscila ininterruptamente não ocorre no mundo real: o relógio pode atrasar por algum problema no mecanismo ou até mesmo parar, por exemplo. A roda gigante precisa parar sempre que alguém vai subir ou descer do brinquedo. Mas, as restrições que são feitas para criar o modelo possibilitam que o fenômeno seja estudado, que previsões sejam feitas, além de permitir que outros fenômenos sejam classificados por semelhanças ou diferenças.

Você conhece mais alguns fenômenos periódicos que acontecem na vida?

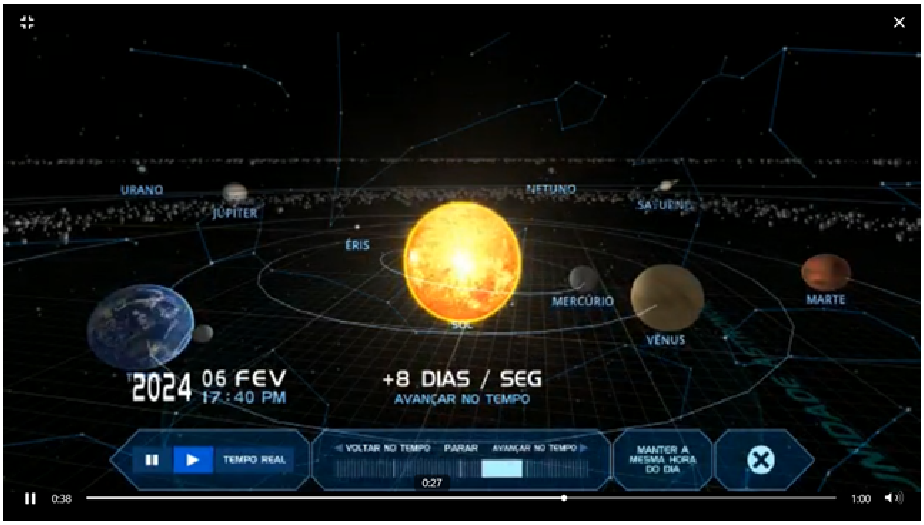


Figura 1.6: Fonte: Solar System Scope

O movimento de rotação da Terra em torno de seu próprio eixo é um movimento periódico que demora 24 h para completar um ciclo (período de 24 h) e o movimento de translação da Terra ao redor do Sol demora 365 dias e 6 h para completar um ciclo (período de 365 dias e 6 h).

Nas atividades anteriores você fez os gráficos de funções que representam fenômenos periódicos. Por esse motivo elas também serão chamadas de *funções periódicas*, ou seja, funções cujos valores da imagem se repetem em intervalos fixos. Mais precisamente, uma função $y = f(x)$ é chamada de periódica, se existe algum valor p tal que $f(x) = f(x + p)$, para todos os valores de x tais que x e $x + p$ pertençam ao domínio dessa função. O menor valor positivo de p que satisfizer a essa propriedade será chamado o período dessa função.

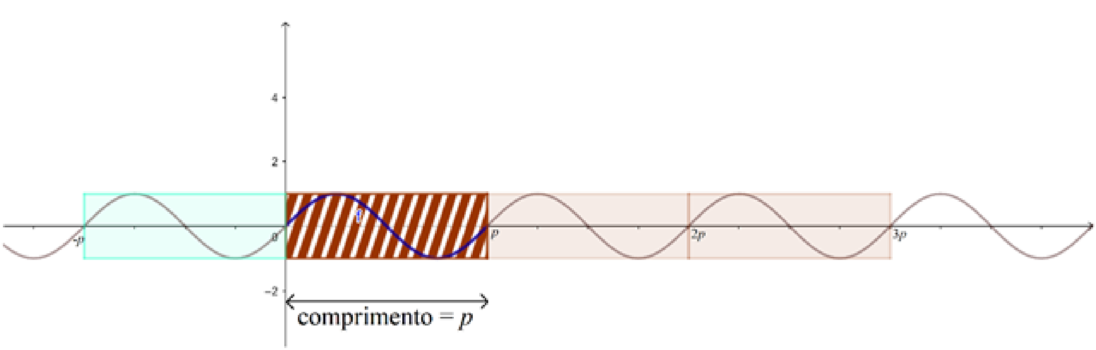
Para entender melhor os conceitos que estamos apresentando, vamos discutir um pouco sobre a Atividade "Construindo uma Roda Gigante". Nela, você foi orientado a observar o comportamento de uma cabine em específico. Como a roda gigante tem velocidade de rotação constante, o comportamento se repete a cada volta. Isso significa que o gráfico que você gerou para a primeira volta completa da roda gigante vai se repetir exatamente dessa mesma forma por todo o tempo em que a roda gigante permanecer girando. Esse é, portanto, um *fenômeno periódico*.

A velocidade de rotação é de 20 graus por segundo; logo, uma volta completa (360°) será alcançada após 18 segundos. Decorridos os primeiros 18 segundos de movimento, a roda gigante vai ter dado uma volta completa e a cabine observada terá voltado para sua posição inicial. Matematicamente, podemos escrever que $h(0) = h(18)$. Independentemente da posição ocupada pela cabine no instante t, após 18 segundos a roda gigante dará uma volta completa e a cabine voltará para a mesma posição em que estava quando começamos a marcar o tempo. Matematicamente, essa observação pode ser registrada como $h(t) = h(t + 18)$. É interessante observar que isso é verdade para outros valores: por exemplo, após 36 segundos, a roda gigante terá dado 2 voltas, portanto $h(t) = h(t + 36)$. De maneira mais geral, considerando um número inteiro positivo k, a roda gigante terá dado k voltas após $18k$ segundos e, portanto, $h(t) = h(t + 18k)$, o que indica que essa função é periódica de período 18, pois esse é o menor valor necessário para que se tenha um ciclo completo do fenômeno observado, ou seja, da roda gigante em movimento.

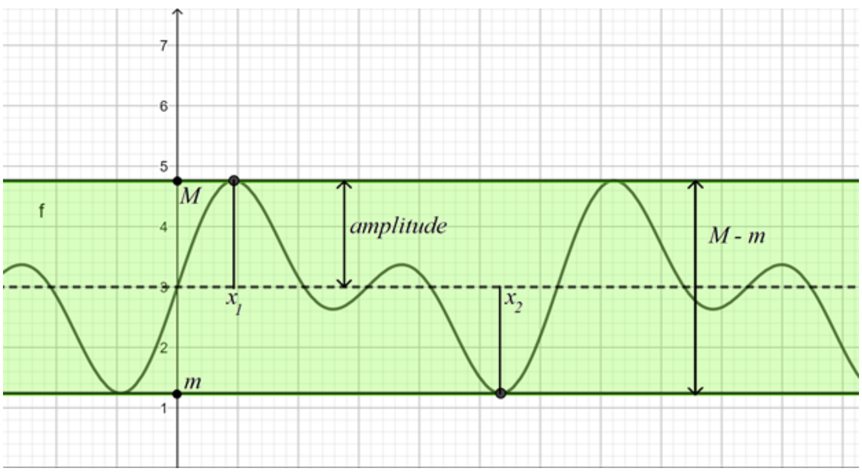
Mas será que esse é de fato o menor valor para o qual esse ciclo se repete? Note que, por exemplo, quando $t = 4{,}5$, a roda gigante terá dado $\frac{1}{4}$ de volta, e portanto, $h(4{,}5) = r$. Após 9 segundos, a roda gigante terá dado mais $\frac{1}{2}$ volta, assim, a cabine estará a mesma altura que estava no instante $t = 4{,}5$, o que indica que $h(4{,}5) = h(4{,}5 + 9)$. Será que isso significa que 9 pode ser o período dessa função? Se isso fosse verdade, precisaríamos ter $h(t) = h(t+9)$, para todos os valores t do domínio; no entanto, isso não é verdade, uma vez que no instante $t = 0$ a cabine está na posição mais baixa e no instante $t = 9$, a roda gigante terá dado $\frac{1}{2}$ de volta e, portanto, a cabine estará na posição mais alta e não de volta ao início, como seria necessário. Note ainda que depois do instante $t = 0$, a cabine só voltará para a posição inicial após dar uma volta completa, portanto, após 18 segundos. Logo, não existe p$<$ 18 tal que $h(0) = h(0 + p)$; ou seja, o período é, de fato 18.

Repare que, uma vez conhecido o comportamento do gráfico dessa função na faixa $0 \leq t \leq 18$, também conhecemos o comportamento dela na faixa $18 \leq t \leq 36$: será exatamente a repetição do gráfico da faixa anterior, uma vez que a partir de $t = 18$ a função se comporta da mesma maneira que se comportava entre $t = 0$ e $t = 18$. De maneira mais geral, o gráfico na faixa $18k \leq t \leq 18(k + 1)$ será uma cópia da faixa do gráfico na faixa $0 \leq t \leq 18$.

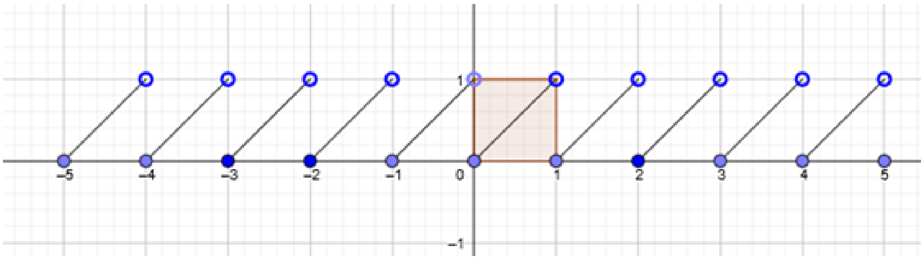
O período desempenha um papel importante no gráfico de uma função periódica: se conhecermos o desenho do seu gráfico num trecho sobre um intervalo do domínio de comprimento p então podemos esboçar o gráfico inteiro da função, "copiando e colando" esse trecho ao longo de todo o domínio.



A amplitude é outra característica importante quando estudamos uma função periódica. Quando a imagens $f(x)$ de uma função periódica assumirem um valor máximo M e também um valor mínimo m, definimos a *amplitude* de f como sendo $a = \frac{(M-m)}{2}$. Geometricamente, a menor faixa horizontal que contém o gráfico da função f terá largura igual ao dobro da amplitude.



Na figura a seguir, vemos o gráfico de uma função f definida no intervalo $[-5, 5]$, conhecida na literatura como *função dente de serra*.



Podemos perceber que este gráfico é formado por um conjunto de segmentos de reta que são paralelos, sendo que um desses segmentos tem extremidades nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$ e os outros são réplicas desse mesmo trecho do gráfico que se repetem para a esquerda e para a direita. Repare que o ponto $(1, 1)$ do segmento replicado é omitido, senão a figura resultante não representaria o gráfico de uma função (Por quê?).

Repare que, para qualquer número $0 < p < 1$, o trecho do gráfico que fica sobre o intervalo $[0, p]$ no eixo x corresponde apenas a uma parte de um desses segmentos de reta, de forma que ao replicarmos essa parte para a esquerda e para a direita, obteríamos uma figura diferente do gráfico da função. Portanto, nenhum número menor que 1pode ser o período de f. Concluímos que $p = 1$ é o **período** da função.

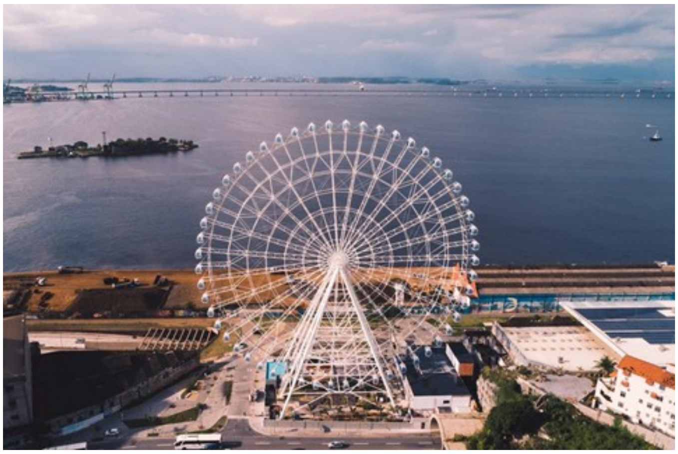
Como o menor valor e o maior valor assumidos pela imagem são 0 e 1 respectivamente, temos que a amplitude é igual $\dfrac{(1-0)}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Isso nos mostra que podemos criar uma infinidade de funções periódicas agindo exatamente dessa mesma forma! Podemos definir uma função em um determinado intervalo, por exemplo, $[-2, 0]$, e a partir daí reproduzir por intervalos sucessivos translações horizontais que tenham como fator de translação o mesmo comprimento do intervalo usado como base para criar a função.

PRATICANDO FENÔMENOS PERIÓDICOS

Rio Star

Atividade 4



A Rio Star é a maior roda gigante da América Latina e está localizada na cidade do Rio de Janeiro. Ela tem 88 metros de altura. A atração turística conta com 54 cabines climatizadas que podem receber até 8 pessoas cada, totalizando 432 visitantes que poderão apreciar a vista da Zona Portuária, do Relógio Central, Morro da Providência, Cristo Redentor, Pão de Açúcar, Pedra do Sal, Ponte Rio-Niterói e da Cidade do Samba durante 18 minutos - tempo necessário para a volta completa no brinquedo. (Fonte: Casa Vogue)

Suponha que o ponto mais baixo da roda gigante que qualquer uma das cabines pode atingir se encontra a 3 metros de altura do chão. Beatriz e Gabriela embarcam em uma das cabines e a partir daí, a roda gigante gira continuamente com a mesma velocidade e dá duas voltas sem parar, finalizando o movimento com a cabine das meninas retornando ao ponto mais baixo.

a) Qual é o raio da roda gigante?

b) Existe algum momento em que a altura da cabine em relação ao chão será nula? Justifique.

c) Em quais instantes do movimento a cabine estará na mesma altura do centro da roda gigante? E no ponto mais alto da roda? E no ponto mais baixo?

d) Você acha que a altura a que a cabine sobe nos primeiros dois minutos do movimento é a mesma que nos dois minutos seguintes? Justifique sua resposta?

e) No plano cartesiano, plote no plano cartesiano os pontos (t, h) com os dados obtidos no item **c)**, em que t é o tempo e h é a altura da cabine. Em seguida, esboce a curva por meio desses pontos que você acha que representa o gráfico da função altura $h = h(t)$. Compare seu gráfico com o de seus colegas.

f) Qual o período, a amplitude e o conjunto imagem da função $h = h(t)$?

Construa sua própria função periódica!

Atividade 5

Vamos fazer a nossa própria função periódica?

a) Usando a malha quadriculada proposta a seguir, defina, a origem, os eixos Ox e Oy e desenhe, usando até 6 unidades horizontais da malha, uma curva que possa representar o gráfico de uma função, de modo que o ponto inicial da curva tenha mesma altura que o ponto final.

b) Agora, reproduza exatamente esse mesmo trecho por toda a largura da malha, do mesmo jeito como foi feito com a função dente de serra, construindo assim o gráfico de uma função periódica.

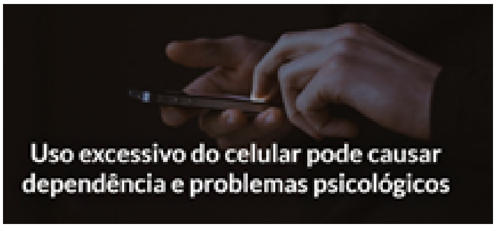
c) Qual o período e a amplitude da sua função periódica?

d) Compare o seu gráfico com o de seus colegas. Será que em pelo menos algum deles, você consegue imaginar um contexto real (climática, biológica, doméstica, tecnológica ou outras quaisquer) que ele poderia representar?

Bem estar digital

Atividade 6

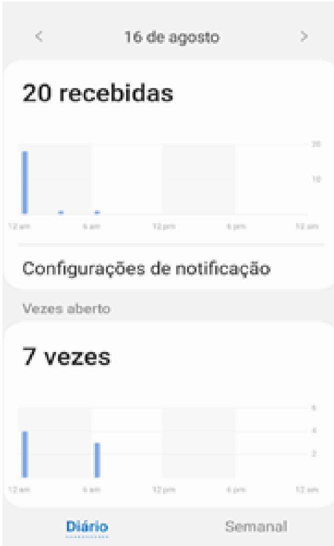
Veja um trecho da reportagem a seguir, disponível no endereço http://www.ihu.unisinos.br/78-noticias/591422-uso-excessivo-do-celular-pode-causar-dependencia-e-problemas-psicologicos

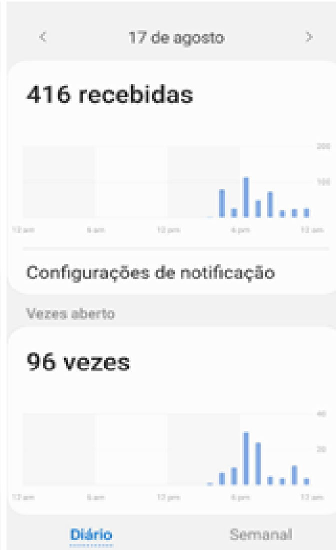


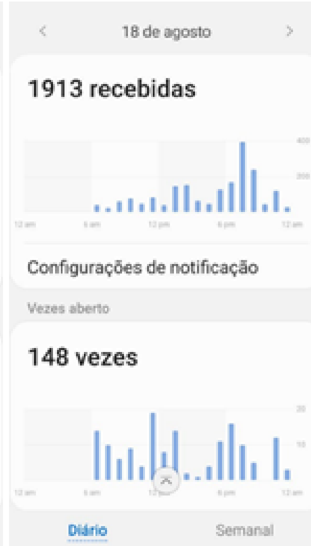
> Dados mostram que 12% dos americanos já desenvolveram dependência dos smartphones; psicólogo explica os riscos para a saúde mental.
>
> A reportagem é de Giulia El Halabi, publicada por EcoDebate, 06-08-2019.
>
> Quem nunca pegou o celular apenas para checar mensagens e passou dezenas de minutos - ou até mesmo algumas horas - vidrado na telinha? Esse comportamento cada vez mais comum pode se tornar um vício que já atinge 12% dos americanos, segundo dados do *Center for Internet and Technology Addiction*.
>
> "O celular ativa continuamente o Sistema de Recompensa, estrutura do cérebro que recebe toda atividade prazerosa. Esse estímulo constante é o que gera dependência, em um processo similar à atuação de drogas ilícitas", diz o psicólogo e professor do Centro Universitário Internacional Uninter, Ivo Carraro.
>
> O uso abusivo dos smartphones pode gerar transtornos psíquicos, como ansiedade e, posteriormente, depressão. O transtorno já tem um nome: nomofobia, medo de ficar sem o celular. Longe do aparelho, o indivíduo fica ansioso, com a sensação de estar perdendo informações importantes, ou ainda excessivamente entediado.
>
> Outro prejuízo é a dificuldade de sociabilização e isolamento. "Os humanos são seres de linguagem verbal e sociabilidade acentuadas. Quando se comunicam somente por mensagens, que são 'mudas', a palavra falada é eliminada e a inépcia social aumenta, agravando quadros depressivos", explica o professor.
>
> A exposição excessiva ao celular também pode causar insônia. Isso acontece porque a luz azul do aparelho 'diz' ao cérebro que ele deve ficar alerta. Assim, a produção de melatonina, o hormônio do sono, é inibida.
>
> (Fonte: Instituto Humanitas Unisinos)

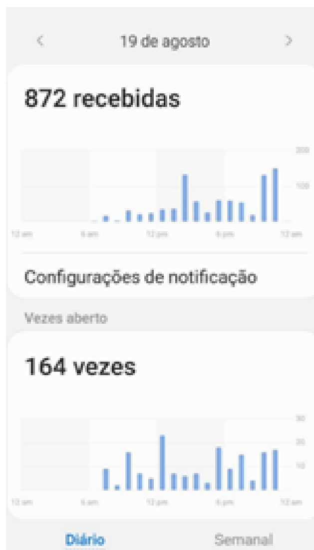
Como forma de contribuir com os usuários, as plataformas têm disponibilizado algumas ferramentas de registro de acesso aos ambientes mais acessados. Experimente olhar em seu smartphone, nas configurações, se há essa ferramenta - normalmente, o nome é *bem estar digital*.

Por exemplo, alguns registros diários de uso de um aplicativo de mensagens bastante popular no smartphone de uma professora (observando o período de uma semana) estão exibidos a seguir. A primeira informação diz respeito ao número de mensagens recebidas e a segunda informação mostra quantas vezes o aplicativo foi aberto ao longo daquele dia. O dia 13 de agosto foi uma quinta-feira.


16 de agosto
20 recebidas
Configurações de notificação
Vezes aberto
7 vezes
Diário
Semanal


17 de agosto
416 recebidas
Configurações de notificação
Vezes aberto
96 vezes
Diário
Semanal


18 de agosto
1913 recebidas
Configurações de notificação
Vezes aberto
148 vezes
Diário
Semanal


19 de agosto
872 recebidas
Configurações de notificação
Vezes aberto
164 vezes
Diário
Semanal

a) Preencha a tabela a seguir com os dados apresentados na figura anterior.

Dia da Semana	Nº de mensagens recebidas	Nº de vezes que o aplicativo foi aberto
1 (qui)		
2 (sex)		
3 (sáb)		
4 (dom)		
5 (seg)		
6 (ter)		
7 (qua)		

b) Marque num plano cartesiano (físico ou digital) pontos (x, y) correspondendo às duas primeiras colunas da tabela, onde x representa o dia da semana e y o número de mensagens recebidas pela professora naquele dia. Em seguida, construa um segmento de reta ligando o ponto correspondente ao dia 1 ao ponto correspondendo ao dia 2, um segmento de reta ligando o ponto correspondente ao dia 2 ao ponto do dia 3 e assim sucessivamente até chegar ao ponto associado ao dia 7.

c) Faça o mesmo que foi pedido no item **b)**, agora considerando que, nos pares (x, y), x representa o dia da semana e y o número de vezes que para a quantidade de vezes em que a professora abre esse aplicativo.

d) Que observações você pode fazer sobre a rotina dessa professora?

e) As funções com domínio sendo o intervalo $[1, 7]$ da reta e cujos gráficos foram esboçados nos itens **b)** e **c)** podem ser ditas periódicas? Se sim, justifique; se não, analise as fotos do enunciado de forma a descobrir ao menos algum padrão de regularidade no comportamento da rotina da professora que poderiam dar ideia de periodicidade.

f) Suponha que os mesmos dados de números de mensagens recebidas e de vezes que o aplicativo foi aberto sejam reproduzidos nos dias seguintes: no dia 8, a professora recebe o mesmo número de mensagens que no dia 1, no dia 9 ela recebe o mesmo número de mensagens que no dia 2 e assim sucessivamente (mesmo raciocínio para o número de vezes que o aplicativo foi aberto). As linhas poligonais construídas ligando pontos consecutivos, como feito nos itens **b)** e **c)**, agora representam gráficos de funções periódicas? Se sim, qual será o valor do período e da amplitude delas?

g) Se você ou alguém de sua família tiver um smartphone com essa função, veja que aplicativos aparecem com registro nessa ferramenta e que parâmetros são exibidos (tempo de tela, número de vezes em que o aplicativo é aberto, número de notificações, entre outros).

h) Colete os dados referentes a algum aplicativo de mensagens e anote, reproduzindo os passos **a)**, **b)**, **c)** e **d)**.

VOCÊ SABIA?

O Som e as Ondas Sonoras

O som é resultante de uma vibração, que se transmite em meios materiais de propagação, como sólidos, líquidos e gasosos. Quando uma fonte sonora produz uma vibração, esta é transmitida a todo o meio material que a envolve e em todas as direções. Esta vibração é comunicada aos constituintes mais próximos da matéria, que sucessivamente a transmite aos constituintes seguintes através de choques entre eles.

A vibração de uma fonte sonora causa uma onda no meio de propagação. O som propaga-se por ondas invisíveis: as ondas sonoras ou acústicas. Portanto, o som pode ser descrito através de uma sequência de ondas sonoras, que são ondas de deslocamento, densidade e pressão que se propagam pelos meios compressíveis. Quando uma onda sonora se propaga através de qualquer gás, ocorrem várias compressões e rarefações de pequenos volumes do gás.

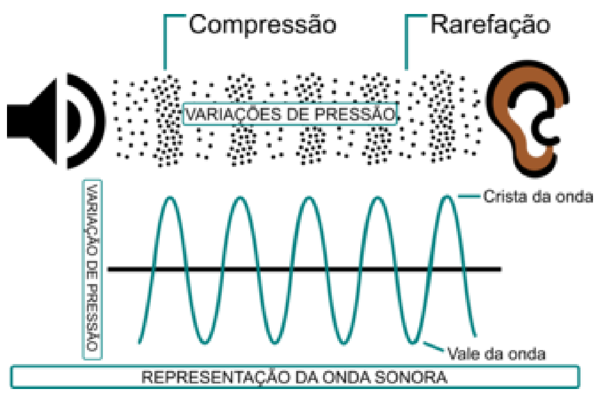


Figura 1.7: Fonte: Wikipedia

Assista ao vídeo a seguir para compreender melhor o que são as ondas sonoras e como o som se propaga: `https://www.youtube.com/watch?v=sEa0dvnqrnw`

As ondas sonoras mais simples são representadas por gráficos de um tipo muito específico de função periódica. Em estudos avançados de Física e Matemática constataram que toda onda sonora é gerada a partir de uma combinação dessas ondas sonoras mais simples, ou seja, de funções periódicas.

Podemos enxergar estas ondas? Há um equipamento muito *utilizado* por profissionais da área de elétrica e eletrônica é o osciloscópio, que permite a visualização de formas de ondas eletromagnéticas. Esses dispositivos também são capazes de "ler" sinais sonoros, acoplando a eles um microfone.

Faça o *download* em seu celular do aplicativo gratuito *Oscilloscope*. Ele é capaz de captar os sons e reproduzir o que seriam as suas ondas sonoras correspondentes.

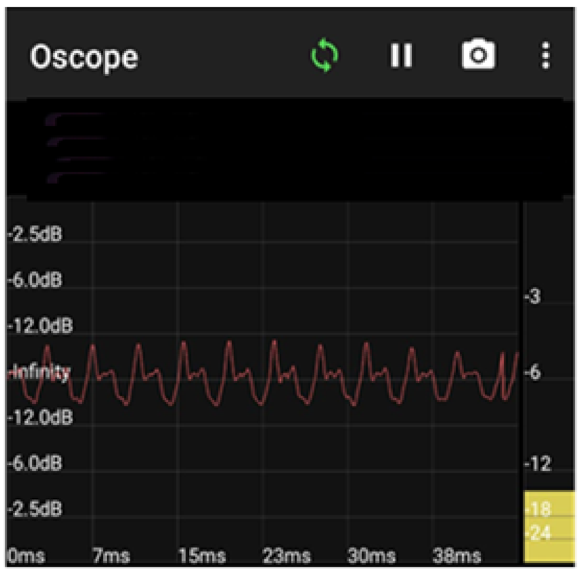


Figura 1.8: O aplicativo Oscilloscope. Fonte: Os autore

a) Capture com o aplicativo sons em diferentes volumes (clicando no ícone da câmera no topo à direita da tela é possível capturar a imagem da onda sonora). Qual é a diferença nas ondas geradas?

b) Capture com o aplicativo sons graves e agudos. Qual a diferença nas ondas geradas?

c) Procure gerar sons cujas ondas sonoras tenham trechos representados por um gráfico de funções periódicas como a da figura. Explore a relação entre a **amplitude** e o **período** da função associada a essa onda.

VOCÊ SABIA?

O eletrocardiograma (ECG) é um exame médico simples, indolor e rápido, levando em média 3 minutos para fazê-lo, no qual os impulsos elétricos do coração são amplificados e registrados. Em geral, um paciente faz um ECG quando há suspeita de doença cardíaca, mas ele também costuma ser feito como parte de exames físicos de rotina para pessoas de meia-idade e idosas, mesmo que elas não tenham nenhuma evidência de doença cardíaca.

Para realizar o ECG, um examinador coloca eletrodos (sensores redondos e pequenas que aderem à pele) nos braços, pernas e tórax da pessoa. Esses eletrodos medem a magnitude e a direção das correntes elétricas no coração durante cada batimento cardíaco. Os eletrodos são ligados por cabos a uma máquina que produz um registro (traçado) para cada eletrodo. Cada traço mostra a atividade elétrica do coração a partir de ângulos diferentes. No ECG são produzidos esses traços.

A figura a seguir ilustra as ondas associadas às atividades elétricas do coração. O batimento cardíaco começa com um impulso que ativa as câmaras superiores do coração (átrios). A onda P representa a ativação dos átrios. Em seguida, a corrente elétrica flui para as câmaras inferiores do coração (ventrículos). O trecho QRS representa a ativação dos ventrículos. A corrente elétrica, em seguida, espalha-se para trás, ao longo dos ventrículos no sentido oposto. Esta atividade é chamada onda de recuperação, representada pela onda T.

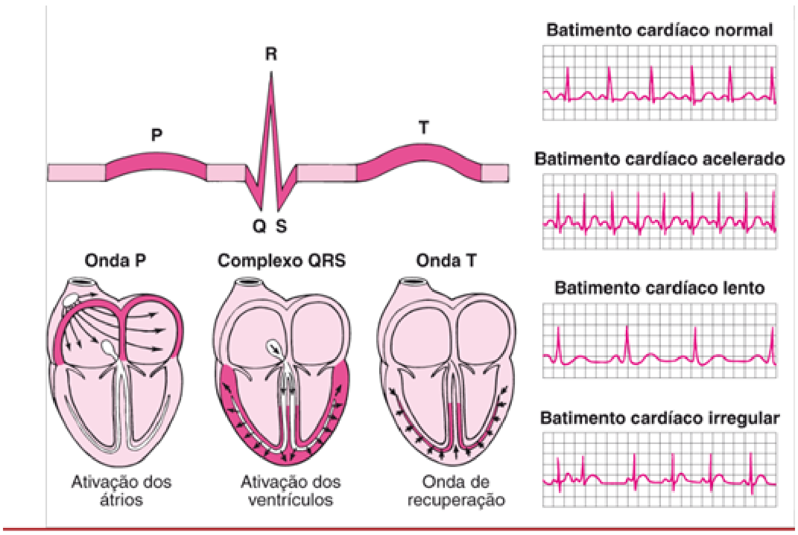


Figura 1.9: Fonte: Manual MSD

Como a mecânica do coração se repete constantemente, a sistematização dessas ondas gera uma onda contínua que é impressa ao longo do exame. Em geral, esta onda é representada pelo gráfico de uma função periódica. Quando isto não ocorre, tem-se um indício de arritmia cardíaca, ou seja, um batimento cardíaco irregular. Mesmo que a onda impressa seja representada por uma função periódica, nem sempre o coração do paciente estará sadio: o batimento cardíaco pode estar mais acelerado ou mais lento do que o normal para uma situação de repouso, o fica visível através do período da função periódica associada ser muito baixo ou muito alto, comparado ao de um batimento cardíaco normal (vide figura 1.9).

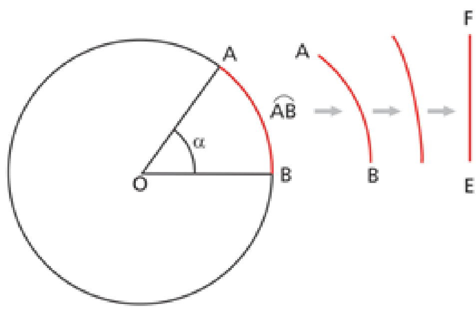
EXPLORANDO O RADIANO

Cobrindo circunferências com seus raios

Atividade 7

Vamos propor agora uma atividade para você fazer com os seus colegas na sala de aula. Se organizem em duplas ou grupos e sigam os passos a seguir:

1. Providencie objetos redondos que você possa levar para a sala de aula (rodinhas de carrinho de brinquedo, copos, garrafas, tampas de potes e panela, etc);
2. Use esses objetos para desenhar circunferências numa folha suficientemente grande, contornando-as com um lápis;
3. Determine o centro dessas circunferências. Para isso, tome três pontos sobre a circunferência e trace as mediatrizes de dois segmentos distintos com extremidades nesses pontos. O encontro entre essas mediatrizes é o centro da circunferência;
4. Meça o raio dessas circunferências;
5. Para cada uma das circunferências, corte um pedaço de barbante que tenha essa medida e ajuste-o sobre a circunferência, colando-o no papel.



a) Qual o nome do objeto geométrico equivalente à parte das circunferências coberta pelo barbante?

b) A partir de cada extremidade dos pedaços de barbante colados sobre cada circunferência, trace dois segmentos que unam as extremidades dos barbantes ao centro de cada circunferência. Meça os ângulos centrais que ficam assim determinados em cada circunferência. Qual a medida do ângulo central encontrada em cada uma delas?

c) Compare a sua resposta do item **c)** com as de outras duplas ou grupos de sua turma. Há algo que você consegue notar nos valores obtidos?

d) Quantas vezes o raio da circunferência cabe no comprimento da mesma?

e) É possível cobrir toda a circunferência com uma quantidade inteira de segmentos com medida igual à do seu raio? Se sim, diga quantos segmentos são necessários; se não, estime o valor da fração do raio do círculo correspondente ao pedacinho que ficou descoberto.

Ângulos e Arcos de Circunferência no GeoGebra

Atividade 8

Abra o GeoGebra e crie um controle deslizante a variando de 0 a 10. Crie o ponto A e construa uma circunferência de centro A com raio a. Tome um ponto B sobre a circunferência e construa o segmento AB, cujo comprimento ficará registrado na janela da álgebra. Agora, crie um ponto C sobre a circunferência e construa o (menor) arco circular de centro A e extremidades C e B, cujo comprimento ficará indicado na Janela da Álgebra.

a) Usando o GeoGebra, determine a razão k entre o comprimento do arco BC e o raio da circunferência. Movimente o controle deslizante do parâmetro a. O que você observa em relação ao valor de k?

b) Altere a medida do comprimento do arco BC movendo o ponto C ao longo da circunferência. Qual o intervalo de variação da razão k?

c) Movimente C de forma que o comprimento do arco BC fique igual ao comprimento do raio da circunferência. Qual o valor da razão k nesse caso? Movimente o controle deslizante novamente e registre o que você observa.

d) Construa e meça o ângulo central $B\hat{A}C$ e modifique a unidade de medida para "*radianos*". Movimente o ponto C sobre a circunferência. O que você pode observar em relação ao valor de k e a medida do ângulo central da circunferência em radianos?

e) Movimente o controle deslizante a e observe o valor da razão k.

f) Reproduza a atividade, agora com uma circunferência que tenha um raio fixo e igual a 1. Comente como ficam os valores de k e do ângulo $B\hat{A}C$.

ORGANIZANDO O RADIANO

Na atividade Cobrindo circunferências com seus raios, você pôde observar que, mesmo que variemos o raio da circunferência, o ângulo central (com vértice no centro da circunferência) determinado por um arco da circunferência que tem comprimento igual à medida do raio é o mesmo. Além disso, também foi possível verificar que cabem sobre a linha da circunferência 6 "pedaços" inteiros de barbante com o comprimento igual ao raio da circunferência, faltando um arco cujo comprimento é menor que o comprimento do raio da circunferência em questão.

Na segunda atividade - Ângulos e Arcos de Circunferência no GeoGebra - você pôde observar que a razão entre o comprimento de um arco qualquer na circunferência e o seu raio varia entre 0 e valores menores que $6{,}3$ - ou seja, isso indica que o raio da circunferência "cabe" sobre o seu contorno pouco mais de 6 vezes inteiras. Mas exatamente, quantas vezes será que o raio de uma circunferência cabe sobre o seu contorno?

Para determinar esse valor, vamos nos lembrar que, no Ensino Fundamental, você aprendeu que o comprimento C de uma circunferência de raio r é $C = 2\pi r$. A operação que nos permite verificar quantas vezes uma grandeza "cabe" em outra de mesma natureza é a divisão; então, como queremos verificar quantas vezes o raio cabe na circunferência, vamos dividir o comprimento da circunferência pelo raio. Temos então:

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi.$$

Isso quer dizer que o raio de uma circunferência cabe sobre o seu contorno 2π vezes - o que é coerente com o que encontramos na atividade Ângulos e Arcos de Circunferência no GeoGebra ou ainda na atividade Cobrindo circunferências com seus raios. Tomando para o valor aproximado de $3{,}14$ (lembrando que esse é uma aproximação, na verdade,π é um número irracional!), encontramos $2 \cdot \pi \cong 2 \cdot 3{,}14 = 6{,}28$, ou seja, pouco menos do que $6,3$. E observe: esse resultado não depende do raio da circunferência!

O que estamos fazendo aqui é uma ação de ***medir* arcos de circunferências** (e seus respectivos ângulos centrais), mas usando o ***raio da circunferência como unidade de medida*** e não os já conhecidos graus, que remetem ao ângulo central da circunferência que determina o arco que desejamos medir. A unidade de medida de arcos provenientes dessa ação é o *radiano*. Escrevemos rad para denotar esta nova unidade medida. Então, o radiano é uma unidade de medida de arcos tal que $2\pi\,\mathrm{rad}$ é a medida do arco que cobre completamente a circunferência, sem sobreposições. Assim sendo, podemos estabelecer uma correspondência entre a nossa já conhecida unidade de medida de arcos em graus e a nova unidade radianos: como o arco de uma volta inteira mede, em graus, $360°$, então podemos escrever que:

$$360° = 2\pi\,\mathrm{rad}$$

Dividindo os dois lados da igualdade por 2, teremos de forma mais simplificada que $180° = \pi\mathrm{rad}$. Podemos usar essa relação para poder ler a medida de qualquer arco em graus ou em radianos, convertendo de uma à outra sempre que necessário. Em particular, a medida em graus de um arco cujo comprimento é de $1\,\mathrm{rad}$ (um arco cujo comprimento é exatamente 1 raio) pode ser determinada dividindo-se ambos os termos na igualdade acima por π:

$$180° = \pi\,\mathrm{rad} \therefore \frac{180°}{\pi} = \frac{\pi}{\pi}\,\mathrm{rad} \therefore 1\,\mathrm{rad} = \frac{180°}{\pi}$$

É interessante observar que, ao tratar dessas duas unidades de medida, estamos percebendo duas características importantes do arco: a medida do ângulo central que o determina sobre a circunferência e a quantidade de vezes que o raio da circunferência cabe sobre aquele arco. Quando desejamos nos remeter à medida do arco correspondente ao ângulo central, a medida em graus é a mais esclarecedora; por outro lado, quando desejamos indicar quantos raios cabem no comprimento do arco, então a medida em radianos é a mais adequada. E note que podemos facilmente transitar de uma à outra a partir do uso da relação $180^\circ = \pi\,\mathrm{rad}$.

Para podermos ter uma boa ideia do que estamos tratando, vamos considerar dois relógios analógicos: o relógio de Meca, dito o maior do mundo, que tem 4 faces com 43 metros de diâmetro em cada face e um relógio de pulso comum, que tem em torno de 3 cm de diâmetro.

Figura 1.10: Fonte: Gigantes do Mundo

Figura 1.11: Fonte: Mercado Livre

Vamos considerar que os dois relógios estão marcando corretamente as horas, sem atrasar nem adiantar, e que ambos estejam marcando exatamente 3 h - ou seja, o ponteiro pequeno aponta para o número 3 e o ponteiro grande para o número 12. Vamos observar os arcos determinados nos dois relógios pelas semirretas que têm origem no centro dos relógios e que passam pelo 12 e pelo 3, respectivamente.

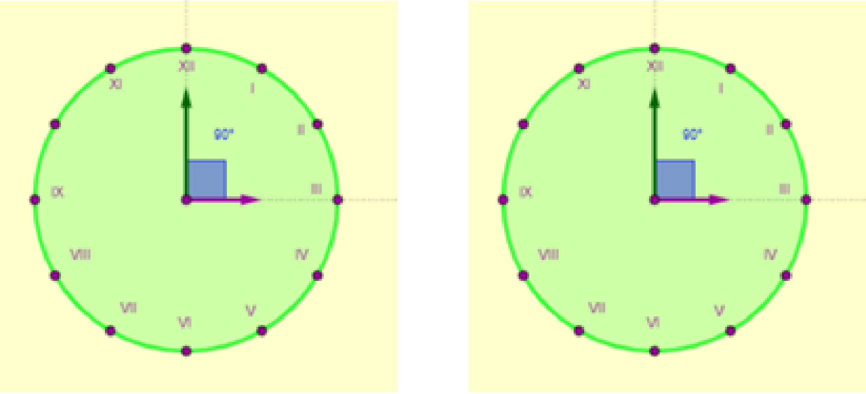


Figura 1.12: Disponível em: `https://www.geogebra.org/m/gTMSvJTB`

Nos dois relógios, a medida do arco de extremidades C e E tem a medida de $90°$ - essa é a medida angular desse arco, pois remete à medida do ângulo central de vértice D que mede também $90°$. Por outro lado, evidentemente, a medida do *comprimento* do arco de extremidades C e E é diferente nos dois relógios: no relógio de pulso, de diâmetro 3 cm (e raio $1{,}5$ cm), o comprimento desse arco será de $C = \frac{(2\cdot\pi\cdot 1{,}5}{4} = \frac{3}{4}\pi$ cm, ou seja, aproximadamente $2{,}35$ cm . Por outro lado, no relógio de Meca com 43 m de diâmetro, temos $21{,}5$ m $= 2150$ cm de raio e então o arco CE terá comprimento

$$C = \frac{2\cdot\pi\cdot 2.150}{4} = 1.075\pi \cong 3375{,}5 \text{ cm}.$$

Porém, a medida em radianos do arco CE em ambos os relógios será a mesma! Lembre-se: medir um arco em radianos significa que queremos saber quantas vezes o raio da circunferência cabe naquele arco. No relógio de pulso, a medida em radianos de CE será o quociente entre a medida do seu comprimento pelo raio da circunferência, isto é, $\frac{\frac{3}{4}\pi}{1{,}5} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$, enquanto que no relógio de Meca será $\frac{1.075\pi}{2.150} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$. Repare que, segundo a regra de conversão $108° = \pi\,\mathrm{rad}$, estabelecida entre graus e radianos dividindo ambos os lados da igualdade por 2, obtemos $90° = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$. Em particular, arcos correspondendo a ângulos retos medem $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$.

PRATICANDO O RADIANO

Medindo ângulos centrais em nosso planeta

Atividade 9

Um dos resultados mais fascinantes que já existiram na História da Matemática é decorrente do experimento realizado pelo matemático e astrônomo grego Eratóstenes. Estudando o comportamento das sombras de varetas nas cidades Alexandria e Syene (Assuã, nos dias atuais) ao meio dia, ele não só conseguiu perceber que a superfície da Terra não era plana como conseguiu calcular, com uma precisão surpreendente, o comprimento de uma volta completa ao redor da Terra!

Eratóstenes sabia que a distância entre as cidades de Alexandria e Syene era aproximadamente igual a 800 km. Percebeu também que ao meio dia, o sol estava a pino em Syene de forma que nesse horário, podia-se ver o sol completamente refletido no interior do poço. Além disso, às 12 h, nenhuma sombra era formada pelas colunas daquela cidade. O mesmo não ocorria em Alexandria: ao meio dia, uma vareta colocada de pé no chão apresentava uma sombra substancial e com ela, Eratóstenes conseguiu provar que o arco sobre a superfície da Terra, que compreende as cidades de Alexandria e Assuã media cerca de $\frac{\pi}{25}\,\mathrm{rad}$ $(7{,}2$ graus) e que corresponde ao ângulo central $\hat{A}$ da figura 1.13:

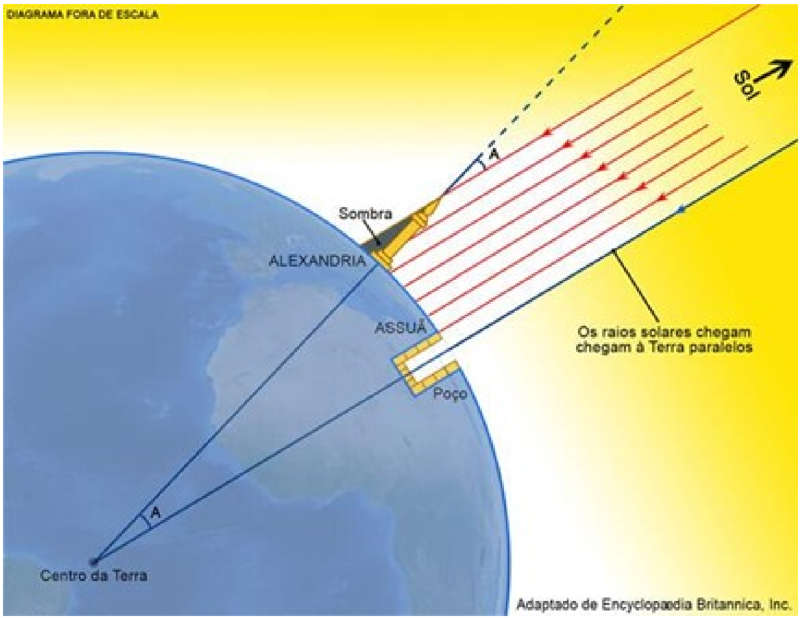


Figura 1.13: Costa, J. R. V. Eratóstenes e a circunferência da Terra. Astronomia no Zênite, jul 2000.

Eratóstenes utilizou a seguinte regra de três para calcular o comprimento de uma volta completa ao redor da Terra:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\pi}{25}\,\mathrm{rad} & \text{———} & 800\ \text{km} \\ 2\pi\,\mathrm{rad} & \text{———} & C \end{array}$$

Resolvendo a regra de três, obtemos $C = 40.000$ km. Utilizando instrumentos tecnológicos muito mais avançados dos quais dispunha Eratóstenes, hoje se sabe que o comprimento de uma volta completa na Terra é de 40.072 km, ou seja, o erro de cálculo do matemático grego foi de menos de 100 km! O vídeo a seguir, apresenta parte de um episódio famosa série Cosmos, e narra com mais detalhes a ideia do experimento de Eratóstenes.

Figura 1.14: Acesse pelo link: https://www.youtube.com/watch?v=fu9Z7YuXLVE

Vamos utilizar o raciocínio de Eratóstenes, com o auxílio do Google Earth para medir arcos em graus e radianos, limitados por duas cidades brasileiras! Baixe e instale no seu smartphone o aplicativo Google Earth.

a) Use a ferramenta medir para encontrar uma aproximação para distância, ao longo do globo terrestre, entre as capitais Rio de Janeiro e Belo Horizonte.

b) Usando o fato que uma volta completa na Terra tem 40.072 km, determine a medida aproximada do valor do arco (em radianos) sobre a superfície da Terra que liga as duas capitais do item a).

c) Reproduza os itens a) e b) para a cidade onde você mora e qualquer outra cidade de sua escolha no Brasil.

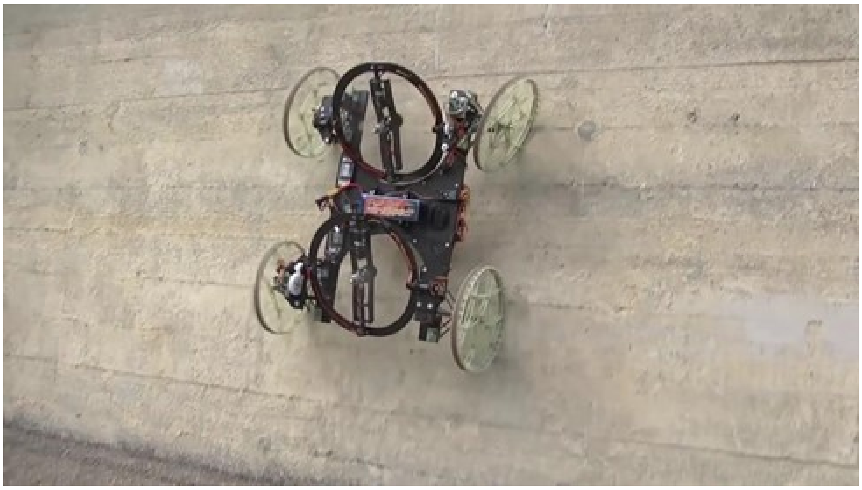
EXPLORANDO FUNÇÃO DE EULER

Carrinho VertiGo

Atividade 10

Pesquisadores da Disney Research, em parceria com o Instituto Federal de Tecnologia de Zurique, demonstraram esta semana um carrinho de quatro rodas capaz de escalar paredes e andar normalmente em superfícies verticais. À primeira vista, parece um brinquedo, mas, segundo os criadores, a tecnologia pode ampliar os limites de exploração para equipamentos robóticos. Batizado como VertiGo, o carrinho é "capaz de mover em uma parede rapidamente e com agilidade", informam os pesquisadores. Para realizar a façanha, ele possui duas hélices propulsoras móveis que fornecem o impulso necessário para o início da escalada e, depois, mantém o VertiGo junto à parede."

Fonte: Gizmodo



Neste link é possível ver o VertiGo em ação: `https://www.youtube.com/watch?v=KRYT2kYbgo4`

Suponha que foi colado um pequeno selo em uma das rodas do VertiGo. O carrinho começará a descer em um paredão vertical bem alto, seguindo um caminho reto e paralelo ao paredão. Ele começa o movimento "colado" ao paredão, quando o selo está em contato com o mesmo. Conforme o carrinho vai descendo, o selo se movimenta conforme o giro da roda. A figura abaixo ilustra o movimento realizado por essa roda ao descer o paredão e os pontos A_1, A_2 e A_3 ilustram posições do selo ao longo do movimento. Suponha que o raio da roda seja de 1 dm

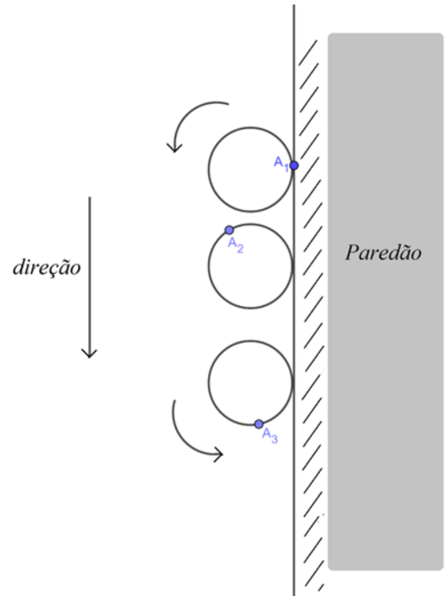


Figura 1.15: Fonte: Adaptado de Ekici (2010)

a) Indique a posição do selo na circunferência da roda quando o VertiGo tiver descido as seguinte distâncias:

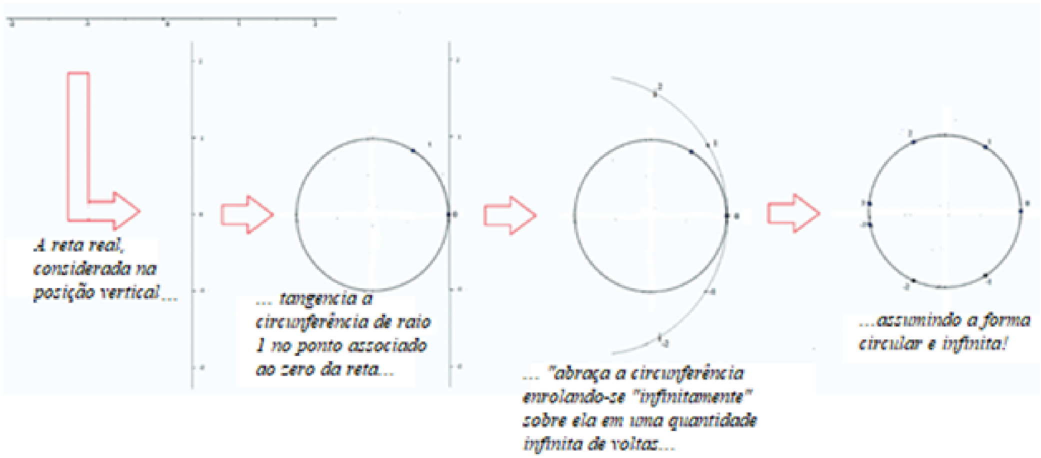
0 dm, 1 dm, 2 dm, $\frac{3}{2}$ dm, $\frac{\pi}{2}$ dm, π dm, 3π dm, 2π dm, 7 dm, 4 dm

b) Suponha que, do ponto de repouso do VertiGo, agora ele irá **subir** parte do paredão. Usando a mesma vista lateral dada pela figura 1.15, qual será a posição do sela para as mesmas medidas do item a)?

"Abraçando" um círculo com uma reta

Atividade 11

Observe a imagem a seguir e responda às perguntas:



a) Quantos pontos da circunferência estarão “cobertos” pelo número real 1?

b) A cada ponto da circunferência, quantos números reais ficam associados?

c) Considerando o ponto A na circunferência sobre o qual encontra-se o número real 1. Qual o próximo número real positivo que também estará localizado em A? E qual será o primeiro número negativo associado a A?

d) Se reproduzimos a construção exibida acima usando, em lugar da reta real, o intervalo $[-5,5]$ em uma circunferência de raio 2, tangenciando esta circunferência no ponto 0 do intervalo, qual será a medida do menor arco encontrado entre os pontos da circunferência associados a -5 e 5?

ORGANIZANDO FUNÇÃO DE EULER

Nas atividades *Carrinho VertiGo* e *"Abraçando" um círculo com uma reta* você aprendeu que é possível associar números reais a pontos de uma circunferência de raio 1. Considere que no plano tem-se um sistema de coordenadas cartesianas, no qual C^1 representa a circunferência de centro na origem e raio 1. Repare que $A=(1,0)\in C^1$ pois esse ponto tem distância 1 para a origem. A *Função de Euler*, que será denotada pela letra E, é uma ferramenta matemática que permite corresponder formalmente qualquer número real a um ponto de C^1. Definimos $E:R\to C^1$, da seguinte maneira: dado qualquer número real $t>0$, construiremos um arco de comprimento $|t|$ na circunferência C^1, com uma de suas extremidades no ponto A e a outra extremidade num ponto $E(t)$ percorrendo C^1 no sentido contrário aos ponteiros do relógio (anti-horário). Se $t<0$ fazemos o mesmo procedimento, porém percorrendo a circunferência em sentido horário. Finalmente, se $t=0$, definimos $E(0)=A$.

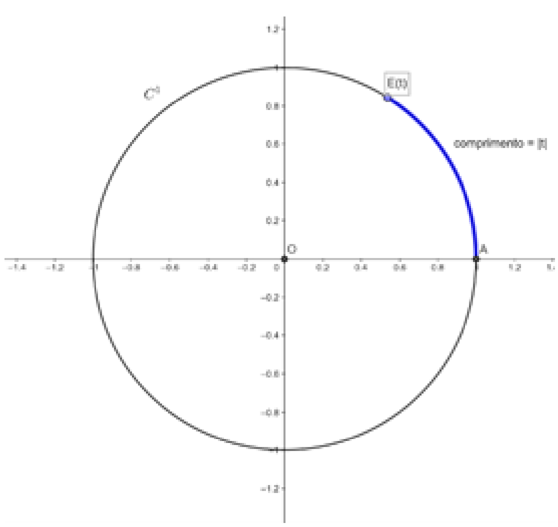


Figura 1.16: $E(t)$ para $t>0$

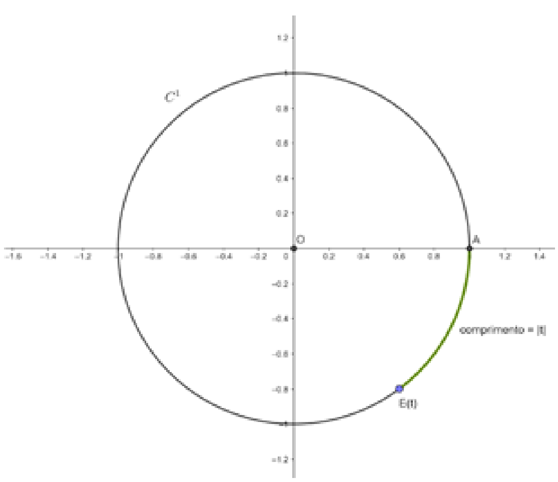


Figura 1.17: $E(t)$ para t<0

Repare que eventualmente, o valor de $|t|$ pode ser maior que a medida do comprimento da circunferência C^1 . Se isto ocorrer, o arco de extremidades A e $E(t)$ será construído de forma que se percorrerá a linha da circunferência dando mais que uma volta em torno da origem do plano cartesiano: por exemplo, se $t = -4\pi$, então, como C^1 tem comprimento $2\pi \cdot 1 = 2\pi$, $E(t)$ será obtido construindo um arco partindo de A e fazendo-se um percurso de $|-4\pi| = 4\pi$ unidades ao longo de C^1 no sentido horário, o que corresponde exatamente a dar umas voltas completas na circunferência, finalizando o percurso em A. Logo, $E(-4\pi) = A$. Por outro lado, para encontrar $E(7\pi)$, começamos percorrendo 7π unidades de comprimento ao longo de C^1 , mas agora em sentido anti-horário. O percurso termina no ponto $(-1, 0)$ pois $7\pi = 3 \cdot (2\pi) + \pi$, o que corresponde a dar 3 voltas em C^1 a partir de A no sentido anti-horário e depois percorrer mais meia volta. Logo, $E(7\pi) = (-1, 0)$.

A dinâmica do cálculo de imagens pela Função de Euler motiva a definição do **círculo (ou ciclo) trigonométrico** que consiste essencialmente em três ingredientes: circunferência de raio unitário, sistema de eixos cartesianos e orientação. Vamos falar um pouco sobre cada um deles.

Circunferência de raio unitário

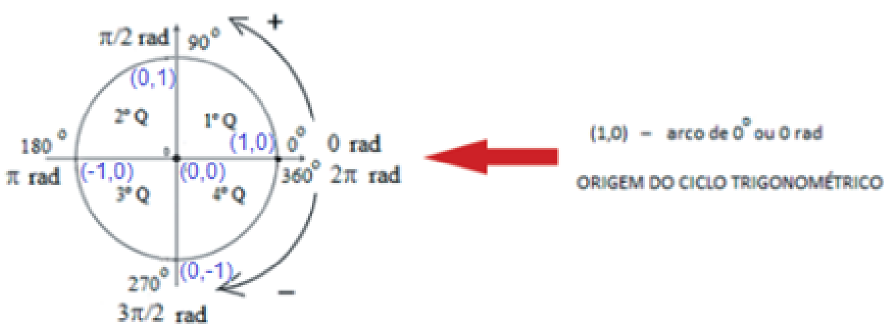
Vimos na seção "O radiano" que a medida de um arco em radianos indica a quantidade de vezes que o raio da circunferência na qual o arco está contido "cabe" sobre esse arco, ou seja, a medida angular do arco é o resultado da razão entre o comprimento do arco e o raio da circunferência que contém esse arco. Lembre-se que a medida em radianos de um arco em uma circunferência é calculada através do quociente entre o comprimento do arco e o raio. Esse cálculo fica mais fácil quando o raio mede 1 unidade, o que nos dá uma equivalência direta entre C^1 o comprimento do arco e a medida angular em radianos desse arco. Então, considerar arcos em uma circunferência de raio unitário traz a vantagem de termos medidas de mesmo valor para as medidas angular (relacionada ao ângulo central, à abertura do arco) e linear (relacionada ao comprimento do arco).

Sistema de eixos cartesianos

O sistema de eixos cartesianos é o sistema com um par de retas perpendiculares orientadas e graduadas, em cuja interseção se localiza o ponto de coordenadas $(0, 0)$, denominado *origem do sistema de eixos cartesianos*. A associação entre o sistema de eixos cartesianos e a circunferência de raio unitário nos possibilitará associar coordenadas aos pontos sobre a circunferência.

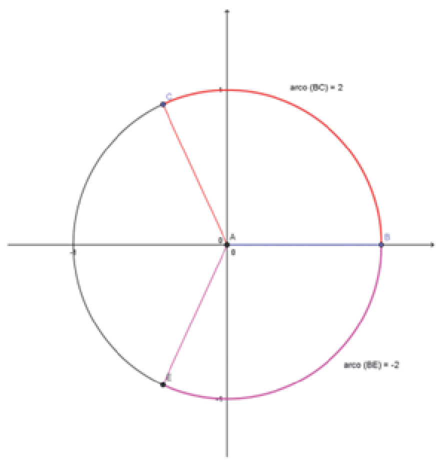
Orientação

A circunferência que representa o círculo trigonométrico é orientada, o que indica que há um ponto tomado como origem e uma orientação que atribui um sentido positivo (sentido anti-horário) e um sentido negativo (sentido horário) para os arcos tomados sobre essa circunferência. A seguir podemos ver uma imagem que representa o círculo trigonométrico e seus pontos notáveis.



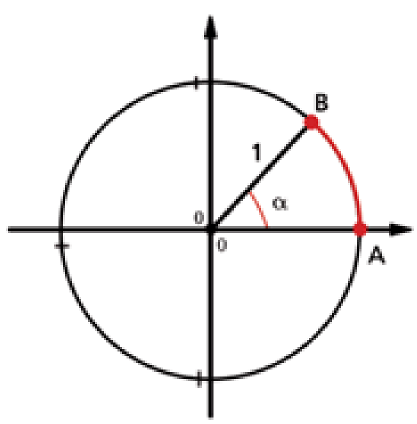
A partir do momento em que conseguimos associar comprimentos com arcos no círculo trigonométrico, já podemos pensar em associar números reais ao círculo trigonométrico. Um arco de comprimento 2, por exemplo, seria um arco de $2\,\mathrm{rad}$ — mas onde ele começa? Onde acaba? E o arco de $-2\,\mathrm{rad}$, onde o marcamos?

Determinar a origem do círculo trigonométrico como sendo o ponto $(1, 0)$ e estabelecer o sentido positivo como o anti-horário e negativo como o horário torna essa missão mais simples. Um arco de $2\,\mathrm{rad}$ tem origem em $(1, 0)$ e estende-se por um comprimento igual a 2 unidades no sentido anti-horário. E o arco de $-2\,\mathrm{rad}$? Esse arco também tem origem em $(1, 0)$, mas estende-se com comprimento 2, mas no sentido horário do círculo, pois é negativo. Na figura a seguir vemos esses arcos.



Por sua vez, o número zero será associado a um "arco" que consiste em um único ponto, a saber, a origem $(1, 0)$ do círculo trigonométrico.

Vamos generalizar essas ideias? Na figura a seguir, o ângulo $B\hat{O}A$ tem medida α, em graus. A *medida* do arco AB será $\frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi\,\mathrm{rad}$. A razão $\frac{\alpha}{360°}$ indica que parte da circunferência inteira (de comprimento 2π pois o raio é 1) é ocupada pelo arco AB. Se α é dado em radianos, então a medida do arco AB será, da mesma forma que vimos acima, $\frac{\alpha}{2\pi} \cdot 2\pi\,\mathrm{rad}$, ou seja, é α.



Por essa razão é tão interessante usar a unidade radianos para medir arcos e ângulos em trigonometria: esta unidade é flexível e pode ser entendida tanto como medida angular quanto como medida linear.

Arcos Côngruos

Agora vamos pensar em outra questão: qual é o maior arco que pode ser tomado no círculo trigonométrico? E qual é o menor? Eles existem? A resposta é **não**. Basta considerarmos que um arco pode dar um número arbitrário de voltas em torno do círculo trigonométrico, gerando o que chamamos de *arcos côngruos*, ou seja, arcos que têm a mesma origem e a mesma extremidade, mas que diferem pelo número de voltas inteiras dadas no círculo trigonométrico.

Considere, como exemplo, um arco AB de medida $\frac{\pi}{6}$ rad, por exemplo, e outro arco AC de medida $\frac{13\pi}{6}$ rad. Como,

$$\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi,$$

então temos que o arco AC tem a mesma extremidade do arco AB, ou seja, os pontos B e C são coincidentes. Geometricamente, o arco orientado AC é construído traçando o arco AB e em seguida, a partir de B, se dá uma volta completa no círculo no sentido positivo, de forma que C coincida com o ponto B. Arcos que têm esta característica são aqueles que chamamos de arcos côngruos. Outros arcos côngruos ao arco AB seriam $\frac{25\pi}{6}$ rad (2 voltas inteiras e mais $\frac{1}{12}$ de volta, no sentido positivo), $\frac{11\pi}{6}$ rad ($\frac{11}{12}$ de volta no sentido negativo) ou ainda $-\frac{23\pi}{6}$ rad (uma volta inteira e mais $\frac{1}{12}$ de volta no sentido negativo), entre *infinitas* outras possibilidades.

Para um arco AB medindo x rad, a *expressão geral da medida de um arco côngruo* a AB, é dada por, $x + 2k\pi$ onde k é um número inteiro. Quando dois arcos de medidas x e y são côngruos, escrevemos $x \equiv y$. Então, segundo essa notação, temos $x \equiv x + 2k\pi$. Se a medida x do arco AB for feita em graus ao invés de radianos, teremos que todos os arcos côngruos a AB terão medida em graus dadas por $x + 360° \cdot k$ com k inteiro. A menor medida x de um arco côngruo a AB (em graus ou radianos) positivo, será chamada de *menor determinação* positiva do arco AB (ou *primeira determinação* positiva).

PRATICANDO FUNÇÃO DE EULER

Círculo trigonométrico no GeoGebra

Atividade 12

Abra uma tela nova no GeoGebra e exiba os eixos coordenados. Construa os pontos $A(0, 0)$ e $B(1, 0)$ e construa o círculo de centro A que passa por B.

a) Qual o raio dessa circunferência?

b) Quais os pontos de interseção entre a circunferência e os eixos coordenados? Quanto mede cada um dos arcos compreendidos entre esses pontos?

c) Os pontos que se localizam na circunferência cujas coordenadas são positivas são pontos que estão no 1^o quadrante. Faça uma figura indicando onde estão esses pontos. Da mesma forma, indique onde se localizam os que estão no 2^o quadrante (abscissa negativa e ordenada positiva), no 3^o quadrante (coordenadas negativas) e no 4^o quadrante (abscissa positiva e ordenada negativa).

d) Considere a reta real "enrolada" na circunferência conforme vimos no exercício anterior, com a mesma unidade dos eixos coordenados. Em que quadrante fica o número real 1? E o número real -1? E o número real π? E o número real $\sqrt{2}$?

e) Marque um ponto C sobre a circunferência de forma que o ângulo $B\hat{A}C$ meça $60°$. Que número real está associado ao ponto C?

Quantas voltas tem o arco e qual é o seu quadrante?

Atividade 13

Considerando os quadrantes no círculo trigonométrico, indique em qual quadrante se localiza a extremidade de cada arco indicado a seguir. Informe também qual o número de voltas completas em torno do círculo é possível se dar com cada um desses arcos.

a) $8{,}5\,\text{rad}$

b) $-1{,}37\,\text{rad}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}\,\text{rad}$

d) $-0{,}03\,\text{rad}$

e) $17\dfrac{3}{5}\,\text{rad}$

f) $-20{,}42\,\text{rad}$

Marcando ângulos no círulo trigonométrico

Atividade 14

Dê a menor determinação positiva dos arcos a seguir e indique sua expressão geral dos arcos.

a) $1047°$

b) $327\pi\,\text{rad}$

c) $247\,\text{rad}$

d) $247°$

e) $247\pi\,\text{rad}$

f) $-1032\,\text{rad}$

EXPLORANDO SENO E COSSENO DE UM NÚMERO REAL

Retornando à Roda Gigante Rio Star

Atividade 15

Na atividade *Rio Star* você analisou alguns aspectos da função $h = h(t)$ que descrevia a altura da cabine da roda gigante em função do tempo. Aqui completaremos essa análise.

a) Use a figura a seguir e os conceitos de cosseno (ou seno) para determinar a altura da cabine em relação ao chão, em função do ângulo formado entre um segmento vertical que une o centro da roda gigante ao solo e o segmento de reta que une o centro à cabine;

b) gora, encontre uma função que relacione o ângulo da questão anterior com o tempo, usando os valores determinados na atividade Rio Star;

c) Finalmente, usando as informações dos itens **a)** e **b)** para encontrar uma fórmula para $h(t)$ quando $0 < t < 9$.

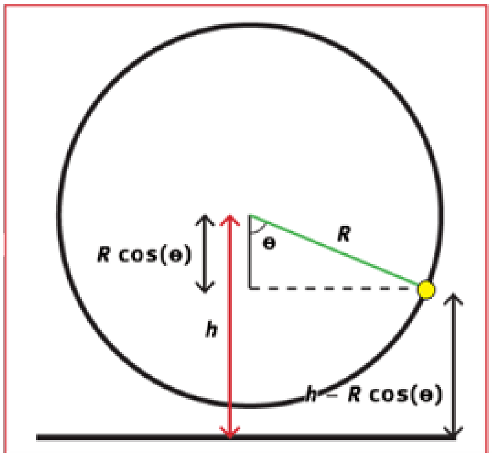


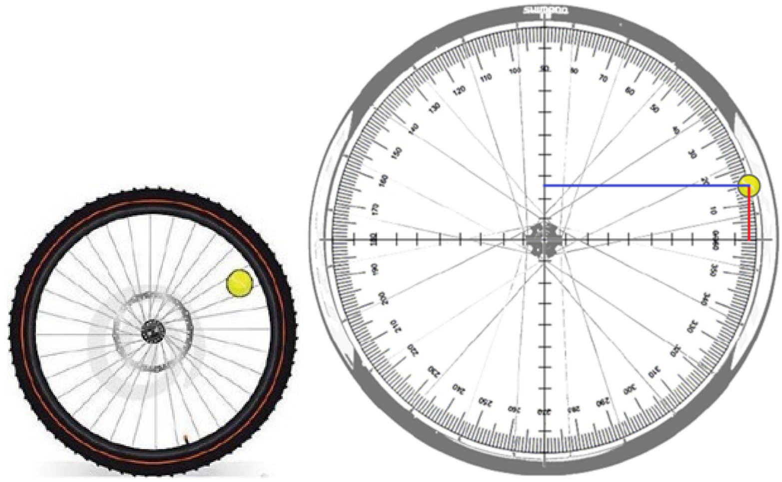
Figura 1.18: Fonte: Soares (2010)

Bolinha na roda da bibicleta

Atividade 16

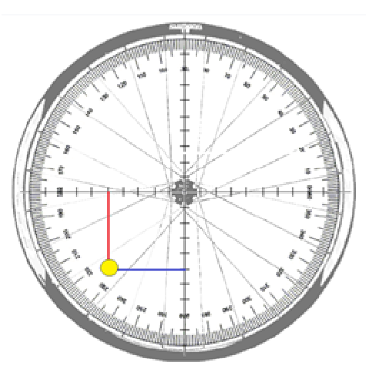
(Adaptado de Costa (2017))

Mateus gosta muito de andar de bicicleta e para enfeitar suas rodas, costuma prender bolinhas de tênis nelas (vide figura). Suponha que ele virou a bicicleta de cabeça para baixo, prendeu a bolinha e começou a girar a roda. Na figura a seguir, a imagem à direita ilustra uma representação da roda destacando eixos coordenados e ângulos em graus.



A roda da direita tem um transferidor de volta inteira sobreposto a sua imagem, de forma que é possível verificar a medida do ângulo entre o eixo horizontal e o raio da roda que passa pela bolinha.

Considere que r é o raio da roda, c é o comprimento do segmento horizontal azul (distância da bolinha amarela ao eixo y) e s é o comprimento do segmento vertical vermelho (distância da bolinha amarela ao eixo x). A razão $\frac{c}{r}$ indica a distância horizontal relativa entre a bolinha amarela e o eixo y, assim como a razão $\frac{s}{r}$ indica a distância vertical relativa entre a bolinha amarela e o eixo x. Por exemplo, se a roda tem raio de 30 cm e a bolinha estiver localizada a 27 cm do eixo vertical, então $\frac{c}{r}$ é $\frac{27}{30}$, ou seja, $\frac{9}{10}$. Dessa forma, para quaisquer outras rodas de bicicleta com outros raios, quando o ângulo entre o eixo horizontal e o raio que passa pela bolinha amarela for o mesmo em que é nessa situação, estamos aptos a determinar essa distância, fundamentados na semelhança de triângulos: em uma roda com 20 cm de raio, essa distância seria $\frac{9}{10}$ de 20, ou seja, 18 cm. Da mesma forma se dá para a distância relativa vertical. Observe ainda que essa "distância relativa" pode ser ainda negativa ou positiva, de acordo com a orientação dos eixos coordenados.



Por exemplo, na figura ao lado, tanto c quanto s valem 5, mas estão no sentido negativo de seus respectivos eixos, portanto, ao calcularmos as distâncias relativas teremos $\frac{c}{r} = \frac{s}{r} = \frac{-5}{10} = \frac{-1}{2}$.

Nas tabelas a seguir, temos algumas possíveis posições para a bolinha e os ângulos associados a elas, medidos em graus. Para completar essa tabela, você precisará informar, a cada ângulo dado:

- A medida do arco, em radianos, associado ao ângulo dado;
- A razão $\frac{c}{r}$ e o seu sinal, de acordo com a orientação no eixo x;
- A razão $\frac{s}{r}$ e o seu sinal, de acordo com a orientação no eixo y.

Vamos lá?

a)

Ângulo (grau)	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$
Arco (radiano)	$\frac{\pi}{12}$					
$\frac{c}{r}$	0,96					
$\frac{s}{r}$	0,26					

b)

Ângulo (grau)	$105°$	$120°$	$135°$	$150°$	$165°$	$180°$
Arco (radiano)						
$\frac{c}{r}$						
$\frac{s}{r}$						

c)

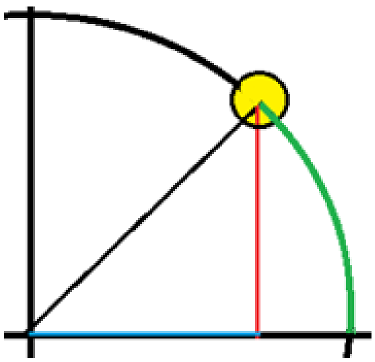
Ângulo (grau)	$195°$	$210°$	$225°$	$240°$	$255°$	$270°$
Arco (radiano)						
$\frac{c}{r}$						
$\frac{s}{r}$						

d)

Ângulo (grau)	$285°$	$300°$	$315°$	$330°$	$345°$	$360°$
Arco (radiano)						2π
$\frac{c}{r}$						
$\frac{s}{r}$						

ORGANIZANDO SENO E COSSENO DE UM NÚMERO REAL

Na atividade *Bolinha na roda da bicicleta* temos, a cada instante, um triângulo, confome a figura a seguir:



Ainda na atividade anterior, você mediu os comprimentos dos segmentos azul e vermelho. O arco verde representa a trajetória da bola amarela. Considerando que as razões $\frac{c}{r}$ e $\frac{s}{r}$ nos retornam proporções que nos permitem considerar comprimentos em um círculo de raio unitário, o arco verde, medido em radianos, é determinado pelo ângulo, medido em graus, referente ao vértice desse triângulo que está sobre a origem do plano cartesiano.

A roda pode girar indefinidamente; assim, o arco verde pode atingir qualquer número real na circunferência orientada, assumindo-se valores positivos para quando a roda girar no sentido anti-horário e negativos quando ela girar no sentindo horário. Dessa forma, podemos associar a qualquer número real uma projeção horizontal (segmento azul) e uma projeção vertical (segmento vermelho). Considerando ainda o triângulo da figura anterior, temos que os segmentos azul e vermelho são, respectivamente, o cosseno e o seno desse ângulo (que está medido em radianos, pelo comprimento do arco verde). Assim, se t é o comprimento do arco verde, temos que o comprimento do segmento azul e vermelho são, respectivamente $\cos(t)$ e $\operatorname{sen}(t)$. Mais do que isso, observe que o segmento azul, a distância horizontal, equivale à abscissa da extremidade do arco verde, assim como o segmento vermelho corresponde à ordenada da extremidade desse mesmo arco.

Quando nos referimos aos segmentos azul e vermelho, a palavra medir é um abuso de linguagem. O que estamos de fato verificando são as coordenadas x e y do ponto representado pela bolinha amarela no plano cartesiano, que serão dadas respectivamente por $\cos(t)$ e $\operatorname{sen}(t)$. Em outras palavras, $\cos(t)$ e $\operatorname{sen}(t)$ são as **coordenadas x e y do ponto** $E(t)$, ou seja, da função de Euler aplicada no número real t.

Vamos ver agora o comportamento das funções que associam comprimentos de arcos em um círculo trigonométrico com as coordenadas do ponto localizado na extremidade desse arco: as funções cosseno (associa o comprimento do arco com a abscissa de sua extremidade) e seno (associa o comprimento do arco com a ordenada de sua extremidade).

EXPLORANDO FUNÇÕES SENO E COSSENO

Seno e cosseno no GeoGebra

Atividade 17

Abra uma tela no GeoGebra (versão smartphone Classic ou versão computador Classic). Siga os passos orientados a seguir.

a) Construa os pontos $A(0,0)$ e $B(1,0)$ e a circunferência de centro A que passa por B.

b) Tome um ponto C qualquer (ponto em objeto) na circunferência.

c) Trace as perpendiculares por C a Ox e a Oy, que encontrarão os eixos respectivamente nos pontos D e E (automaticamente denominados pelo GeoGebra).

d) Construa os segmentos AD e AE --- o GeoGebra os nomeará automaticamente por h e i.

e) Construa o arco circular de centro A e extremidades B e C, nessa ordem. O GeoGebra o denominará como d.

f) Construa os pontos $F=(d,x(C))$ e $G=(d,y(C))$.

g) Movimente o ponto C e observe o caminho percorrido por F e por G.

h) Habilite o rastro de F e G e movimente C.

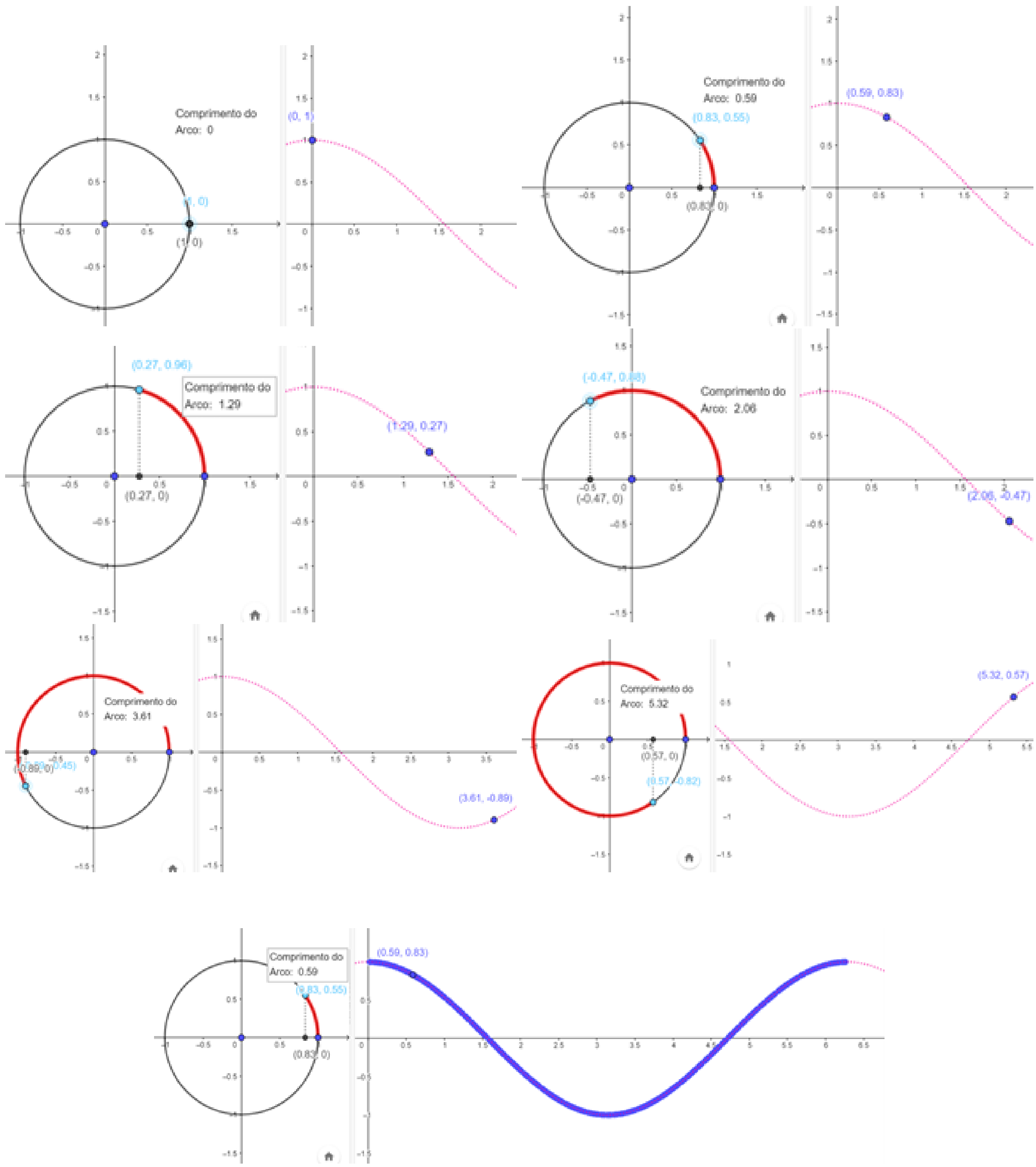
i) Descreva o caminho percorrido por F e G.

Obs.: a construção descrita está disponível no link `https://www.geogebra.org/m/ze5k6ur9`.

ORGANIZANDO FUNÇÕES SENO E COSSENO

A Função Cosseno

Vimos anteriormente que podemos calcular o cosseno de qualquer número real. A função cosseno, definida por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$ é a função que associa a cada número real x localizado sobre o círculo trigonométrico à abscissa da extremidade do arco que tem comprimento $|x|$ e origem no ponto $(1, 0)$, percorrido no sentido anti-horário, se $x > 0$ e percorrido no sentido horário, se $x < 0$. A seguir estão ilustradas a representação do arco e do seu cosseno no círculo trigonométrico para diversos arcos, bem como o ponto da função cosseno, no plano cartesiano, associado a esse arco.



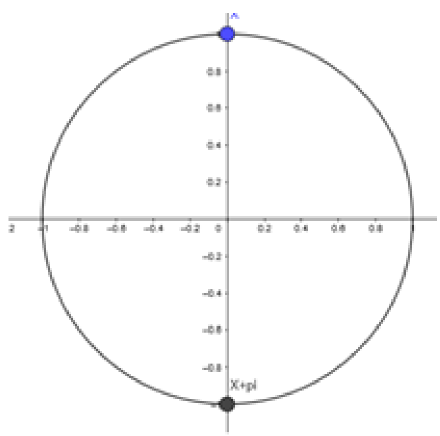
Obs.: As imagens anteriores foram geradas com o ambiente GeoGebra. A construção está disponível em `https://www.geogebra.org/classic/qks6uzqv`. A última imagem apresenta o conjunto de todos os possíveis pontos obtidos no plano cartesiano para a primeira volta no círculo trigonométrico (no sentido anti-horário).

Conforme podemos observar, o conjunto imagem dessa função é formado por todos os valores possíveis que o cosseno pode assumir. Relembrando a atividade da bolinha na bicicleta, percebemos que o cosseno é a abscissa do ponto do plano cartesiano associado à bolinha amarela. Como a circunferência tem raio 1, essa projeção assume todos os valores entre -1 e 1, portanto o conjunto imagem de f é $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$.

Periodicidade da Função Cosseno

Voltando à atividade da bolinha na roda, se essa bolinha descreveu um arco de comprimento $|a|$, ela está em uma determinada posição. Se, após isso, ela percorrer mais um arco de comprimento 2π, a bolinha estará novamente na mesma posição. Isso significa que $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$. Observe que isso é verdadeiro para qualquer valor de x, o que indica que essa é uma função periódica. Mas qual será o seu período? Já temos que 2π é um candidato a período, mas será que ele é mesmo um período? Será que existe $p < 2\pi$ tal que $\cos(x) = \cos(x+p)$ para qualquer valor de x?

Para verificarmos isso, vamos tomar inicialmente $x = \frac{\pi}{2}$. Nesse caso, se considerarmos o círculo trigonométrico no plano cartesiano, a bolinha estaria na posição $(0, 1)$ e, portanto, $\cos(x) = 0$. Estamos procurando um valor $p < 2\pi$ tal que $\cos(\frac{\pi}{2} + p) = 0$.



Olhando novamente para o círculo, vemos que, antes de dar uma volta completa, o próximo arco cujo cosseno é 0 é o arco de comprimento $\frac{3\pi}{2}$. Assim, temos

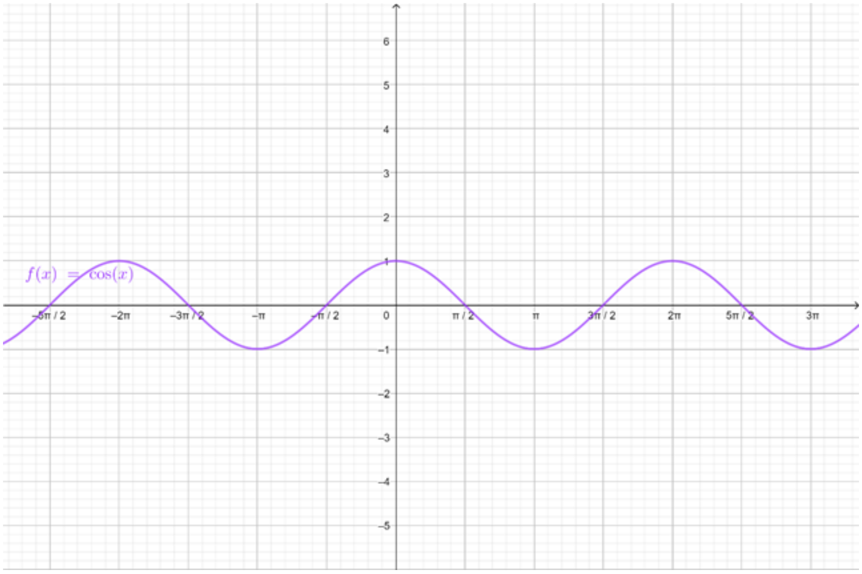
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)$$

Como no intervalo aberto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ não há outro arco cujo cosseno seja nulo, temos que π é nosso último candidato a período. Se mostrarmos que ele não pode ser um período, teremos que 2π será o menor valor para o qual ocorrem as primeiras repetições, ou seja, que 2π é o período dessa função.

Considere então $x = 0$; assim, temos que $\cos(0) = 1$, mas $\cos(0 + \pi) = \cos(\pi) = -1$, ou seja, π não satisfaz a condição de período. Isso significa que a função $f(x) = cos(x)$ é periódica com período 2π.

Gráfico da função cosseno

Vimos anteriormente que o gráfico de uma função periódica pode ser obtido pela repetição de cópias de uma fatia do gráfico dessa função de largura igual ao período dessa função. Acabamos de ver também que a função $f(x) = \cos(x)$ é periódica, de período igual a 2π. Então, para construir o gráfico dessa função, basta que analisemos o comportamento dela num intervalo do tipo $(x, x + 2\pi)$ e repetir o gráfico encontrado, unindo-os. Dessa forma, obtemos a seguinte curva:

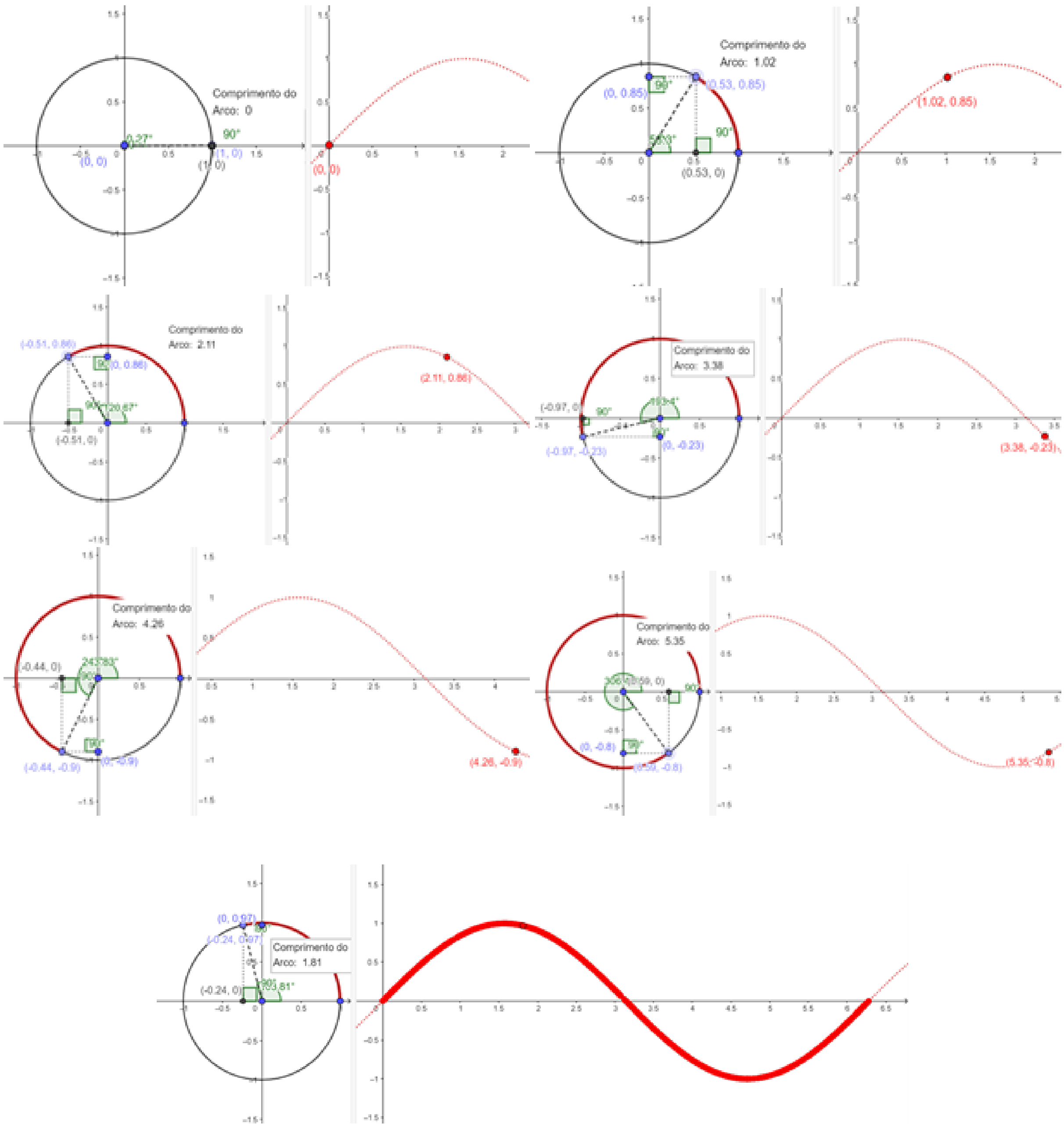


Observando o gráfico e as características dess função, podemos destacar algumas propriedades:

- Domínio: $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}$
- Contradomínio: $\mathrm{CD}(f) = \mathbb{R}$
- Imagem: $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$
- Período: $p = 2\pi$
- Amplitude: $\dfrac{|-1-1|}{2} = 1$

A Função Seno

Vimos anteriormente que podemos calcular o cosseno de qualquer número real. A função seno, definida por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, é a função que associa a cada número real x localizado sobre o círculo trigonométrico à ordenada da extremidade do arco de comprimento $|x|$ e origem no ponto $(1, 0)$, percorrido no sentido anti-horário, se $x > 0$ e percorrido no sentido horário, se $x < 0$. A seguir estão ilustradas a representação do arco e do seu seno no círculo trigonométrico para diversos arcos, bem como o ponto da função seno, no plano cartesiano, associado a esse arco.

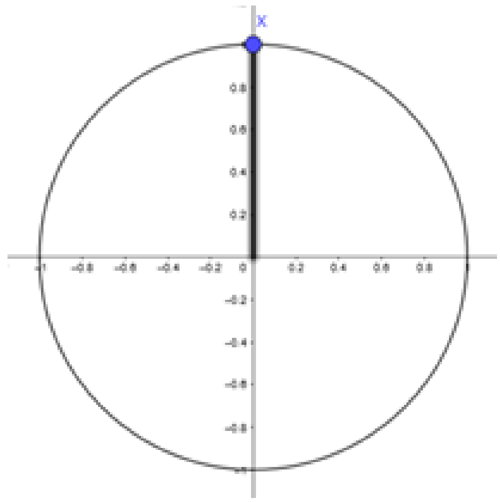


Obs.: As imagens anteriores também foram geradas com o ambiente GeoGebra. A construção está disponível em `https://www.geogebra.org/classic/nxmxxhqd` (onde é possível se desenhar simultaneamente o gráfico do seno e do cosseno). A última imagem apresenta o conjunto de todos os possíveis pontos obtidos no plano cartesiano para a primeira volta no círculo trigonométrico (no sentido anti-horário).

Conforme podemos observar, o conjunto imagem dessa função é formado por todos os valores possíveis que o seno pode assumir. Relembrando a atividade da bolinha na bicicleta, percebemos que o seno é a ordenada do ponto do plano cartesiano associado à bolinha amarela. Como a circunferência tem raio 1, essa projeção assume todos os valores entre -1 e 1, portanto o conjunto imagem de f é $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$.

Periodicidade

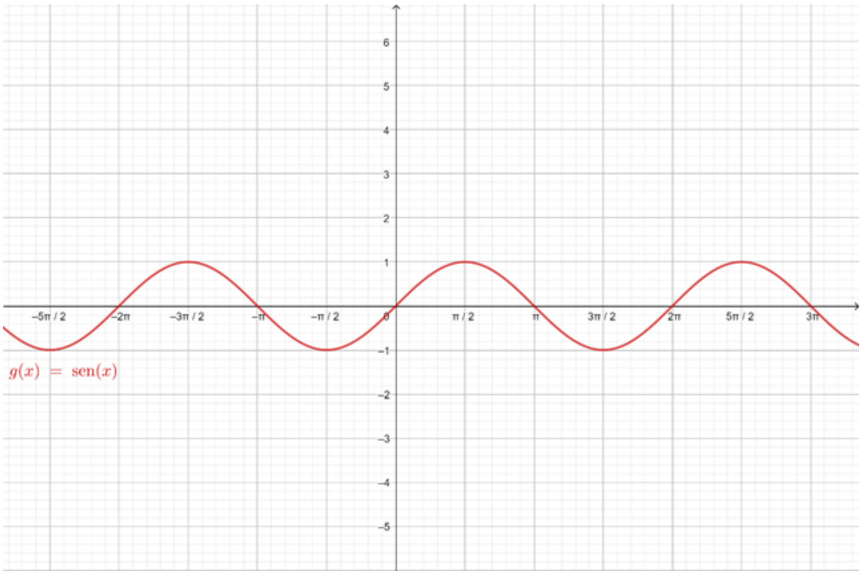
Vamos retomar a atividade da bolinha na roda e lembrar que uma bolinha que tenha percorrido dois arcos de comprimentos x e $x + 2\pi$ estão no mesmo lugar. Já sabemos, a partir daí, que $\mathrm{sen}(x) = \mathrm{sen}(x+2\pi)$. Isso já nos dá que a função seno é periódica e que 2π é um bom candidato a período. Mas novamente precisamos verificar se esse é o menor valor a partir do qual se iniciam as repetições. Considere inicialmente um arco de comprimento $x = \frac{\pi}{2}$. Fazendo a projeção no eixo vertical do segmento de reta que une o centro da circunferência e a bolinha que descreveu esse arco, temos que essa projeção assume o valor 1 e, portanto, $\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$.



Quando, a partir do arco $\frac{\pi}{2}$, se descreve uma volta completa, ou seja, um arco de comprimento total $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$, a projeção não assume mais o valor 1 — a imagem chega até -1, o que ocorre quando o arco atinge $\frac{3\pi}{2}$. Isso mostra que2πé o menor valor positivo de p tal que $\mathrm{sen}(x) = \mathrm{sen}(x + p)$; portanto, assim como na função cosseno, a função seno também é periódica com período igual a 2π

Gráfico da função seno

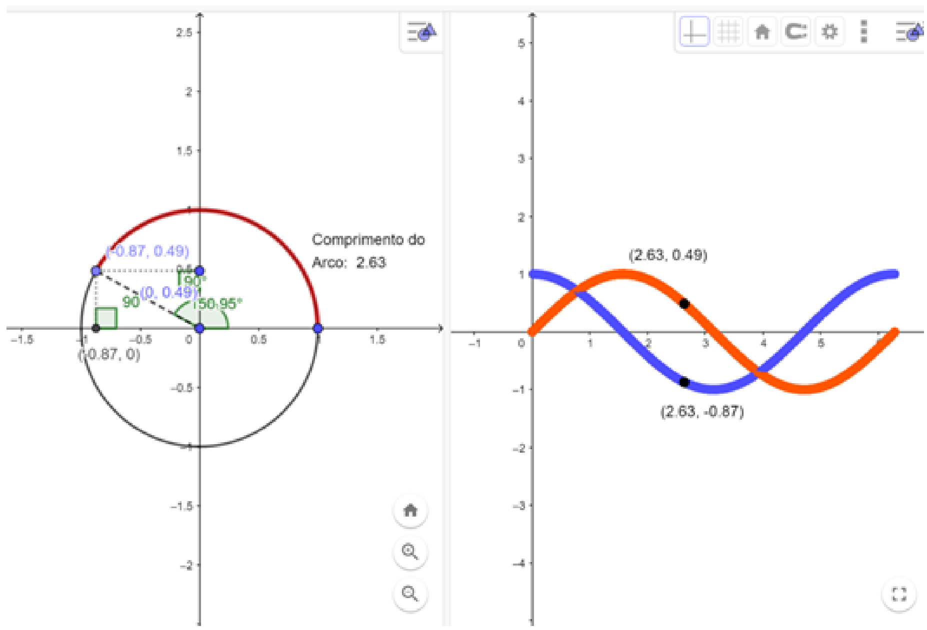
Conforme verificamos com a função cosseno, sendo a função seno também uma função periódica de período igual a 2π,seu gráfico será obtido pela repetição de um trecho largura igual ao período dessa função. Portanto, para construir o gráfico dessa função basta que analisemos o comportamento dela num intervalo do tipo $(x, x + 2)$ e repetir o gráfico encontrado, unindo-os. Dessa forma, obtemos a seguinte curva:



Observando o gráfico e as características dessa função, podemos destacar algumas propriedades:

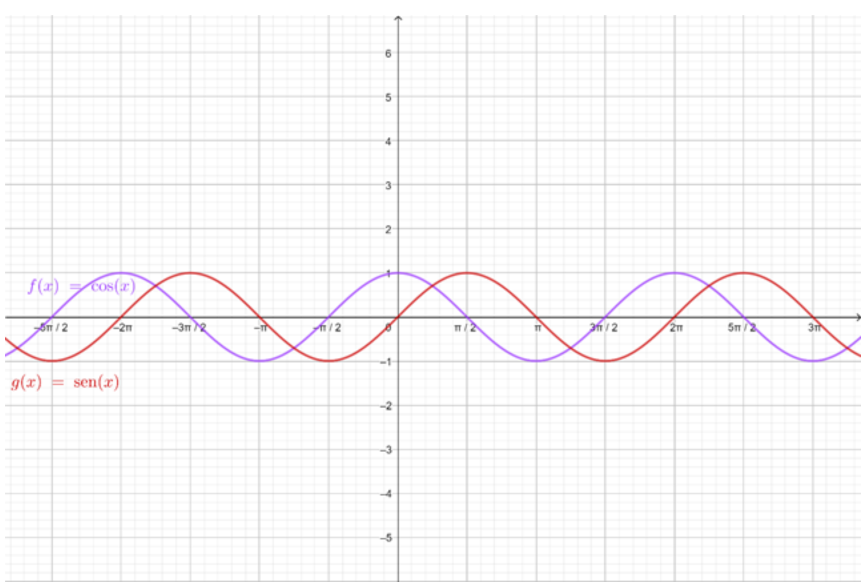
- Domínio: $\text{D}(f) = \mathbb{R}$
- Contradomínio: $\text{CD}(f) = \mathbb{R}$
- Imagem: $\text{Im}(f) = [-1, 1]$
- Período: $p = 2\pi$
- Amplitude: $\dfrac{|-1-1|}{2} = 1$

Comparando os gráficos da função cosseno e da função seno



A imagem anterior ilustra um período do comportamento das funções seno e cosseno pensadas em um mesmo sistema de eixos coordenador, associados ao círculo trigonométrico. O percurso descrito pelos pontos na área gráfica à direita (vermelho para seno, azul para cosseno) indicam um período para cada uma dessas funções. Como são periódicas de período $p = 2\pi$, as duas curvas seguirão reproduzindo esses trechos infinitamente para a esquerda e para a direita.

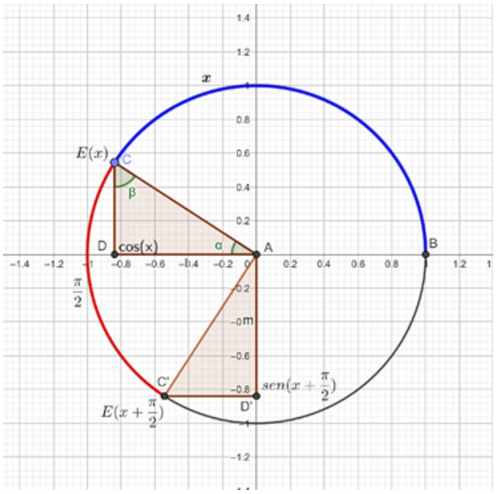
Note como os gráficos de $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = \text{sen}(x)$ são parecidos! Veja na figura abaixo, na qual os gráficos das duas funções aparecem esboçados em um mesmo sistema de eixos cartesianos:



Visualmente, é possível intuir que o gráfico da função cosseno é obtido deslocando o gráfico da função seno exatamente $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda. Algebricamente, esta informação pode ser traduzida através da seguinte identidade trigonométrica:

$$\cos(x) = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Podemos justificar esta identidade analisando o círculo trigonométrico. Na figura abaixo, o arco BC mede x radianos enquanto o arco BC' mede $x + \frac{\pi}{2}$ radianos.



O ponto D é a projeção do ponto C sobre o eixo x, portanto, $D = (\cos(x), 0)$. Já a ponto D' é a projeção do ponto C' no eixo y, portanto, $D' = (0, \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}))$. Denotando por α e β os ângulos $C\hat{A}D$ e $A\hat{C}D$ do triângulo retângulo ACD, como soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$ temos que $\alpha + \beta = 90°$. Como o ângulo $C\hat{A}C'$ é reto e $C\hat{A}D = \alpha$, e concluímos que $D\hat{A}C' = \beta$, mas como $D\hat{A}D'$ também é reto, obtemos que $C'\hat{A}D' = \alpha$ e $A\hat{C}'D' = \beta$. Portanto, os triângulos ACD e $AC'D'$ são congruentes e logo $\overline{AD} = \overline{AD'}$, isto é, $\cos(x) = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$, como queríamos.

A curva dada pelo gráfico da função seno (e também o da função cosseno!) é chamada de senóide.

Na atividade *Retornando à Rio Star*, foi pedido que você

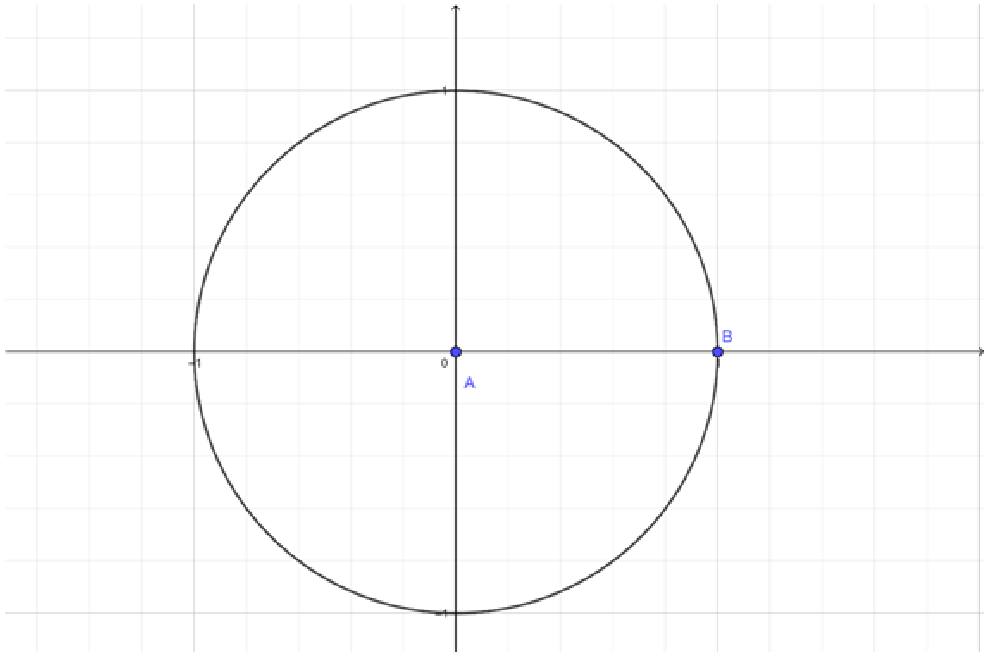
escrevesse a altura da cabine em função do tempo e você chegou na seguinte expressão para a função que descreve a altura da cabine ao longo do intervalo de tempo $0 \leq t \leq 9$:

$$h(t) = 45{,}5 - 42{,}5 \cos\left(\frac{t\pi}{9}\right).$$

A definição feita para o cosseno de um número real qualquer, nos permite concluir que a fórmula acima pode ser usada para modelar o movimento em sua totalidade, ou seja, para todo $t \geq 0$.

EXERCÍCIOS

1 Observe a imagem do círculo trigonométrico exibida a seguir, onde o ponto A está na origem e B é o ponto $(1, 0)$.



a) Tome um ponto C no círculo trigonométrico de forma que o arco $\widehat{BAC}$ meça $60°$. Qual a medida desse arco em radianos?

b) Trace por C uma reta paralela ao eixo y e seja C_x o ponto que essa reta tocar o eixo x. Trace o triângulo CAC_x. Quanto medem os ângulos desse triângulo?

c) Quanto medem os segmentos AC, AC_x e CC_x?

d) Quais são as coordenadas do ponto C?

e) Indique mais dois arcos, um positivo e um negativo, que também tenham extremidade nesse ponto.

f) Marque agora um ponto D de maneira que o arco $\widehat{BAD}$ meça $30°$. Qual a medida desse arco em radianos? Repita o que fez nos itens b), c), d) e e) para o ponto D.

g) O ponto E é tal que o arco $\widehat{BAE}$ mede $45°$. Qual a medida desse arco em radianos? Repita o que fez nos itens b), c), d) e e) para o ponto D.

2 Retome o círculo trigonométrico do exercício anterior. Se P é um ponto qualquer no círculo trigonométrico tal que o arco $\widehat{BAP}$ mede α. Dessa forma, as coordenadas do ponto P são $(\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$ Assim, quais são os sinais das coordenadas de P quando:

a) P está no primeiro quadrante

b) P está no segundo quadrante

c) P está no terceiro quadrante

d) P está no quarto quadrante

e) Você observa alguma regularidade nas respostas aos itens anteriores? Discuta com seus colegas e apresente suas ideias

3 *a)* Descreva como varia o sinal da função cosseno pelos quadrantes

b) Descreva como varia o sinal da função seno pelos quadrantes

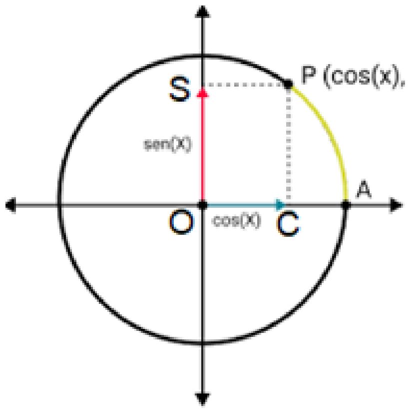
c) Descreva como varia o crescimento da função cosseno pelos quadrantes

d) Descreva como varia o crescimento da função seno pelos quadrantes

4 Considere dois arcos no círculo trigonométrico: um com 180 radianos e outro com $|b| \neq 1$ graus. Localize esses arcos no círculo trigonométrico e usando transferidor e régua, obtenha um valor aproximado para o valor de seus senos. Utilize o GeoGebra para obter uma "prova real" das suas conclusões.

PARA SABER + IDENTIDADE FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA

Observe a figura abaixo, onde x é um número real representado no 1^o quadrante pelo ponto P.



O ponto P é a imagem de x pela função de Euler, logo, $P = (\cos(x), \operatorname{sen}(x))$. Como P está no primeiro quadrante, as suas coordenadas são positivas. O ângulo $\widehat{OCP}$ é reto, logo, o triângulo OPC é retângulo. Pelo Teorema de Pitágoras, aplicado no triângulo OPC, temos:

$$\overline{OP^2} = \overline{PC^2} + \overline{OC^2}$$

Como o raio é unitário, temos que $\overline{OP} = 1$. As medidas $\overline{PC}$ e $\overline{OC}$ correspondem exatamente às coordenadas do ponto P, portanto:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1, \tag{1.1}$$

onde $\operatorname{sen}^2(x)$ é o quadrado de $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos^2(x)$ representa o quadrado de $\cos(x)$.

A igualdade 1.1 na verdade **vale para todo número real x** e não apenas para números que correspondem a pontos do círculo trigonométrico localizados no 1^o quadrante. De fato, se o ponto $P = (\cos(x), \operatorname{sen}(x))$ estiver localizado sobre um eixos, então uma das suas coordenadas terá módulo 1 e a outra será nula, portanto, é imediato que neste caso, $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Suponha agora que $P = (\cos(x), \operatorname{sen}(x))$ esteja localizado no 2^o quadrante. Traçando uma reta paralela ao eixo x passando por P, obtemos um ponto Q no 1^o quadrante que é a interseção dela com o círculo trigonométrico. O ponto Q corresponde à posição no círculo trigonométrico de um número real t. Observe que os triângulos OPC e OFQ da figura abaixo são congruentes.

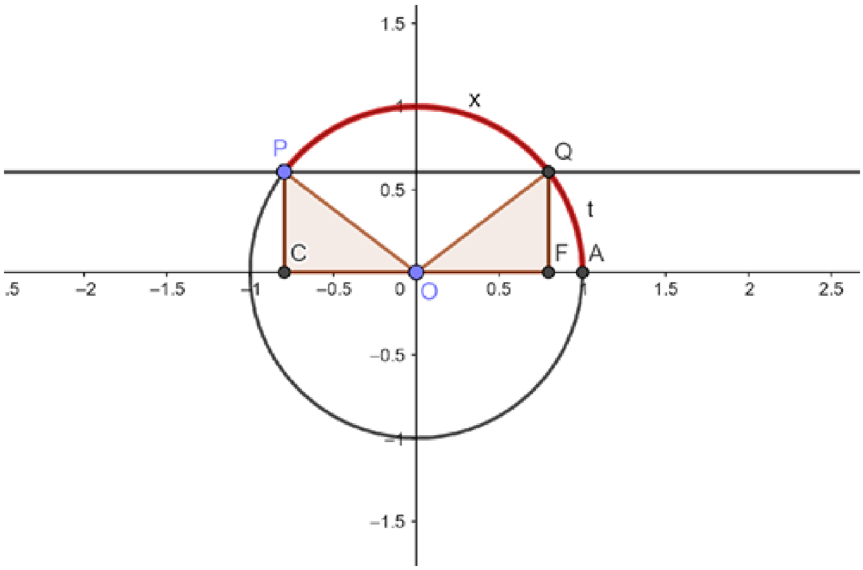
Portanto, $P = (\cos(x), \text{sen}(x))$ e $Q = (\cos(t), \text{sen}(t))$ tem mesma ordenada e abscissas simétricas, isto é:

$$\text{sen}(t) = \text{sen}(x) \text{ e } \cos(t) = -\cos(x)$$

Daí, temos

$$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = \text{sen}^2(t) + [-\cos(t)]^2 = \text{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1,$$

onde a última igualdade segue do fato de que a identidade 1.1 vale para números reais que correspondem a pontos do 1^o quadrante do círculo trigonométrico.



Utilizando triângulos retângulos congruentes e relacionando a medida do arco x com um arco t do primeiro quadrante de maneira similar como feita anteriormente, pode-se demonstrar (tente fazer para arcos do 3^o e 4^o quadrantes) que:

$$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1, \text{ para todo } x \text{ real.}$$

A identidade anterior é conhecida como Identidade Fundamental da Trigonometria. Através dela, pode-se determinar o valor do cosseno de um número real x, sabendo-se o valor de seu seno e vice-versa. Por exemplo, se x é um arco do segundo quadrante tal que $\text{sen}(x) = \frac{4}{5}$, vamos encontrar o valor de $\cos(x)$. Substituindo na Identidade Fundamental, obtemos:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2(x) = 1 \iff \cos^2(x) = 1 - \frac{16}{25} \iff \cos^2(x) = \frac{9}{25}.$$

Repare que como x está no 2^o quadrante, necessariamente $\cos(x)$ deve ser um número negativo. Logo, a última igualdade implica que

$$\cos(x) = -\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{-3}{5}.$$

EXPLORANDO PARÂMETROS DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Parâmetros na Rio Star

[1] Na atividade *Retornanto à Rio Star* foi pedido que você escrevesse a altura da cabine e função do tempo e você chegou na seguinte expressão:

$$h(t) = 45{,}5 - 52{,}5\cos\left(\frac{t\pi}{9}\right).$$

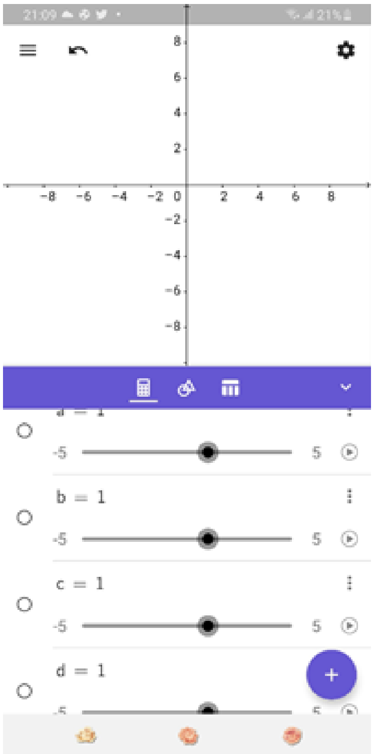
Essa expressão é uma função cosseno também, mas apresenta alguns parâmetros diferenciados. De fato, essa expressão é a função $f(x) = \cos(x)$ após passar por uma série de transformações gráficas. Vamos ver isso um pouco melhor?

Exploração de parâmetros da Função Seno

Atividade 18

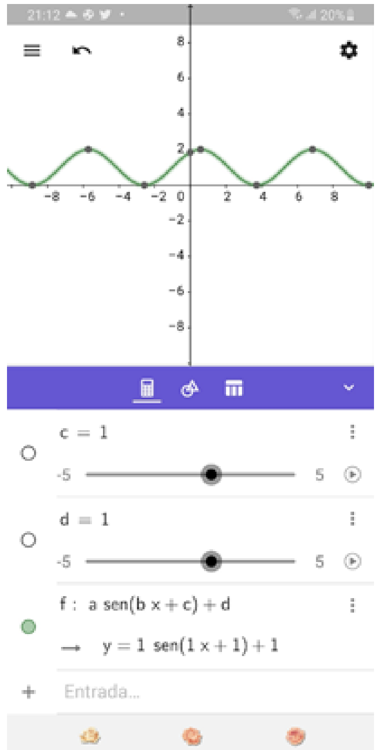
Abra uma tela nova no GeoGebra e siga os seguintes passos:

1. Crie controles deslizantes com nomes a, b, c e d. Para isso, basta digitar no campo Entrada: $a = 1$ e Enter; $b = 1$ e Enter e assim por diante. O GeoGebra criará automaticamente os controles deslizantes.

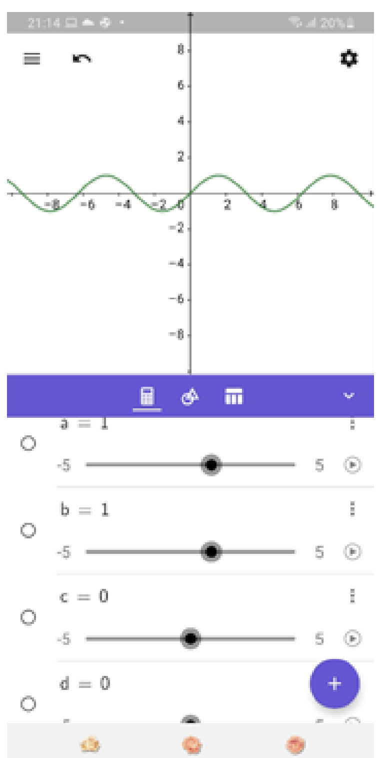


[1]nota da diagramação: Havia dois explorando seguidos, juntei os dois em um e coloquei "parâmetros na rio star"como uma subseção

2. Digite no campo Entrada a função $y = a * sen(bx + c) + d$ e tecle Enter.



3. Mova os controles deslizantes a e b para o valor 1 e os controles c e d para zero. Se tiver dificuldade, você pode tocar sobre o valor do controle deslizante e fazer o ajuste digitando o valor desejado.



a) Movimente lentamente o controle deslizante a para a direita e para a esquerda. O que você observa? Registre suas observações.

b) Retorne o controle deslizante a para o valor 1. Agora movimente lentamente o controle deslizante b para a direita e para a esquerda. O que você observa? Registre suas observações.

c) Retorne o controle deslizante b para o valor 1. Agora movimente lentamente o controle deslizante c para a direita e para a esquerda. O que você observa? Registre suas observações.

d) Retorne o controle deslizante c para o valor 0. Agora movimente lentamente o controle deslizante d para a direita e para a esquerda. O que você observa? Registre suas observações.

ORGANIZANDO PARÂMETROS DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

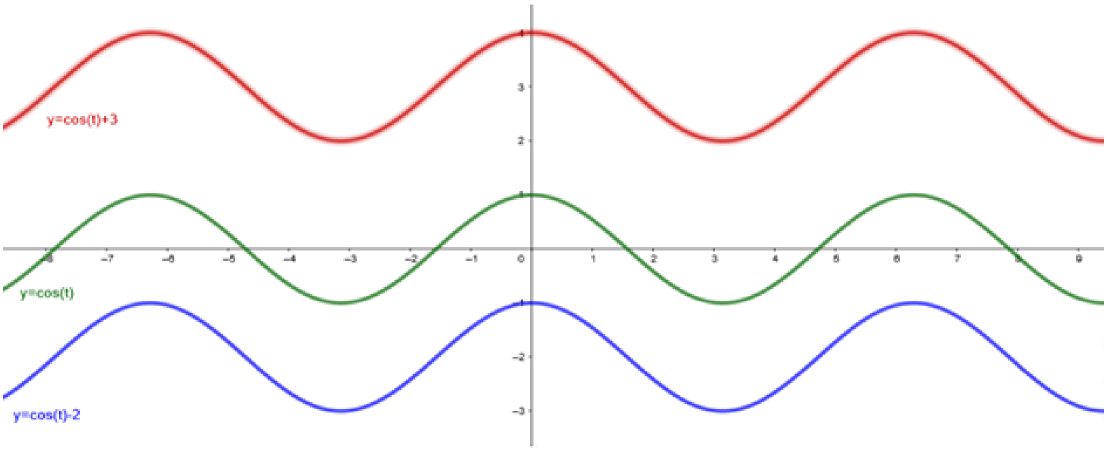
Generalizando a função cosseno, podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$f(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$$

Os parâmetros nessa expressão são os números reais indicados pelas variáveis a, b, c e d. Vamos ver o impacto de cada um desses parâmetros no gráfico da função cosseno.

Translações Verticais

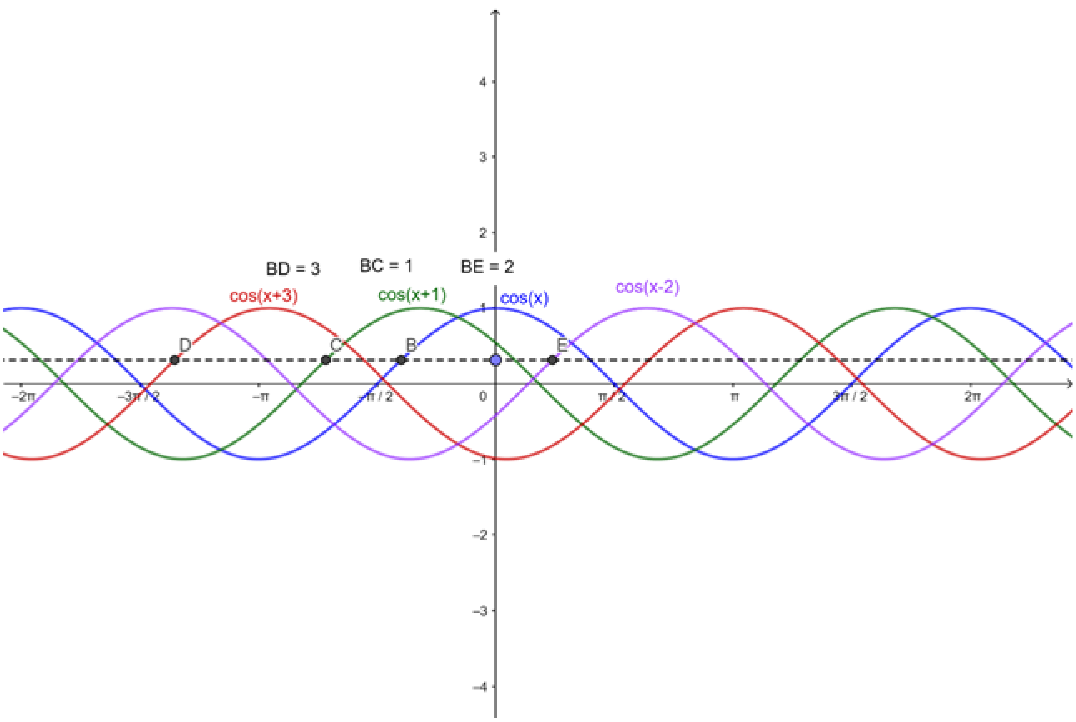
Vamos começar com o coeficiente d nessa expressão. Considere a expressão $y = \cos(x) + d$. Adicionar d unidades a uma função implica em deslocar essa função verticalmente em d unidades para cima, se d for positivo, ou para baixo, se d for negativo. Isso ocorre porque tomando um mesmo x para três funções $y_1 = \cos(x) + d_1$, $y_2 = \cos(x) + d_2$ e $y = \cos(x)$, os pontos $(x, \cos(x) + d_1)$, $(x, \cos(x) + d_2)$ e $(x, \cos(x))$ estão alinhados verticalmente, variando suas posições apenas pelos valores de d_1 e d_2, de forma que se $d_1 < d_2$ então $(x, \cos(x) + d_1)$ estará abaixo de $(x, \cos(x) + d_2)$. A seguir temos um exemplo com as funções $y = \cos(x) + 3$, $y = \cos(x)$ e $y = \cos(x) - 2$ para as quais os valores de d são, respectivamente, 3, 0 e -2.



Em síntese, podemos dizer que se uma função é adicionada em d unidades, então o gráfico dessa função sofre translações verticais de d unidades para cima, se $d > 0$, ou para baixo, se $d < 0$. Nesse caso, a função não sofre variação nem de período nem de amplitude; apenas o seu conjunto imagem fica deslocado também em d unidades.

Translações Horizontais

Da mesma forma que o parâmetro d, o parâmetro c também gera translações no gráfico da função, porém em direção horizontal. Consiere a expressão $y = \cos(x + c)$. Vamos tomar um mesmo y para três funções: $y = cos(x + c_1)$, $y = \cos(x + c_2)$ e $y = \cos(x)$, considerando $c_1 < c_2$. Os pontos assim gerados serão $(x+c_1, y)$, (x, y) $(x+c_2, y)$. O alinhamento observado será agora horizontal, mas em ordem invertida — ou seja, se temos $c1 < c2$, então $(x+c_1, \cos(x+c_1))$ estará a direita de $(x + c_2, \cos(x + c_2))$.

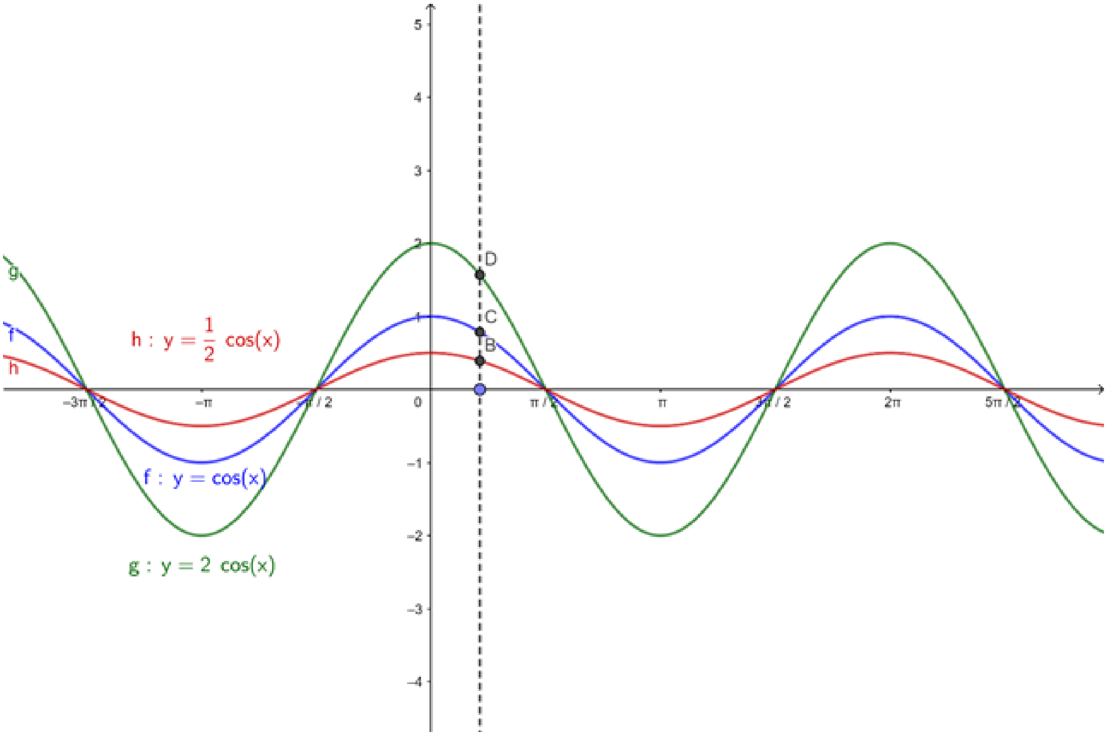


Observe que, no exemplo acima, as funções $y = \cos(x)$, $y = \cos(x + 1)$, $y = \cos(x + 3)$ e $y = \cos(x - 2)$ têm os valores do parâmetro c respectivamente iguais a 0, 1, 3 e -2.

- A distância entre os pontos B, em $y = \cos(x)$, e D, em $y = \cos(x + 3)$ é igual a 3 unidades, o que mostra que $y = \cos(x + 3)$ é uma translação horizontal da função $y = \cos(x)$ em três unidades para a esquerda, sendo $c = 3, c > 0$.
- A distância entre os pontos B em $y = \cos(x)$ e C em $y = \cos(x + 1)$ é igual a 1 unidade, portanto, $y = \cos(x + 1)$ é uma translação horizontal da função $y = \cos(x)$ em 1 unidade para a esquerda, sendo $c = 1, c > 0$
- A distância entre os pontos B em $y = \cos(x)$ e E em $y = \cos(x-2)$ é de 2 unidades, portanto $y = \cos(x - 2)$ é uma translação horizontal da função $y = \cos(x)$ em 2 unidades para a direita, sendo $c = -2, c < 0$. Em síntese, quando adicionamos c unidades aos valores de domínios de uma função, geramos um deslocamento horizontal para a direita, se $c < 0$, ou para a esquerda, se $c > 0$. Não há alteração nem de amplitude nem de período, nem tampouco de conjunto imagem.

Compressões ou expansões verticais

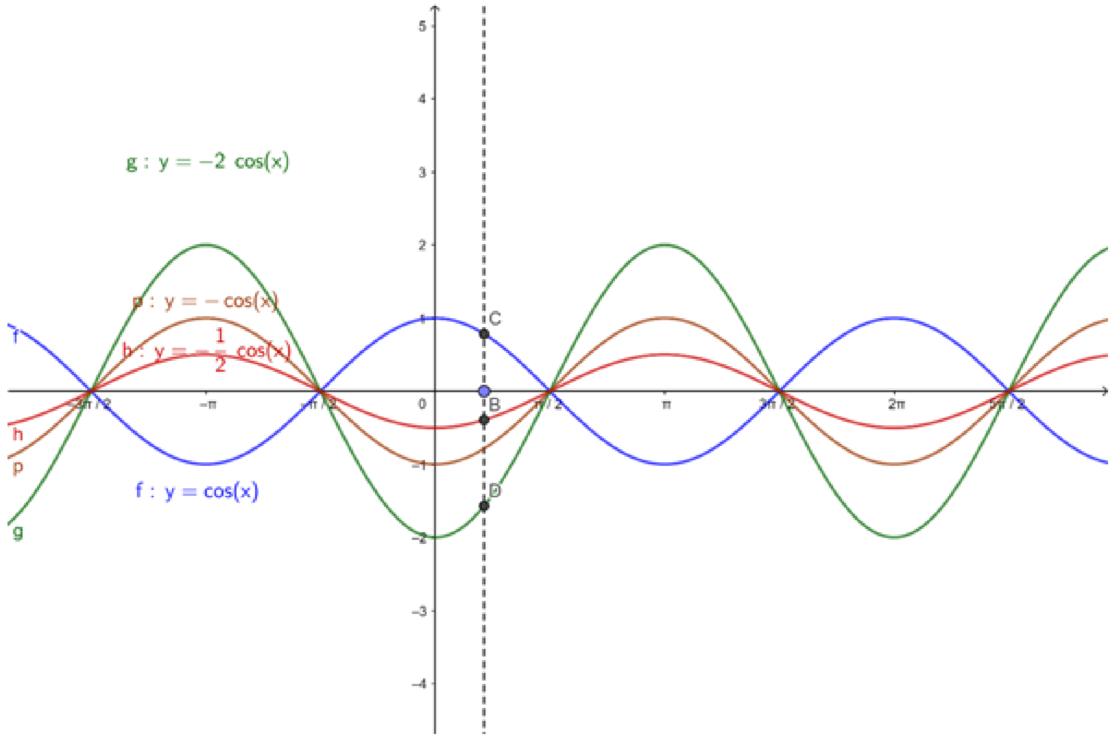
Vejamos agora o impacto do parâmetro a da expressão $y = a \cdot \cos(x)$ no gráfico da função $y = \cos(x)$. Vemos a seguir um exemplo em que os valores tomados para a foram w, 2 e $\frac{1}{2}$.



Observe que para valores positivos de a, há uma expansão ou compressão vertical:

- Ao multiplicar cada componente do gráfico da função $y = \cos(x)$ por 2, estamos multiplicando todos os valores das imagens de $y = \cos(x)$ por 2, logo, há uma *expansão vertical* de fator 2.
- Ao multiplicar cada componente do gráfico da função $y = \cos(x)$ por $\frac{1}{2}1/2$, estamos multiplicando todos os valores das imagens de $y = cos(x)$ por $\frac{1}{2}$, logo, há uma *contração* vertical de fator 2.

E se a for um número negativo? As situações observadas serão as mesmas, mas refletidas em relação ao eixo x. Vamos tomar, como exemplo, valores para a iguais a 1, -1, -2 e $\frac{-1}{2}$.



Observe que para valores negativos de a, também há uma expansão ou compressão vertical:

- Ao multiplicar cada componente do gráfico da função $y = \cos(x)$ por -1, estamos multiplicando todos os valores das imagens de $y = \cos(x)$ por -1, logo, há uma reflexão vertical em torno do eixo x.
- Ao multiplicar cada componente do gráfico da função $y = \cos(x)$ por -2, estamos multiplicando todos os valores das imagens de $y = \cos(x)$ por -2, o que equivale a multiplicar por -1 e em seguida por 2. Portanto, obtemos uma reflexão em relação ao eixo x seguida de uma expansão vertical de fator 2.
- Ao multiplicar cada componente do gráfico da função $y = \cos(x)$ por $\frac{-1}{2}$, estamos multiplicando todos os valores das imagens de $y = \cos(x)$ por $\frac{-1}{2}$, o que equivale a multiplicar por -1 e em seguida por $\frac{1}{2}$. Portanto, obtemos uma reflexão em relação ao eixo x seguida de uma compressão vertical de fator $\frac{1}{2}$.

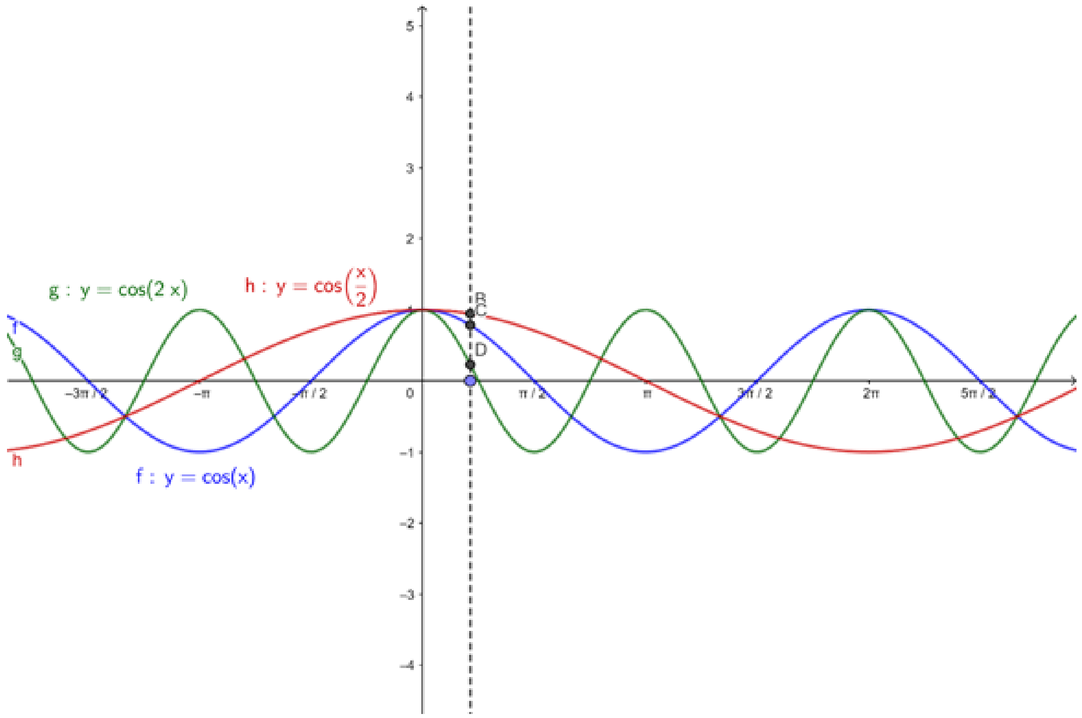
De forma mais geral, ao tomamos a função, $y = a \cdot \cos(x)$ estamos multiplicando a coordenada y por a, o gráfico é expandido (se $|a| > 1$) ou contraído (se $0 < |a| < 1$) na direção vertical, além de ser refletido em relação ao eixo x, se $a < 0$.

Note que esse fator a influência os valores máximos e mínimos atingidos pela função $f(x) = a \cdot \cos(x)$. Enquanto a função $g(x) = \cos(x)$ tem valor máximo igual a 1 e mínimo igual a -1 a função $f(x) = a \cdot \cos(x)$ tem valor máximo igual a |a| e mínimo igual a $-|a|$ — o que indica que o valor da função oscila num intervalo de comprimento $2|a|$. Logo, multiplicar a função por um número real altera a amplitude dessa função, altera o conjunto imagem da função mas não interfere no período dessa função.

Compressões ou expansões horizontais

Vejamos agora o impacto do parâmetro b da expressão $y = \cos(b \cdot x)$ no gráfico da função $y = cos(x)$. Antes de qualquer coisa, note que se $b = 0$, temos que $y = \cos(0) = 1$ e, portanto, para esse valor, temos a função constante igual a 1. Desconsideremos esse caso então, ou seja, estamos assumindo que $b \neq 0$

Para fixar, tomemos b igual a 1, 2 e $\frac{1}{2}$.



Para valores positivos de b, teremos uma expansão ou compressão horizontal, como ilustrado nos seguintes exemplos:

- Se $b = 2$, a função $y = \cos(2x)$ calculará a abscissa do ponto $E(2x)$, onde E é a função de Euler. Conforme se aumenta o valor de x, o ponto $E(2x)$ percorrerá o círculo trigonométrico com o dobro da velocidade percorrida pelo ponto $E(x)$. De fato, começando em $x = 0$, para que o ponto $E(x)$ dê uma volta completa no círculo trigonométrico, x precisa percorrer todo o intervalo $[0, 2\pi]$. Por sua vez, o ponto $E(2x)$ dá a mesma volta completa bastando que x percorra o intervalo $[0, \pi]$. Portanto o ciclo de repetição do gráfico de $y = \cos(2x)$ se dará num intervalo menor, de comprimento igual a π. Geometricamente, o gráfico de $y = \cos(2x)$ fica "comprimido horizontalmente" em relação ao de $y = \cos(x)$ (vide figura).
- Se $b = \frac{1}{2}$, a função $y = \cos(x/2)$ calculará a abscissa do ponto $E(\frac{x}{2})$, onde E é a função de Euler. Conforme se aumenta o valor de x, o ponto $E(\frac{x}{2})$ percorrerá o círculo trigonométrico com a metade da velocidade percorrida pelo ponto $E(x)$. De fato, começando em $x = 0$, para que o ponto $E(x)$ dê uma volta completa no círculo trigonométrico, x precisa percorrer todo o intervalo $[0, 2\pi]$. Por sua vez, o ponto $E(\frac{x}{2})$ dá a mesma volta completa apenas depois que x percorrer o intervalo $[0, 4\pi]$. Portanto o ciclo de repetição do gráfico de $y = cos(x/2)$ se dará num intervalo maior, de comprimento igual a 4π. Geometricamente, o gráfico de $y = \cos(\frac{x}{2})$ fica "expandido horizontalmente" em relação ao de $y = \cos(x)$ (vide figura).

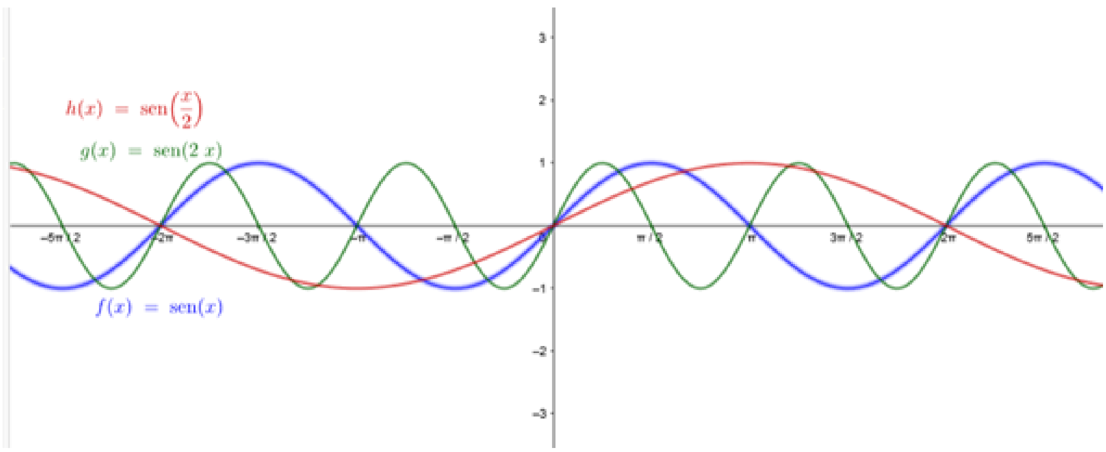
De maneira geral, se $b > 0$, a função $y = \cos(bx)$ calcula a abscissa do ponto $E(bx)$. Começando com $x = 0$ e aumentando o valor de x, para que esse ponto percorra uma volta completa no sentido no círculo trigonométrico, x deverá percorrer o intervalo $[0, \frac{2\pi}{b}]$. Como o ciclo de repetição do gráfico de $y = \cos(bx)$ se dará nesse último intervalo, o período desta função será $\frac{2\pi}{b}$.

Se $b < 0$ então, começando com $x = 0$, conforme x aumenta, o ponto $E(bx)$ percorrerá o sentido horário do círculo trigonométrico e dará uma volta completa no círculo quando x percorrer todo o intervalo $[0, \frac{2\pi}{-b}]$. Por exemplo, se $b = -2$, então quando x varia no intervalo $[0, \pi]$ então $E(-2x)$ dá uma volta completa no sentido horário. Assim, $\frac{2\pi}{-b}$ será o período de função $y = \cos(bx)$ neste caso.

Esta análise nos permite concluir que, o período da função $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + c) + d$ é alterado apenas pelo parâmetro b e seu valor será dado por:

$$P = |2\frac{\pi}{b}|.$$

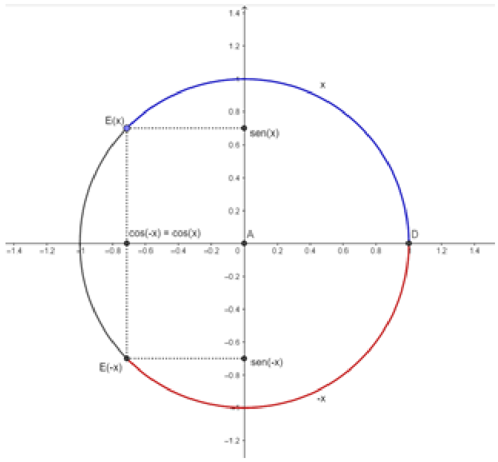
Para a função seno o comportamento será o mesmo, visto que ela calcula a ordenada do ponto $E(bx)$ ao invés da abscissa.



Observação: Na Atividade *Exploração de Parâmetros da Função Seno* você deve ter percebido que o gráfico da função $y = \text{sen}(-x)$ é obtido pela reflexão em torno do eixo dos x do gráfico da função $y = \text{sen}(x)$. Algebricamente isso significa que para todo número real x tem-se:

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$$

. Esta última igualdade se justifica pelo fato do ponto $E(-x)$ no círculo trigonométrico associado o número $-x$ ser exatamente a reflexão, em relação ao eixo horizontal, do ponto $E(x)$ correspondente ao número x. Dessa forma, $E(-x)$ e $E(x)$ têm ordenadas opostas, isto é, $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$. (vide figura a seguir). Observe que a mesma figura também nos permite deduzir a igualdade $\cos(-x) = \cos(x)$.



PRATICANDO PARÂMETROS DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Colhendo Estrelas

Atividade 19

Usando o link da plataforma Desmos (https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/566b317d4e38e1e21a10ab07#preview/df77bcd1-a128-4e8b-a1e6-6417acf42950), altere os parâmetros da função seno para alterar o formato da senóide e conseguir pegar todas as estrelas da tela.

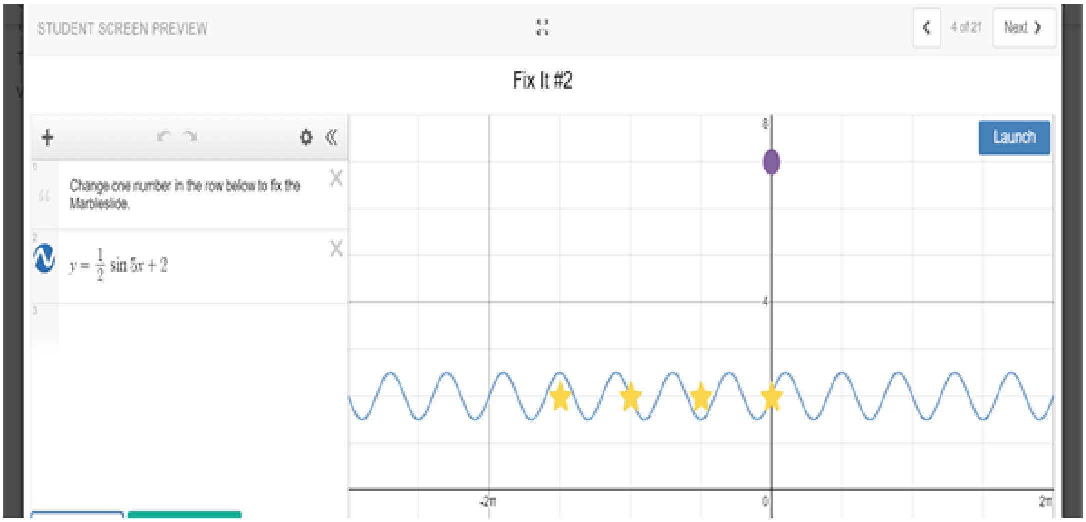
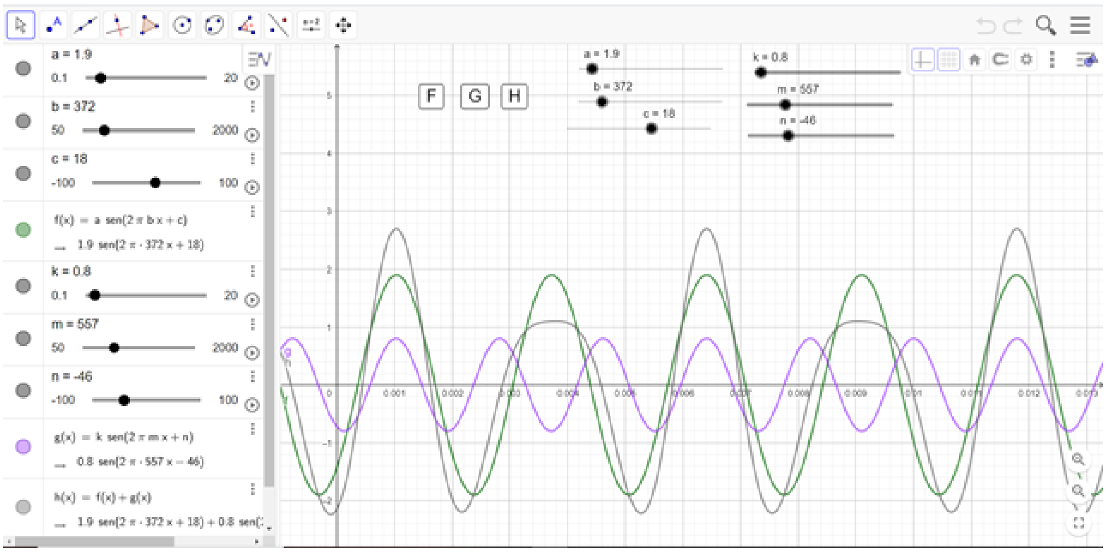


Figura 1.19: Fonte: Desmos – Marbleslides: Periodics

Ouvindo Funções Trigonométricas

Atividade 20

No "Você Sabia: O Som e as Ondas Sonoras", você foi capaz de enxergar as ondas sonoras associadas a sons produzidos próximo ao seu aparelho celular. Nesta atividade faremos o caminho contrário: produziremos ondas sonoras no GeoGebra e iremos ouvi-las. Acesse o seguinte link para realizar a atividade: `https://www.geogebra.org/classic/sdx68rqp`



As ondas sonoras que você irá ouvir correspondem aos gráficos das seguintes funções:

$$F(x) = a \cdot \operatorname{sen}(2\pi bx + c)$$
$$G(x) = k \cdot \operatorname{sen}(2\pi mx + n) \text{ e}$$
$$H(x) = F(x) + G(x)$$

Repare que a função H gera uma onda que é obtida combinando as ondas associadas a F e G, visto que H é dada pela soma de F com G. Movimente os controles deslizantes a, b e c para alterar o formato da onda F, os controles k, m e n para alterar o formato da onda G e qualquer um deles para alterar a onda H. Clique nos botões F, G ou H para ouvir o som associado à onda correspondente. Responda às perguntas:

a) Quais parâmetros estão associados à intensidade do som produzido?

b) Quais parâmetros estão associados à característica do som ser mais agudo ou mais grave?

c) Há algum parâmetro que ao ser movido não altera nenhuma característica do som? Qual(is)?

d) Há algum valor do parâmetro b para o qual você não consegue ouvir o som emitido pela onda F? Qual?

VOCÊ SABIA?

Frequência do Som

A frequência do som associado a uma onda sonora é por definição o inverso multiplicativo do seu período. Na atividade anterior, a onda F tem período igual a $\frac{2\pi}{2\pi b} = \frac{1}{b}$. Portanto, a frequência do som associado à onda F é igual a b. Em Física, a unidade de medida utilizada para medir a frequência do som é o Hertz (Hz).

O ouvido humano é capaz de ouvir ondas sonoras entre 20 Hz a 20000 Hz. Acima disso temos os ultra-sons. Os morcegos utilizam os ultra-sons para detectar objetos e animais ao seu redor através da emissão de ondas sonoras que ecoam de volta para ele ao atingir obstáculos. É assim que eles se guiam no escuro.

Figura 1.20: Fonte: Universidade de São Paulo

No vídeo abaixo, você pode ouvir uma onda sonora que tem amplitude constante, com frequência variando de 20 Hz a 20.000 Hz. Será que você ouve bem? Assista-o para descobrir em quais intervalos de valor da frequência você consegue ouvir algum som:

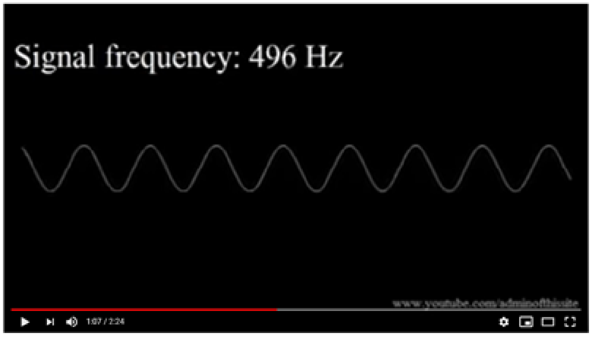


Figura 1.21: Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=-bjvZDhScbs

EXERCÍCIOS

1 Elabore um quadro síntese das transformações gráficas causadas pelos parâmetros a, b, c e d nas funções $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + c) + d$ e $g(x) = a \cdot \operatorname{sen}(b \cdot x + c) + d$. Analise a influência dos parâmetros na imagem, no período e na amplitude dessas funções.

2 Esboçar o gráfico das funções, descrevendo as transformações ocorridas.

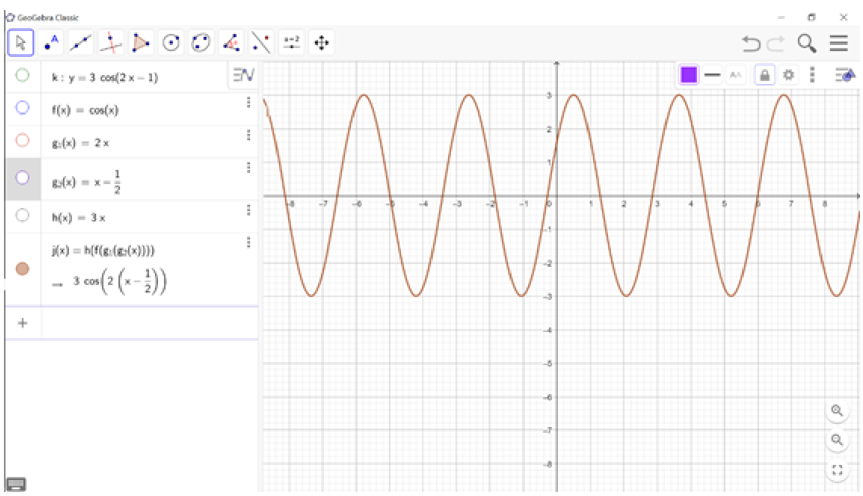
a) $f(x) = 3\cos(2x - 1)$

b) $f(x) = 3\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{e} - \pi\right)$

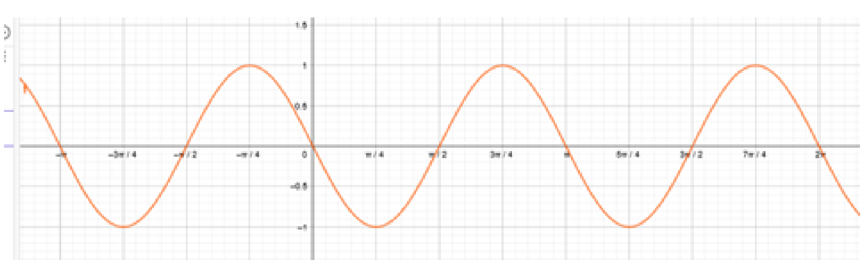
c) $f(x) = \left|\cos\left(\dfrac{x-1}{2}\right)\right|$

3 Em cada item a seguir, determine a, b e c para que a curva dada seja o gráfico de f.

a) $f(x) = a\cos(bx - c)$



b) $f(x) = a\operatorname{sen}$



PARA SABER + PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES PERIÓDICAS

Funções periódicas apresentam algumas propriedades interessantes. Conforme alteramos alguns de seus parâmetros, podemos obter outras funções periódicas que podem ou não acarretar em mudança no valor de seu período e de sua amplitude. Vamos estudar aqui algumas dessas alterações. Se f é uma função periódica de período p, temos que:

- Se k é uma constante real, a função $f_1(x) = f(x) + k$ também é periódica de período p.

Se $A = (x, f(x))$ é um ponto do gráfico qualquer de f, o ponto do gráfico de f_1 que tem abscissa igual a x é $A_1 = (x, f_1(x)) = (x, f(x) + k)$. Se $k > 0$, o ponto A_1 está k unidades acima do ponto A. Variando x ao longo do domínio de f vemos que o gráfico de f_1 será obtido a partir do gráfico de f por meio de uma translação vertical de k unidades para cima. Se $k < 0$, a situação é parecida: o gráfico de f_1 será obtido a partir do gráfico de f por meio de uma translação vertical de $-k$ unidades para baixo. Note que translações são *isometrias*, o que significa que não há alterações propriamente na figura transladada, a não ser em sua posição em relação à anterior. Logo, não havendo alterações no gráfico inicial, a função assim gerada também é naturalmente periódica de período p. Algebricamente temos que se $f_1(x) = f(x) + k$, então para todo x tal que x e $x + p$ pertençam ao domínio de f:

$$f_1(x + p) = f(x + p) + k = f(x) + k = f_1(x).$$

Logo, f_1, obtida como uma translação vertical de f, é uma função periódica.

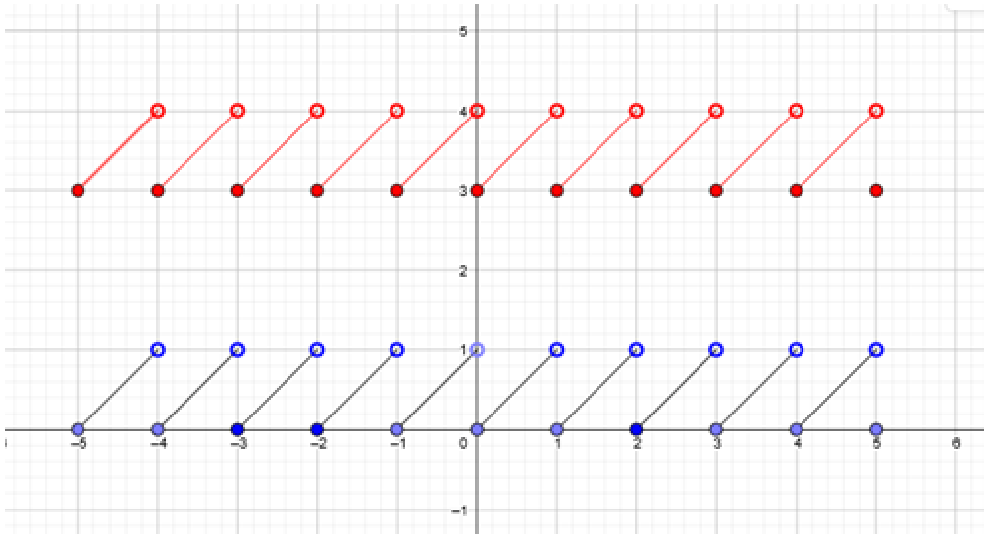
Quais serão os valores do período e da amplitude de f_1? Seja p o seu período. Como vimos acima, se p é o período de f, então $f_1(x + p) = f_1(x)$ para todo x. Portanto, somar p aos valores do domínio de f_1 não altera as suas imagens. Como p por definição é o menor valor com essa propriedade, temos que $p' \leq p$. Por outro lado, como $f(x) = f_1(x) - k$, temos que

$$f(x + p) = f_1(x + p) - k = f_1(x) - k = f(x),$$

onde a segunda igualdade vale porque p é o período de f_1. Portanto $f(x + p) = f(x)$, o que significa que somar p aos valores do domínio de f não altera suas imagens. Mas como p é o período de f, devemos ter $p \leq p'$. Concluímos que $p = p$. Se o maior e o menor valor assumidos por f são M e m respectivamente, o maior e o menor valor assumidos por f_1 serão $M + k$ e $m + k$. Portanto, a amplitude de f_1 será:

$$\frac{(M + k) - (m + k)}{2} = \frac{M - m}{2}$$

Concluímos então que f_1 tem mesmo período e amplitude que f. No exemplo a seguir vemos uma translação de 3 unidades verticalmente para cima da função dente de serra:



- Se k é uma constante real, a função $f_2(x) = f(x+k)$ também é periódica de período p.

Observe que se $D \subset R$, os valores de x pertencentes ao domínio D da função f_2 devem ser tais que $x + k \in D$, para que a expressão $f(x+k)$ faça sentido. Assim, o maior subconjunto D' que tem essa propriedade é $D = \{x \in R; x + k \in D\}$.

Se $A = (x, f(x))$ é um ponto do gráfico qualquer de f, o ponto do gráfico de f_2 que fica sobre o número $x - k$ é

$$A_1 = (x-k, f_2(x)) = (x-k, f(x-k+k)) = (x-k, f(x)).$$

Se $k > 0$, o ponto A_1 está k unidades à esquerda do ponto A e ambos os pontos têm mesma altura $f(x)$. Variando x ao longo do domínio de f vemos que o gráfico de f_2 será obtido a partir do gráfico de f por meio de uma translação horizontal de k unidades para a esquerda. Se $k < 0$, a situação é parecida: o gráfico de f_2 será obtido a partir do gráfico de f por meio de uma translação horizontal de $-k$ unidades para a direita. Da mesma maneira que as translações verticais, as horizontais também são isometrias, o que indica que há apenas um deslocamento da posição do gráfico do f, mantendo o seu formato. Assim sendo, a função f_2 assim obtida também será periódica de período p. Algebricamente, podemos escrever que:

$$f_2(x+p) = f((x+p)+k) = f((x+k)+p) = f(x+k) = f_2(x),$$

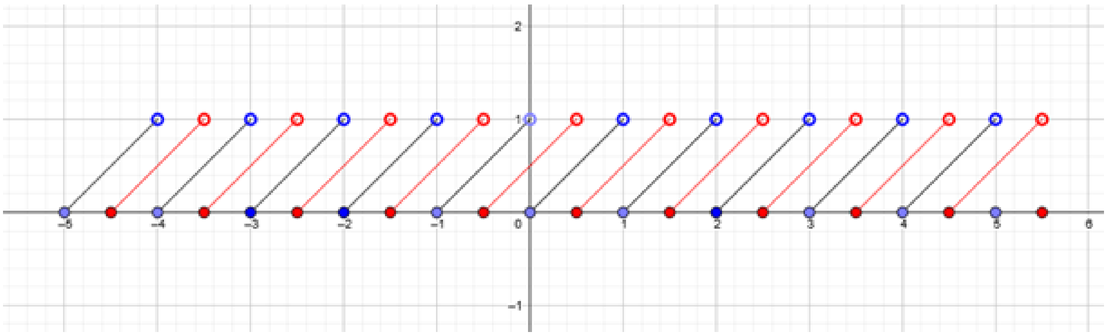
onde a penúltima igualdade vem do fato de p ser o período de f. Portanto, $f_2(x+p) = f_2(x)$. Se p é o período de f_2, concluímos que $p' \leq p$. Por outro lado, repare que $f(x) = f((x-k)+k) = f_2(x-k)$ para todo x no domínio de f. Logo:

$$f(x+p) = f_2((x+p)-k) = f_2((x-k)+p) = f_2(x-k) = f(x),$$

onde a penúltima igualdade vem do fato de p ser o período de f_2. Logo, $f(x+p) = f(x)$, portanto $p \leq p$. Concluímos que $p = p$, demonstrando assim que f_2 e f têm o mesmo período.

Repare que como o gráfico de f_2 é uma translação vertical do gráfico de f, o valor máximo assumido por f_2 é o mesmo que o assumido por f. Da mesma forma, os valores mínimos de f_2 e f são os mesmos. Portanto, a amplitude de f_2 será a mesma de f.

A figura a seguir mostra a função cujo gráfico é a translação horizontal de $\frac{1}{2}$ para a direita do gráfico da função dente de serra. Repare que como o domínio desta função é $D = [-5, 5]$, o maior conjunto D que pode ser domínio da nova função será $D = \{x \in R; x - \frac{1}{2} \in D\} = [-4{,}5; 5{,}5]$.



- Se a é um número real não nulo, a função $f_3(x) = a \cdot f(x)$ obtida pelo produto da função f periódica de período p também é periódica de período p.

Temos:

$$f_3(x+p) = a \cdot f(x+p) = a \cdot f(x) = f_3(x)$$

logo $f_3(x)$ é uma função periódica. Se p é o período de f_3 temos que $p' \leq p$. Como $f(x) = \frac{f_3(x)}{a}$ para todo x, temos:

$$f(x+p') = \frac{f_3(x+p')}{a} = \frac{f_3(x)}{a} = f(x),$$

logo, $p \leq p'$ e concluímos que $p = p'$

Portanto, a função f_3 obtida como um produto da função f periódica de período p por um número real a não nulo também é periódica de período p. No entanto, a amplitude dessa função é alterada por essa transformação. De fato, suponha que M e m são respectivamente o maior e o menor valor assumido por f. Como $f_3(x) = a \cdot f(x)$, se $a > 0$, o maior e o menor valor assumidos por f_3 serão $a \cdot M$ e $a \cdot m$ respectivamente. Logo a amplitude de f_3 será igual a

$$\frac{a \cdot M - a \cdot m}{2} = a \cdot \frac{(M-m)}{2},$$

ou seja, será igual à amplitude de f multiplicada por a.

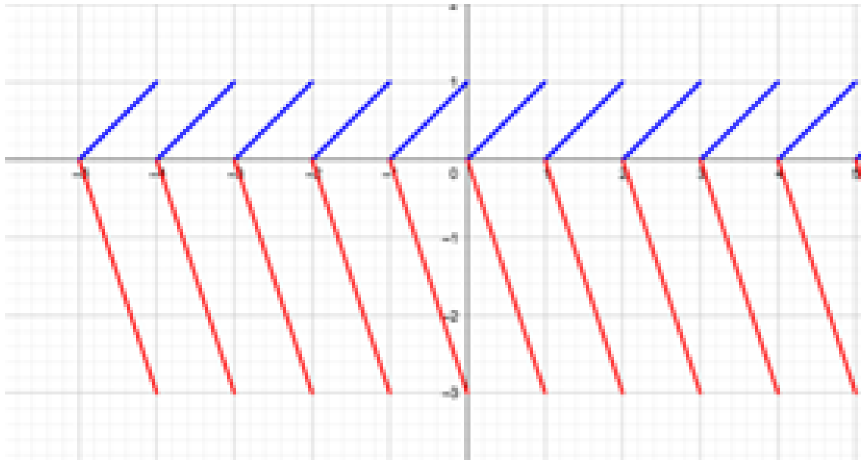
No caso em que $a < 0$, em virtude da regra de sinais, o maior valor de f_3 passa a ser $a \cdot m$ e o menor valor, $a \cdot M$. Tome, por exemplo, uma função cujo valor mínimo é -3 e o valor máximo é 5. Se multiplicarmos a expressão dessa função por -2, o valor máximo da nova função será 6 e o mínimo será -10. Portanto, a amplitude de f_3 nesse caso será

$$\frac{a \cdot M - a \cdot m}{2} = (-a) \cdot \frac{(M-m)}{2}.$$

Observe que, se $a > 0$ ou $a < 0$, concluímos que a amplitude de f_3 será igual à amplitude de f multiplicada por $|a|$.

Geometricamente, o gráfico da função f_3 é uma compressão (se $0 < |a| < 1$)ou uma expansão (se $|a| > 1$) de direção vertical do gráfico da função f, não alterando assim as características de periodicidade.

Abaixo, vemos como fica o gráfico de função dente de serra ao multiplicarmos sua expressão analítica por -3.



- Se b é um número real não nulo, a função $f_4(x) = f(bx)$ também é periódica e seu período é $\frac{p}{|b|}$.

Observe que se $D \subset R$, os valores de x pertencentes ao domínio D da função f_2 devem ser tais que $bx \in D$, para que a expressão $f(bx)$ faça sentido. Assim, o maior subconjunto D que tem essa propriedade é $D = \{x \in R; bx \in D\}$. Podemos constatar que:

$$f_4\left(x + \frac{p}{|b|}\right) = f\left(b\left(x + \frac{p}{|b|}\right)\right) = f\left(bx + \frac{bp}{|b|}\right) = f(bx \pm p) = f(bx) = f_4(x),$$

onde a penúltima igualdade decorre do fato que o valor da imagem de f não se altera quando somamos ou subtraímos o valor do seu período. A igualdade acima mostra que f_4 é uma função periódica e que, se representarmos seu período por p, teremos $p' \leq \frac{p}{|b|}$. Decorre da igualdade que define a imagem da função f_4 que, para todo número t pertencente ao domínio de f, temos $f(t) = f_4(\frac{t}{b})$. Assim:

$$f(t + p' \cdot |b|) = f_4\left(\frac{t + p' \cdot |b|}{b}\right) = f_4\left(\frac{t}{b} \pm p'\right) = f_4\left(\frac{t}{b}\right) = f(t)$$

onde a penúltima igualdade decorre do fato da imagem de f_4 não se alterar quando somamos ou subtraímos seu período. Como p é o período de f e $f(t + p'|b|) = f(t)$ para todo t em seu domínio, concluímos que $p \leq p'|b|$, ou seja, $p' \geq \frac{p}{|b|}$. Provamos assim que $p' = \frac{p}{|b|}$.

Por outro lado, a igualdade $f_4(x) = f(bx)$ implica que os valores das imagens de f_4 também são imagens de f. Suponha que f atinge um máximo M e um valor mínimo m. Esses valores são atingidos em pontos x_1 e x_2 de seu domínio, ou seja, $M = f(x_1)$ e $m = f(x_2)$. Logo, temos que

$$f_4\left(\frac{x_1}{b}\right) = f\left(\frac{bx_1}{b}\right) = f(x_1) = M,$$

logo a imagem de f_4 em $\frac{x_1}{b}$ é M. Da mesma forma,

$$f_4\left(\frac{x_2}{b}\right) = f\left(\frac{bx_2}{b}\right) = f(x_2) = m$$

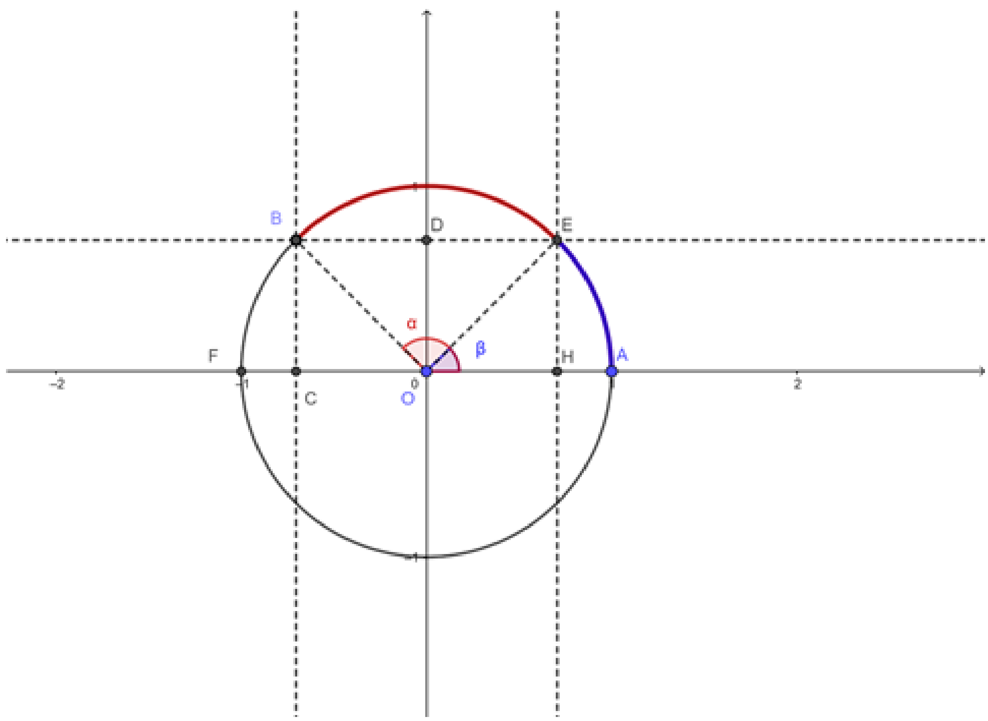
Logo, a amplitude de f_4 é a mesma de f, pois as duas funções assumem o mesmo valor máximo e o mesmo valor mínimo. sua amplitude não se altera, visto não haver alterações verticais na função.

PARA SABER + SIMETRIAS, SENOS E COSSENOS

Vamos conversar sobre as relações de simetria existentes entre valores de senos ou cossenos de arcos. Para compreendê-las bem, precisamos estudá-las quadrante a quadrante. Consideremos então no círculo trigonométrico o ponto e B de coordenadas $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ - o arco $\widehat{AOB}$ medindo α.

Simetrias entre senos e cossenos de arcos no 1º e 2º quadrantes

Se B está no 2^o quadrante, consideremos a paralela ao eixo horizontal que passa por B e encontra o círculo trigonométrico em E, onde E está no 1^o quadrante, sendo β a medida do arco $\widehat{AOE}$.



Qual a relação que existe entre α e β, ou seja, qual a relação que existe entre os arcos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{AOE}$ quando B está no 2^o quadrante?

Vamos começar observando os arcos $\widehat{BOF}$ e $\widehat{AOE}$ sendo A o ponto $(1, 0)$ e F o ponto $(-1, 0)$. Note que as coordenadas de E e B são $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$ respectivamente. Mas B é simétrico a E em relação ao eixo vertical, então $x_B = -x_E$ e $y_B = y_E$, assim, temos $\cos\beta = -\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha$.

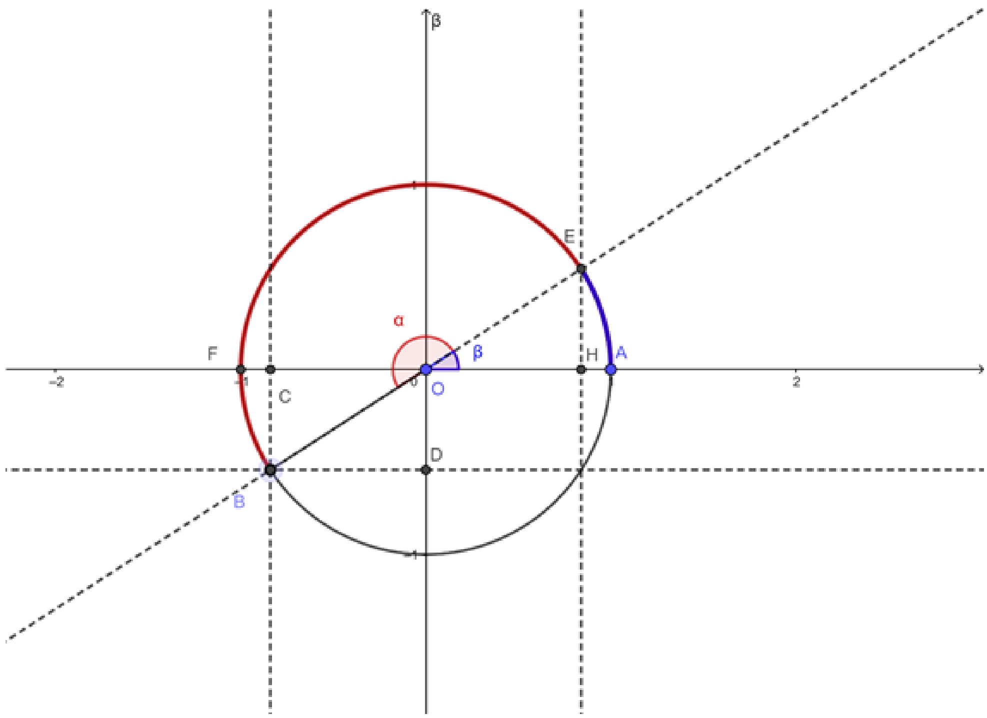
Podemos escrever essa relação de outra maneira. Sabemos que os arcos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{BOF}$ são suplementares, logo somam $180°$ ou $\pi\,\mathrm{rad}$, assim

$$\alpha + \beta = 180° \implies \beta = 180°\alpha \text{ ou } \alpha + \beta = \pi\,\mathrm{rad} \implies \beta = \pi\,\mathrm{rad} - \alpha$$

Essa relação é conhecida como *redução de arcos do 2^o quadrante para o 1^o quadrante* e pode ser assim descrita: "dado um arco qualquer de medida x com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, temos $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)$ e $\cos x = -\cos(\pi - x)$".

Simetrias entre senos e cossenos de arcos no 1º e 3º quadrantes

Considere na figura a seguir o ponto B no terceiro quadrante e a reta traçada por B passando pela origem do sistema cartesiano, que determina E sobre o círculo trigonométrico, E no 1^{o} quadrante tal que β é a medida do $\widehat{AOE}$. As coordenadas de E e B são $B(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $E(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$ respectivamente. Mas B é anti-simétrico a E em relação aos eixos coordenados, logo $x_B = -x_E$, ou seja, $\cos\beta = -\cos\alpha$, e ainda $y_B = -y_E$, o que implica que $\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}\alpha$.



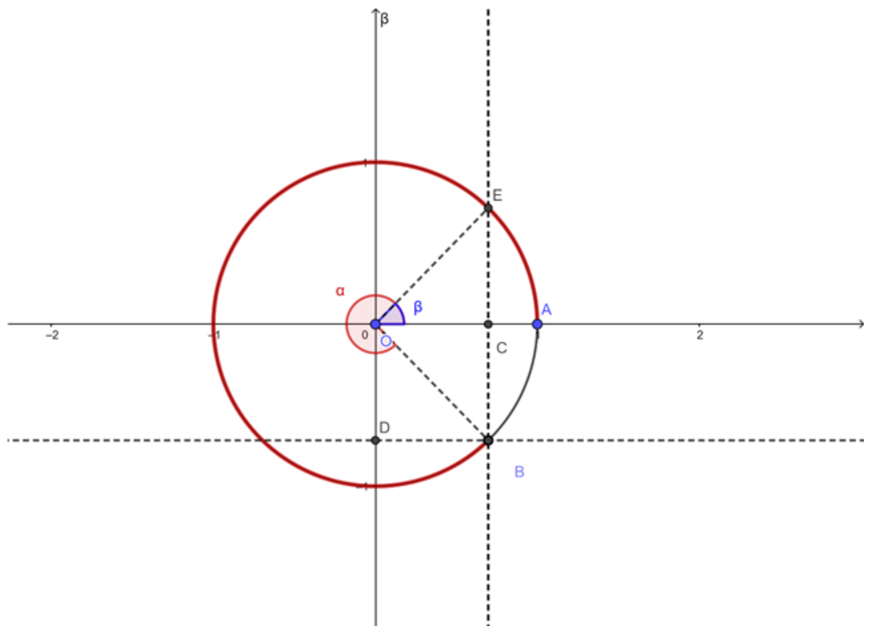
De outra forma, podemos escrever que se E está no 1^{o} quadrante e B é simétrico a E em relação a $(0,0)$, então, sendo α é a medida do arco $\widehat{AOB}$ e β é a medida do arco $\widehat{AOE}$:

$$\alpha - \beta = \pi \iff \alpha = \pi + \beta \text{ ou } \alpha - \beta = 180^\circ \iff \alpha = 180^\circ + \beta$$

Portanto, dado um arco qualquer de medida x com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, temos $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(\pi + x)$ e $\cos(x) = -\cos(\pi + x)$.

Simetrias entre senos e cossenos de arcos no 1º e 4º

No terceiro caso, consideremos B no quarto quadrante e a reta perpendicular ao eixo horizontal passando por B que determina E no 1° quadrante tal que β é a medida do arco $\widehat{AOE}$. As coordenadas de E e B são, respectivamente, $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$. Mas B é simétrico a E em relação ao eixo horizontal, então, $x_B = x_E$ ou seja, $\cos\beta = \cos\alpha$, e ainda $y_B = -y_E$, logo, $\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}\alpha$.



De outra forma, podemos escrever que se E está no 1° quadrante e B é simétrico a E em relação a eixo x, então, sendo α é a medida do arco $\widehat{AOB}$ e β é a medida do arco $\widehat{AOE}$:

$$\alpha + \beta = 2\pi \iff \alpha = 2\pi - \beta \text{ ou } \alpha + \beta = 360^{\circ} \iff \alpha = 360^{\circ} - \beta$$

Portanto, dado um arco qualquer de medida x com $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, temos $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(2\pi - x)$ e $\cos(x) = \cos(2\pi - x)$.

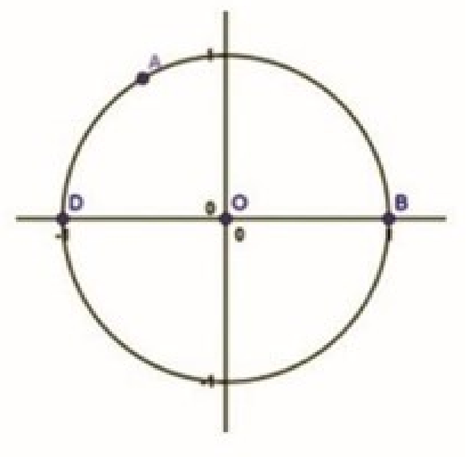
EXEMPLO 1 Síntese

Sintetizando o que vimos, podemos escrever a tabela abaixo:

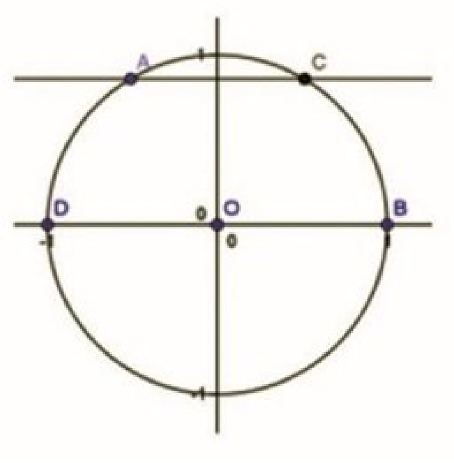
Redução do 2^{o} para o 1^{o} quadrantes $\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)$	$\cos x = \cos(\pi - x)$
Redução do 3^{o} para o 1^{o} quadrantes $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(x - \pi)$	$\cos x = -\cos(x - \pi)$
Redução do 4^{o} para o 1^{o} quadrantes $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2\pi - x)$	$\cos x = -\cos(2\pi - x)$

Como exemplo, vamos determinar o valor do seno e do cosseno de um arco de $\frac{2\pi}{3}$ rad

Representando este arco no círculo trigonométrico, temos:



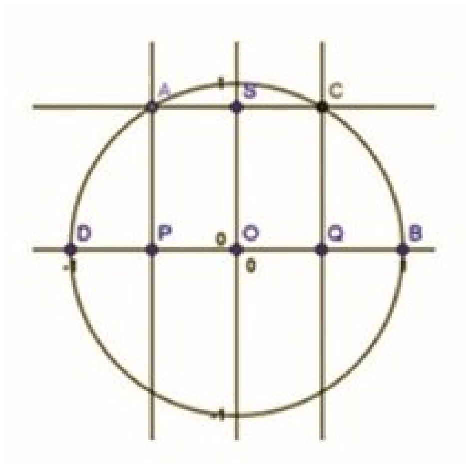
O ponto A é a extremidade do arco $\widehat{BOA}$ de $\frac{2\pi}{3}$ rad. Traçando a reta a paralela ao eixo x, encontramos o ponto C na intersecção de a com o círculo trigonométrico.



Como o arco $\widehat{BOA}$ mede $\frac{2\pi}{3}$ rad e $\widehat{AOD}$ e $\widehat{BOC}$ são congruentes, então o arco $\widehat{BOC}$ mede $\frac{\pi}{3}$ rad. O ponto S é a intersecção da reta a com o eixo y e o comprimento do segmento $\overline{OS}$ é o seno dos arcos $\widehat{BOC}$ e $\widehat{BOA}$. Daí, temos

$$\text{sen}\,120^\circ = \text{sen}\,60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Por outro lado, traçando B e D perpendiculares ao eixo x, encontramos os pontos P e Q, respectivamente, nas intersecções dessas retas com o eixo x.



Os comprimentos dos segmentos $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$ representam, respectivamente, os cossenos dos arcos $\widehat{BOA}$ e $\widehat{BOC}$, que são simétricos. Podemos então escrever que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos(120^\circ) = -\cos(60^\circ) = \frac{-1}{2}$$

Você reparou que não fizemos uso algum de fórmula nesta resolução? Tente, como exercício, usar o mesmo método de análise no ciclo trigonométrico para determinar os senos e cossenos de arcos que estejam no 3^{o} ou no 4^{o} quadrante!

Prevendo a altura da cadeira na Roda Gigante

Atividade 21

Na atividade *Retornando à Rio Star* foi pedido que você escrevesse a altura da cabine em função do tempo e você chegou na seguinte expressão:

$$h(t) = 45{,}5 - 42{,}5 \cdot \cos\left(\frac{t\pi}{9}\right),$$

onde t representa o tempo, em minutos, após o início da observação, quando a cabine estava na posição mais baixa. Baseado nela, diga em qual altura a cabine estará nos seguintes instantes:

a) 1 min e 30 seg após o início da observação:

b) 2 min e 15 seg após o início da observação;

c) 3 min após o início da observação;

d) 7 min e 30 seg após o início da observação;

e) 12 min após o início da observação;

f) 15 min e 45 seg após o início da observação;

g) 21 min após o início da observação;

h) 7 min e 30 seg antes do início da observação;

Fases da Lua

Atividade 22

Plote no GeoGebra os pontos (t, y), onde t é o dia e y é o percentual de visibilidade da lua no dia t. Faça isso para todos os dias de junho.

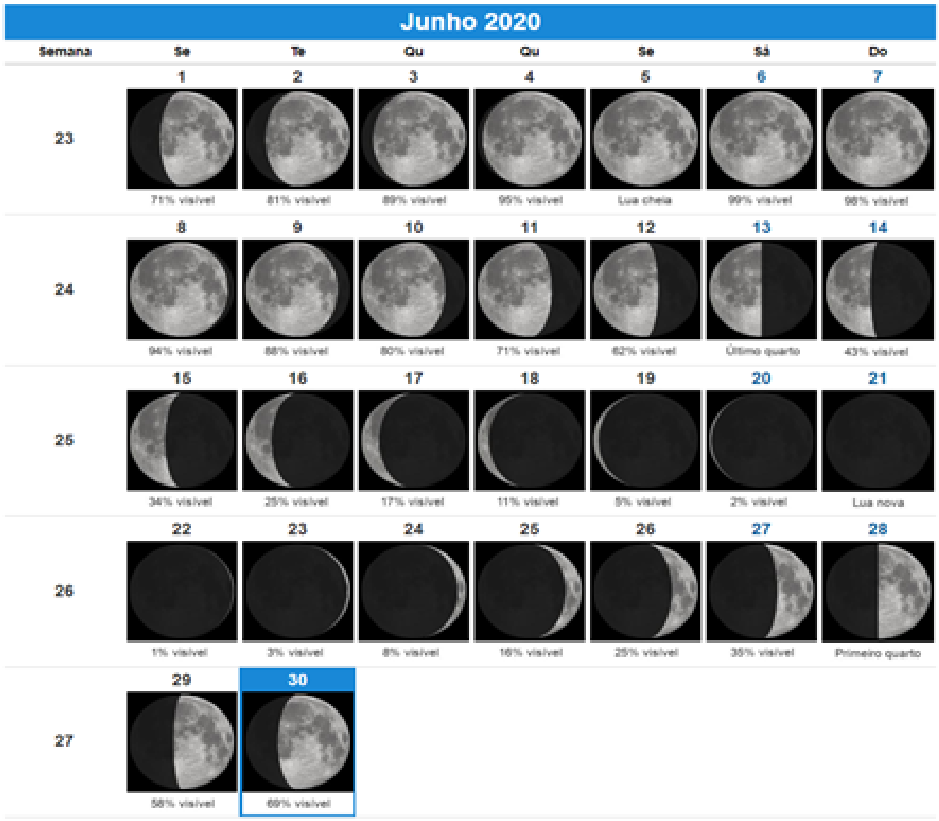
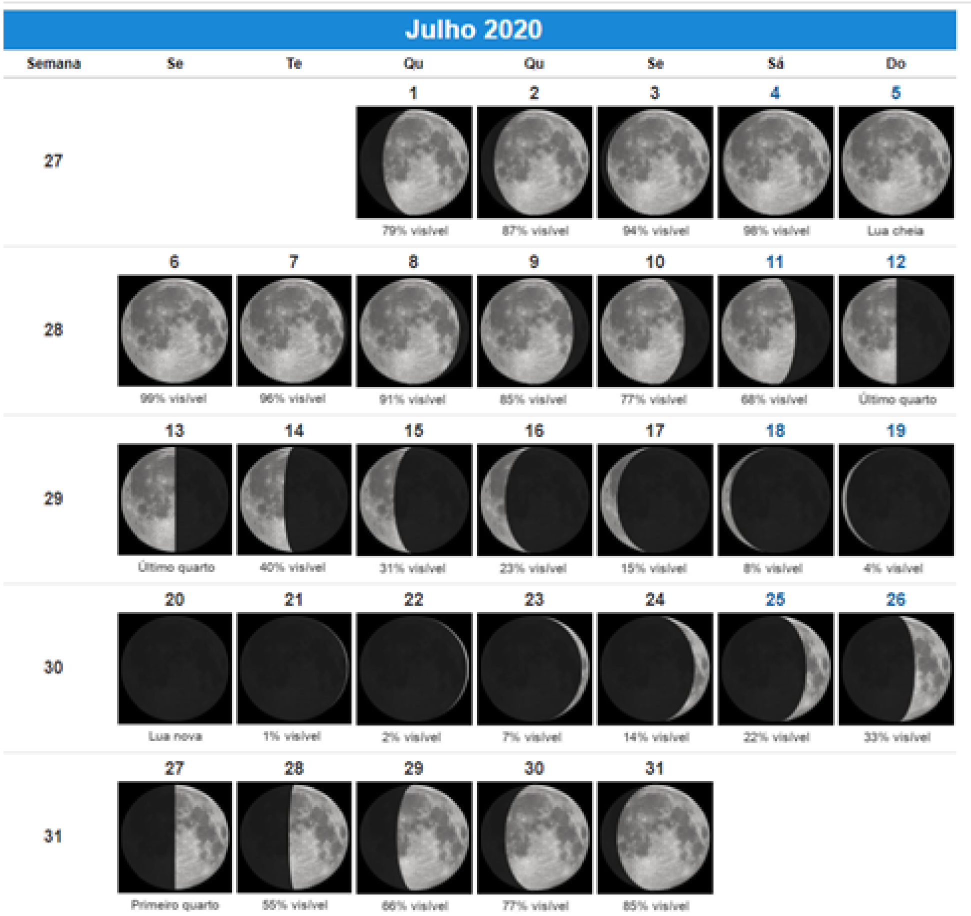


Figura 1.22: Fonte: Calendário 365

Encontre uma função trigonométrica da forma $y = a \cdot \text{sen}(bt + c) + d$ que melhor se aproxima dos pontos traçados. Use-a para prever a fase da lua nos dias 01 a 14 de julho. Compare o resultado obtido por você com o que consta no site `https://www.calendario-365.com.br/calendário-lunar/2020/julho.html`



ORGANIZANDO MODELOS TRIGONOMÉTRICOS

Modelos Trigonométricos são os mais simples para se tentar compreender a natureza de um fenômeno periódico. Esses modelos são dados por senóides da forma:

$$f(x) = a\,\mathrm{sen}(bx + c) + d.$$

Conforme vimos na última seção, o módulo do parâmetro a é exatamente a medida da amplitude do gráfico da função f, b está associado ao período da função, calculado através da expressão $\frac{2\pi}{|b|}$, enquanto c e d correspondem às translações horizontais e verticais do gráfico. Note que o conjunto imagem de f será o intervalo $[d - |a|, d + |a|]$.

Vamos considerar que haja um fenômeno periódico para o qual saibamos o seu período de repetição, dado por um número real $T > 0$. Dada uma coleção de pontos no plano cartesiano que representam valores que relacionam duas grandezas x e y, onde x é o tempo e y está associada a este fenômeno periódico, podemos tentar ajustar esses pontos por um modelo trigonométrico. Observando nas ordenadas dessa coleção de pontos o maior $y_{\max}$ e o menor valor $y_{\min}$ que aparece, podemos estimar o módulo da amplitude pondo $|a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$. Estimando também que ymáx seja o maior valor assumido pela grandeza y, o maior valor assumido pela imagem de f é $|a| + d$, logo $|a| + d = y_{\max}$, portanto, $d = y_{\max} - |a|$. Conhecendo-se o valor y_0 associado ao instante inicial, estimamos que $(0, y_0)$ pertença ao gráfico de f. Fazendo $x = 0$, e supondo que $a > 0$, obtemos que $y_0 = a \cdot \operatorname{sen}(c) + d$, onde $a = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$. Um valor aproximado para c pode ser obtido através de uma calculadora científica ou gráfica (como o GeoGebra), ou até mesmo, de forma mais grosseira, utilizando papel, regra, lápis e transferidor. Por fim, como estamos admitindo que o período de repetição do fenômeno periódico é conhecido e igual a um número real $T > 0$, para calcular b, basta resolver a equação:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

o que nos dá $b = \pm\frac{2\pi}{T}$. Portanto, encontramos duas funções trigonométricas que são "boas candidatas" para modelar o fenômeno periódico dado (uma com $b > 0$ e outra com $b < 0$). O uso de uma calculadora gráfica a partir daqui é fundamental na validação do modelo trigonométrico, ou seja, na verificação se de fato a função f representa bem a variação da grandeza y. Todo o raciocínio acima foi descrito considerando $f(x) = a \operatorname{sen}(bx + c) + d$, isto é, utilizando como base a função seno, porém poderia ter sido realizado também com a função cosseno.

PRATICANDO MODELOS TRIGONOMÉTRICOS

Pressão Arterial (ENEM 2017)

Atividade 23

Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(Kt)$ em que A, B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundos. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas. Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função P(t) obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi:

a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$

b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$

c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$

d) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$

e) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

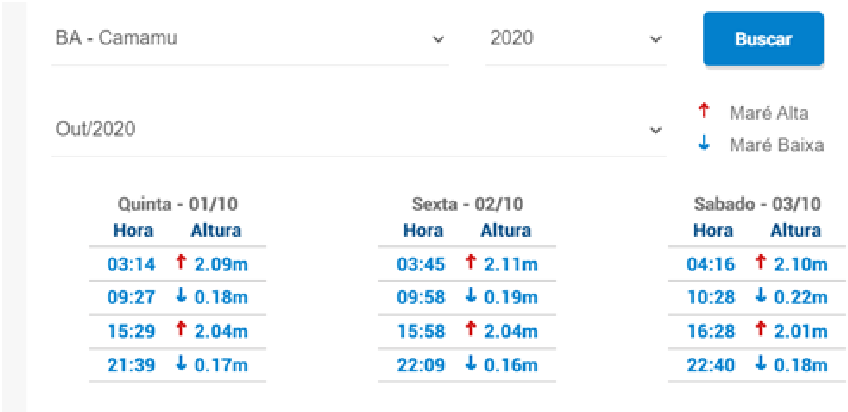
Maré baixa para realizar Snorkel

Atividade 24

Taipu de Fora é um distrito da cidade de Camamu, localizada no Sul da Bahia, onde se pode visualizar belezas paradísicas em suas praias, com mergulho de snorkel.

Figura 1.23: Fonte: Guia Viagens Brasil.com

É necessário pegar a maré com o nível mais baixo para curtir o mergulho com as maravilhas do mar. (https://www.viajenaviagem.com/2013/04/como-usar-tabua-mares/)



Quinta - 01/10		Sexta - 02/10		Sabado - 03/10	
Hora	Altura	Hora	Altura	Hora	Altura
03:14	↑ 2.09m	03:45	↑ 2.11m	04:16	↑ 2.10m
09:27	↓ 0.18m	09:58	↓ 0.19m	10:28	↓ 0.22m
15:29	↑ 2.04m	15:58	↑ 2.04m	16:28	↑ 2.01m
21:39	↓ 0.17m	22:09	↓ 0.16m	22:40	↓ 0.18m

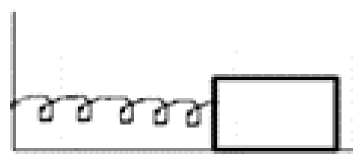
Figura 1.24: Fonte: Climatempo

Assumindo que o comportamento periódico das marés seja definido por uma senóide da forma $y = a \cdot \operatorname{sen}(bx + c) + d$, encontre um modelo apenas usando os dados acima. Assuma também que o ponto mais alto assumido pela maré na semana das medições foi $2{,}11$ m e o mais baixo, $0{,}16$ m. Utilize o modelo para realizar uma previsão sobre os horários do dia de domingo, 04/10 onde a maré atingirá o ponto mais baixo e o mais alto. Quais os melhores horários para praticar snorkel naquele dia?

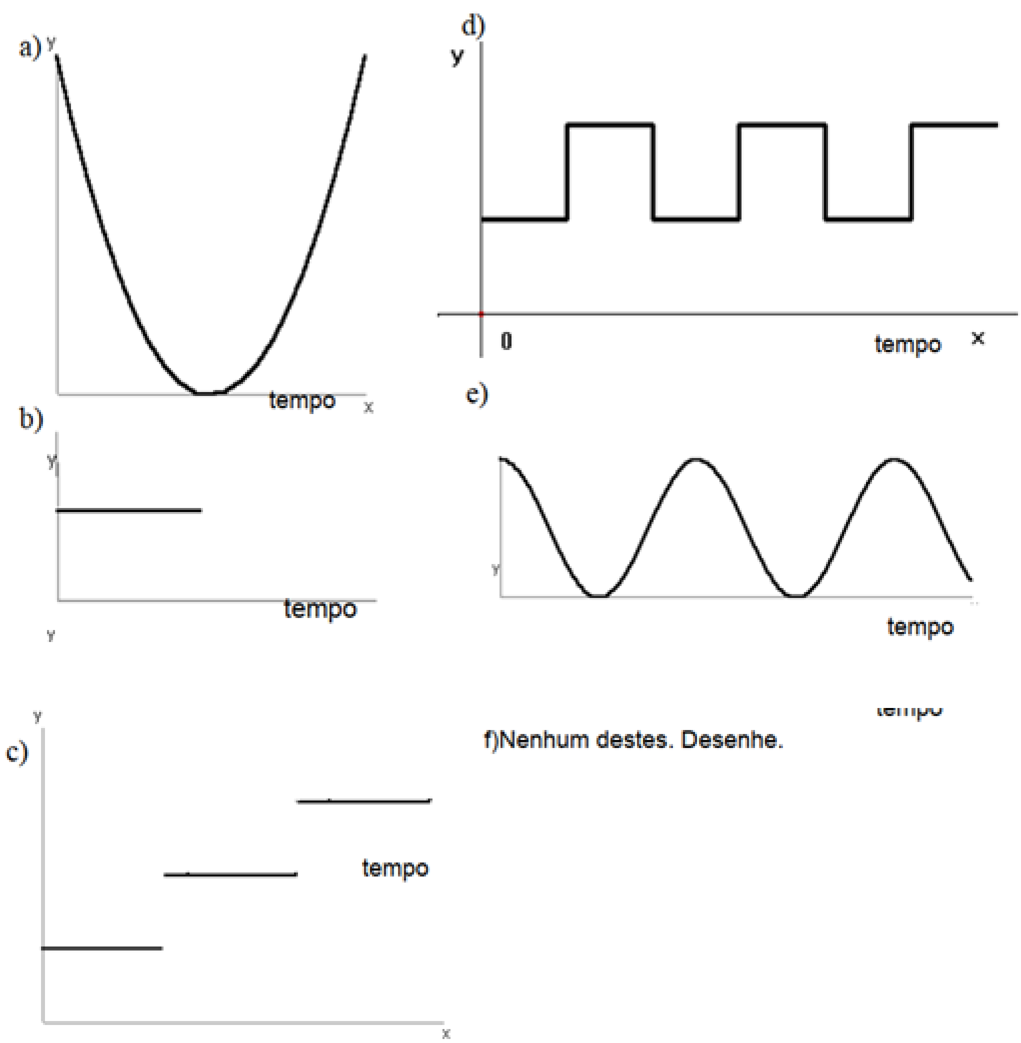
EXERCÍCIOS

Os exercícios desta seção são baseados em da Silva Ignácio (2002)

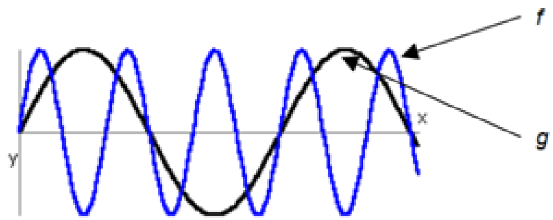
1 Um bloco está preso à extremidade de uma mola tensionada, conforme mostra a figura a seguir. Ao destravar a mola, o bloco passa a se movimentar em vaivém, levando sempre o mesmo tempo para retornar à posição original (desprezamos atritos e resistências).



Nesse sentido, qual o gráfico que melhor representa a posição horizontal y do bloco em função do tempo? Justifique sua resposta.



2 Temos duas funções representadas no mesmo sistema de eixos cartesianos, conforme podemos ver a seguir:

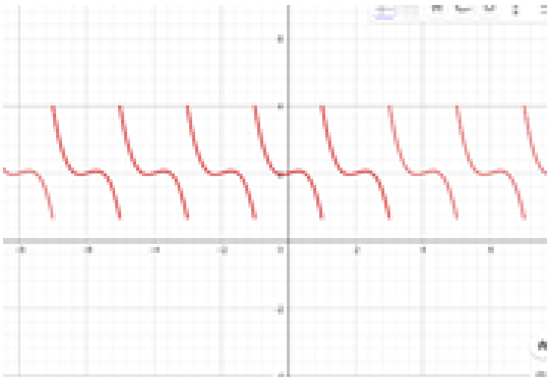


a) Compare os períodos de f e g.

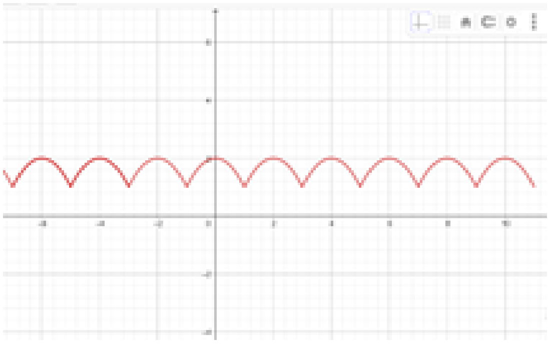
b) Compare as amplitudes de f e g

3 Nas imagens a seguir, temos funções periódicas representadas graficamente. Pinte um intervalo em O_x que corresponda ao período dessa função

a)

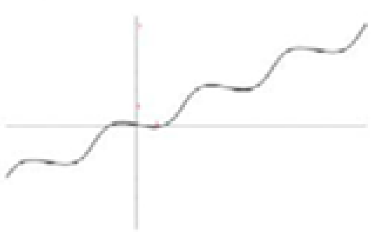


b)

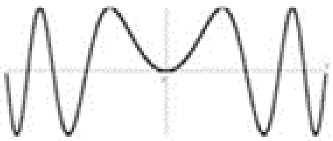


4 Quais das imagens a seguir podem representar funções periódicas? Justifique suas escolhas!

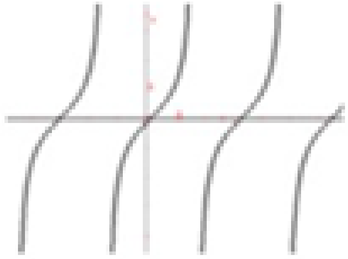
a)



b)

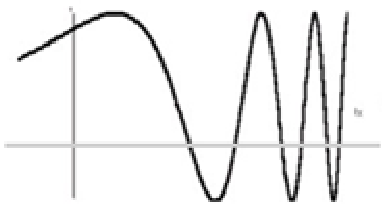


c)

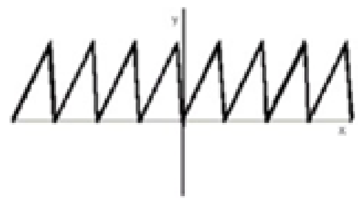


d)

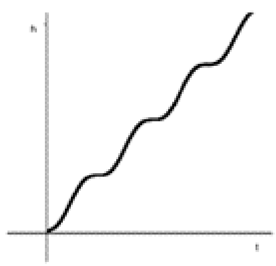
e)



f)



5 A ilustração a seguir mostra o gráfico da altura de uma bandeira em seu mastro em vários momentos.



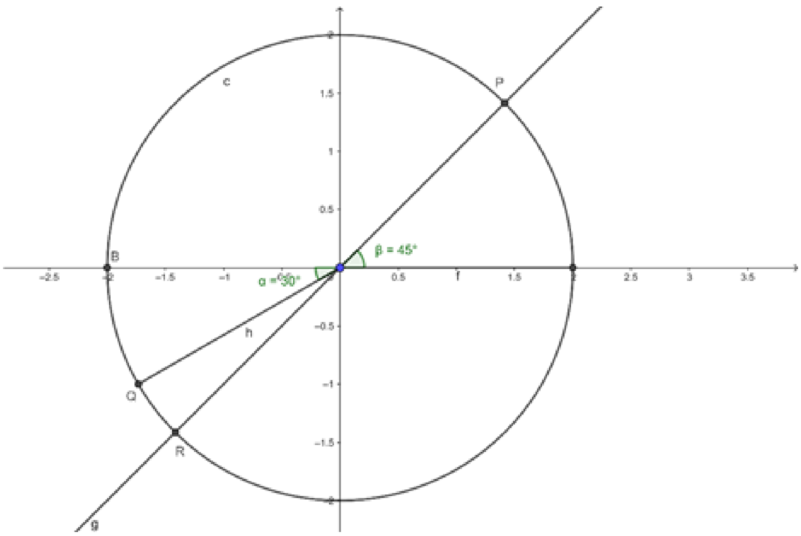
a) Descreva o movimento da bandeira levando em conta sua altura em relação ao tempo.

b) Este gráfico pode descrever uma função periódica? Justifique.

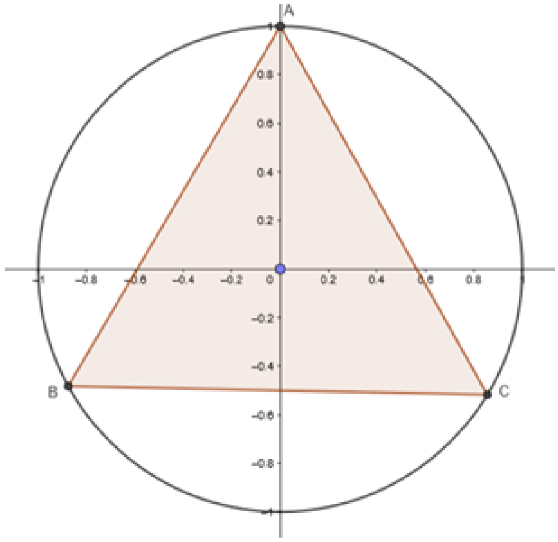
6 Uma torneira danificada começa a gotejar em um balde com água. Uma pessoa, observando, notou que do primeiro para o segundo pingo decorreram 40 segundos; do segundo para o terceiro, 20 segundos; 10 segundos do terceiro para o quarto e assim por diante. Esse seria um fenômeno periódico? Justifique.

7 Retorne ao Para Refletir: Roda Gigante Virtual e ao seu gráfico vistos no link do GeoGebra. Imagine que essa mesma roda-gigante agora roda mais rápido, levando duas vezes menos tempo para dar uma volta completa. Esboce o gráfico das duas situações: a inicial, em que a roda gigante leva um tempo t para dar uma volta completa, e a nova, em que a roda gigante leva a metade desse tempo para dar uma volta completa. Justifique sua resposta.

8 Sejam os pontos P, Q e R no círculo trigonométrico a seguir. Qual o número real x, com $0 \leq x < 2\pi$, associado a P, Q e R?



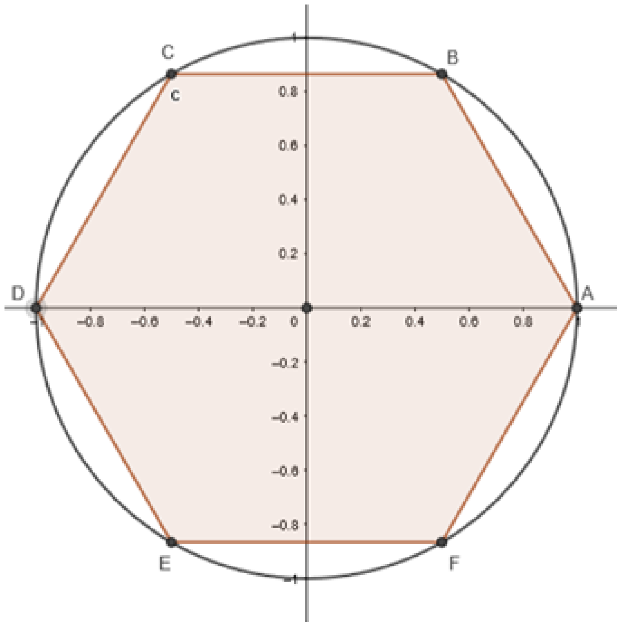
9 O triângulo equilátero ABC está desenhado no círculo trigonométrico de modo que A, B e C são pontos do círculo trigonométrico.



a) Quais são os números reais $0 < x < 2\pi$ que têm imagens nos vértices desses triângulos?

b) Que número real é simétrico, em relação ao eixo vertical, ao real 2 no círculo trigonométrico? E em relação ao eixo horizontal? E em relação à origem $(0, 0)$?

10 Na figura, tem-se um hexágono regular $ABCDEF$ com pontos sobre o círculo trigonométrico. O vértice A é a imagem do número real zero. Obtenha os números reais entre 0 e 2π associados aos outros vértices desse hexágono.



Glossário do Capítulo

Amplitude - Parâmetro associado a uma função periódica, mede a metade da diferença entre o valor máximo e o valor mínimo obtido por uma tal função (quando estes existem). Geometricamente, representa a metade da largura da menor faixa horizontal que contém o gráfico da função periódica.

Círculo Trigonométrico - círculo unitário com centro na origem do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, utilizado como referência para cálculo de senos e cossenos de números reais.

Frequência - Parâmetro associado a uma função periódica, definido como sendo o inverso multiplicativo de seu período. É um parâmetro importante no contexto das ondas sonoras para diferenciar um som mais agudo e um som mais grave.

Função de Euler - Função sobrejetiva que transforma a reta real no círculo de centro na origem e raio 1 (círculo trigonométrico). Denotando esta função por "E", cada número real t determina um arco no círculo trigonométrico com comprimento $|t|$ e extremidades dadas pelos pontos $(1, 0)$ e $E(t)$. O arco é construindo seguindo o sentido anti-horário a partir de $(1, 0)$ se $t > 0$ e no sentido horário se $t < 0$.

Função Cosseno - Função periódica que associa cada número real t à abscissa do ponto $E(t)$, onde E é a Função de Euler.

Função Periódica – Função real "f" para a qual existe um número real positivo p tal que, para todo número real x em seu domínio, com x+p também pertencendo ao domínio, apresenta mesma imagem nos pontos x e x+p. São utilizadas para descrever matematicamente fenômenos periódicos

Função Seno – Função periódica que associa cada número real t à ordenada do ponto $E(t)$, onde E é a Função de Euler.

Fenômeno Periódico – Fenômenos que se repetem exatamente da mesma maneira com o passar do tempo.

Período – Comprimento de um intervalo do domínio de uma função periódica no qual os valores das imagens e o comportamento do seu gráfico se repetem.

Radiano – Unidade de medida utilizada para mensurar o tamanho de um arco de uma circunferência. Um arco de uma circunferência que mede 1 radiano tem o comprimento exatamente igual ao seu raio.

Senóide – Gráfico de uma função envolvendo a função seno, cujas imagens são calculadas por uma expressão da forma $y = a \cdot \mathrm{sen}(bx + c) + d$, onde a, b, c e d são constantes reais e a e b são não nulos

Referências Bibliográficas

Bassanezi, R. C. (1999). Modelagem matematica: Uma disciplina emergente nos programas de formaç ao de professores. Relatório técnico, UNICAMP - IMECC, Deparamento de Matemática, São Paulo, Brasil. Disponível em http://www.ime.unicamp.br/~biomat/bio9art_1.pdf.

Brasil (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*. Ministério da Educação, Brasília, Brasil.

Costa, F. d. A. (2017). O ensino de funções trigonométricas com o uso da modelagem matemática sob a perspectiva da teoria da aprendizagem significativa. Dissertação de Mestrado, PUC-SP, São Paulo, Brasil.

da Silva Ignácio, R. (2002). Concepções sobre periodicidade em atividades de modelagem. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, Brasil.

Ekici, C. (2010). *Treatments of Trigonometric Functions During Reforms in the United States.* Tese de doutorado, The school of the thesis, Georgia, Estados Unidos.

Feijó, R. S. A. A. (2017). Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria: Um estudo com alunos do ensino m´edio do distrito federal. Dissertação de Mestrado, Universdiade de Brasília, Brasília, Brasil.

Ferreira, D. H. L., Jacobini, O. R., Campos, C. R. e Wodewotzki, M. L. L. (2013). Recursos tecnológicos e modelagem matemática: três experiências na sala de aula. *REMATEC – Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, 8(14):160–184.

Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. e Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio*, volume 1 de *Coleção do Professor de Matemática*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, Brasil, 9ª edição.

Marvila, M. G. (2017). Música e funções trigonométricas: uma abordagem interdisciplinar. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual do Norte Fluminense, Rio de Janeiro, Brasil.

Orhun, N. (2010). The gap between real numbers and trigonometric relations. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 20:175–184.

Siyepu, S. W. (2015). Analysis of errors in derivatives of trigonometric functions. *International Journal of STEM Education*, 2(1).

Soares, M. Z. M. C., editor (2010). *A Roda Gigante*, São Paulo, Brasil. Projeto Matemática Multimídia, Universidade de Campinas.

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17:91–112.