GeoGebra en Acción

Aplicaciones para la Vinculación con la Sociedad desde la Universidad Técnica Luis Vargas Torres

GeoGebra en Acción

Aplicaciones para la Vinculación con la Sociedad desde la Universidad Técnica Luis Vargas Torres

GeoGebra en Acción

Aplicaciones para la Vinculación con la Sociedad desde la Universidad Técnica Luis Vargas Torres

Autores

Leidy Virginia Realpe Cancio
Jorge Javier Quiñónez Méndez
Ronny Joel Angulo Guerrero
Lucia Germania Chávez Ruano
Juan Carlos Sarmiento Saavedra
Ivon Yakeline Romero Saavedra
Sandra Ivet Reasco Angulo

Coautores

Jady Milena Franco Castro
Edward Edu Castillo Ortiz
Niurka Janela Meza Yagual
Jean Pierre Proaño Hinojosa
Kelly Janeth Rodríguez Tenorio
Danny David Montenegro Caicedo
Ana María Borja Landázuri
Carmen Juleisy Carreño Cadena
Jandry Johao Palma Obando
Julieth Anahí Luna Martínez
Franklin Gabriel Angulo Valencia
Fray Manolo Añapa de la Cruz
Karla Brigitte Guachamin Briones
Janekson López Ortiz
Elvis Neptaly Sánchez Loor
Jean Pierre Erazo Chila

Editorial Hambatu Sapiens
Junio 2025

https://editorialhs.org

International Publication Technical Data

Title: GeoGebra en Acción. Aplicaciones para la Vinculación con la Sociedad desde la Universidad Técnica Luis Vargas Torres.

Authors:
Leidy Virginia Realpe Cancio
Jorge Javier Quiñónez M.
Ronny Joel Angulo Guerrero
Lucia Germania Chávez R.
Juan Carlos Sarmiento S.
Ivon Yakeline Romero S.
Sandra Ivet Reasco Angulo

Co-authors:
Jady Milena Franco Castro
Edward Edu Castillo Ortiz
Niurka Janela Meza Yagual
Jean Pierre Proaño H.
Kelly Janeth Rodríguez T.
Danny David Montenegro
Ana María Borja Landázuri
Carmen Juleisy Carreño C.
Jandry Johao Palma O.
Julieth Anahí Luna M.
Franklin Gabriel Angulo V.
Fray Manolo Añapa
Karla Brigitte Guachamin B.
Janekson López Ortiz
Elvis Neptaly Sánchez Loor
Jean Pierre Erazo Chila

Editorial Hambatu Sapiens
Junio 2025

https://editorialhs.org

International Publication Technical Data
Title: GeoGebra en Acción. Aplicaciones para la Vinculación con la Sociedad desde la Universidad Técnica Luis Vargas Torres. **Publisher:** Editorial Hambatu Sapiens **Cover Design:** Editorial Hambatu Sapiens **Format:** PDF **Pages:** 58 pág. **Size:** A5 14.8x21cm **System Requirements:** Adobe Acrobat Reader **Access Mode:** World Wide Web **ISBN:** Próximamente **DOI:** Próximamente **License:** GeoGebra en Acción. Aplicaciones para la Vinculación con la Sociedad desde la Universidad Técnica Luis Vargas Torres, está licenciada bajo CC BY-NC-ND 4.0 ©

1ra edición, año 2025. Publicado por Editorial Hambatu Sapiens.

Índice

Contenido **Pág.**

PROLOGO

En el contexto actual de la educación superior, donde la innovación y la tecnología son pilares fundamentales para la transformación del aprendizaje, surge la necesidad de integrar herramientas digitales que potencien el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la conexión con la realidad social. Este libro, GeoGebra en Acción, representa un esfuerzo colectivo que responde a ese desafío, al mostrar cómo el uso didáctico de GeoGebra trasciende las aulas y se convierte en un puente entre el conocimiento matemático y su aplicación en la vida real, especialmente en procesos de vinculación con la comunidad.

El presente texto reúne experiencias y propuestas pedagógicas desarrolladas en la Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas, en las que docentes y estudiantes han explorado las posibilidades del software GeoGebra como recurso transversal para fortalecer competencias matemáticas, fomentar la creatividad y construir aprendizajes significativos en diversos niveles de formación. A través de sus capítulos, el lector encontrará no solo fundamentos teóricos y técnicos del uso de GeoGebra, sino también aplicaciones prácticas en áreas como álgebra lineal, geometría dinámica, análisis estadístico y cálculo diferencial e integral.

Lo más valioso de esta obra es su enfoque contextualizado y su sentido de compromiso social. Cada propuesta didáctica ha sido pensada no solo como una estrategia de enseñanza, sino como una oportunidad para incidir en procesos formativos que conectan al estudiante universitario con las necesidades del entorno. En ese sentido, este libro es también una invitación a repensar la educación matemática como una herramienta para el desarrollo comunitario y la transformación social.

Felicitamos a los autores y coautores por su valioso aporte a la literatura académica y por ofrecer a la comunidad educativa una obra útil, práctica y, sobre todo, inspiradora. Estamos seguros de que será de gran utilidad para docentes, investigadores y estudiantes interesados en la innovación educativa y la aplicación de tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas.

Unidad 1

Introducción y Fundamentos de GeoGebra para la Vinculación Estudiantil

Introducción

GeoGebra es una plataforma educativa interactiva y gratuita que ha transformado la enseñanza de las matemáticas al proporcionar a los estudiantes herramientas para explorar conceptos complejos de manera visual y dinámica (Rivero, 2021). A través de su interfaz intuitiva, GeoGebra integra diversas ramas de las matemáticas, como álgebra, geometría, cálculo y estadística, en un solo entorno.

Esta integración facilita que los estudiantes visualicen relaciones matemáticas y experimenten con diferentes representaciones gráficas, ayudándoles a comprender de manera más efectiva conceptos abstractos que suelen ser difíciles de entender solo mediante fórmulas y ecuaciones. La disponibilidad de GeoGebra en plataformas como computadoras, tabletas y teléfonos móviles también favorece su accesibilidad, permitiendo que los estudiantes lo utilicen tanto en el aula como fuera de ella, promoviendo el aprendizaje autónomo (Rivero, 2021).

El propósito de esta unidad es familiarizar a los estudiantes con las funcionalidades y herramientas básicas de GeoGebra para que puedan aplicar este software en la resolución de problemas matemáticos. A lo largo de la unidad, aprenderán a crear gráficos, resolver ecuaciones y trabajar con figuras geométricas de manera interactiva. Este enfoque práctico permite que los estudiantes experimenten con las matemáticas, visualizando cómo cambian las representaciones al modificar parámetros, lo que facilita una comprensión más profunda de los temas tratados. La capacidad de interactuar directamente con los conceptos matemáticos fortalece las habilidades de resolución de problemas y promueve el desarrollo del pensamiento crítico (Rodríguez & Sánchez, 2022).

GeoGebra también se destaca por fomentar el trabajo colaborativo entre los estudiantes, ya que permite compartir construcciones y soluciones, promoviendo un intercambio de ideas que enriquece el proceso de aprendizaje. De esta manera, los estudiantes pueden aprender unos de otros, reforzando su comprensión y generando un ambiente de aprendizaje más dinámico y participativo (Cabrera, Torres, et al., 2022). En resumen, GeoGebra es una herramienta educativa esencial que no solo facilita la enseñanza de las matemáticas, sino que también transforma el proceso de aprendizaje al hacerlo más accesible, interactivo y atractivo para los estudiantes.

Marco Teórico

Instalación y configuración de GeoGebra

GeoGebra es una herramienta gratuita disponible para varias plataformas, como Windows, Mac, Linux, iOS y Android. Su instalación es simple y, al iniciar el software, los usuarios pueden configurar una descarga desde su sitio web oficial y personalizar sus preferencias según el tipo de trabajo que deseen realizar, eligiendo entre las diversas vistas disponibles: gráfica, algebraica, hoja de cálculo, CAS y 3D. Esto permite a los estudiantes personalizar su entorno de trabajo de acuerdo con sus necesidades y el tipo de problema matemático que se resolverá (Liste, 2021).

Exploración de la interfaz y herramientas principales

La interfaz de GeoGebra es intuitiva y diseñada para ser accesible tanto para estudiantes como para docentes, lo que facilita su uso en el aula. Al abrir el software, los usuarios se encuentran con varias secciones clave: la barra de herramientas, la ventana gráfica, la vista algebraica y la barra de entrada. Estas áreas son fundamentales para la creación y manipulación de objetos matemáticos, tanto visualmente como algebraicamente (López, 2019).

La barra de herramientas

En la parte superior de la pantalla se encuentra la barra de herramientas, que está organizada en varias categorías que permiten al usuario crear figuras geométricas, líneas, segmentos, puntos y otras construcciones matemáticas. Incluye herramientas para trabajar con ecuaciones algebraicas y crear gráficos de funciones. Esta organización facilita el acceso a las herramientas necesarias sin abrumar al usuario con opciones innecesarias (González, Rodríguez, & Silva, 2023).

Ventana gráfica

La ventana gráfica es el área principal donde los objetos matemáticos creados en GeoGebra se representan visualmente en la pantalla. Aquí, los estudiantes pueden ver cómo las ecuaciones o construcciones geométricas se transforman a medida que se modifican los parámetros deseados. Esta visualización permite una comprensión más profunda de las relaciones matemáticas por medio de la tecnología en la educación, ya que los estudiantes pueden observar cómo cambian instantáneamente los resultados en tiempo real (Pérez & Ramírez, 2023).

Vista algebraica

La vista algebraica, situada al lado de la ventana gráfica, muestra las representaciones algebraicas de los objetos visualizados en el gráfico. Esta vista es útil para la resolución de problemas matemáticos y es esencial porque permite a los usuarios observar la relación directa entre las figuras geométricas y sus ecuaciones correspondientes (González, Rodríguez, & Silva, 2023).

Barra de entrada

En la parte inferior de la interfaz se encuentra la barra de entrada, que permite a los usuarios escribir ecuaciones, funciones y comandos matemáticos, que aparecen automáticamente en la ventana gráfica y en la vista algebraica. Esto permite que los usuarios experimenten y visualicen sus cálculos en tiempo real. Además, la barra de entrada soporta funciones avanzadas como derivadas, integrales y resolución de ecuaciones, lo que expande las capacidades de GeoGebra más allá de la geometría básica (Pérez & Ramírez, 2023).

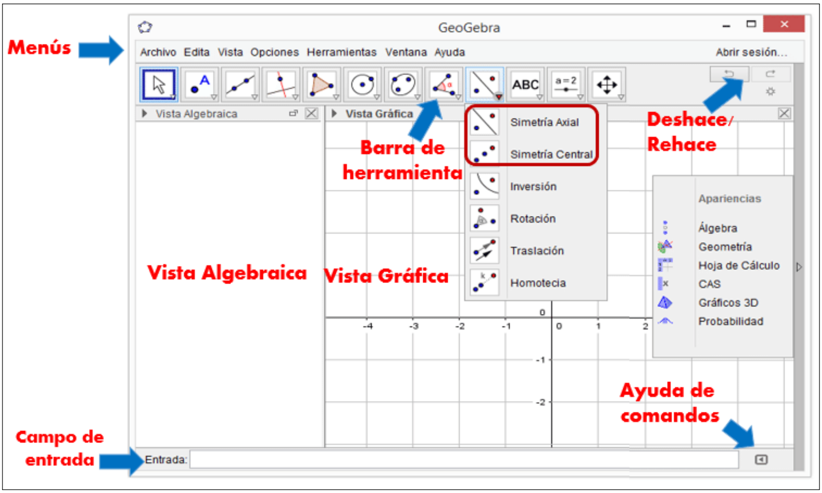
Interactividad y manipulación de objetos.

Una de las principales características de GeoGebra es su capacidad de interactividad, ya que los usuarios pueden manipular objetos matemáticos directamente en la ventana gráfica, como mover puntos, modificar parámetros y ajustar figuras geométricas. Esta interacción activa con los objetos matemáticos facilita la comprensión de conceptos complejos, ya que los estudiantes pueden observar cómo los cambios afectan las relaciones entre los elementos matemáticos de forma directa y en tiempo real (González, 2023).

Modos adicionales y personalización

GeoGebra ofrece diferentes modos de trabajo, como la vista 3D para explorar objetos geométricos tridimensionales, la hoja de cálculo para trabajar con datos y funciones estadísticas, y el sistema CAS (álgebra computacional) para resolver ecuaciones y realizar cálculos simbólicos. Además, los usuarios pueden personalizar la apariencia de los gráficos y objetos, lo que facilita su uso en diferentes contextos educativos y permite a los docentes adaptar la herramienta a las necesidades específicas de sus estudiantes (Pérez & Ramírez, 2023).

Ilustración 1 *Ventana inicial de GeoGebra*



Nota: Adaptado de García-Cuéllar y Flores Salazar (2017)

Modos de trabajo: Vista gráfica, algebraica, hoja de cálculo, CAS y 3D

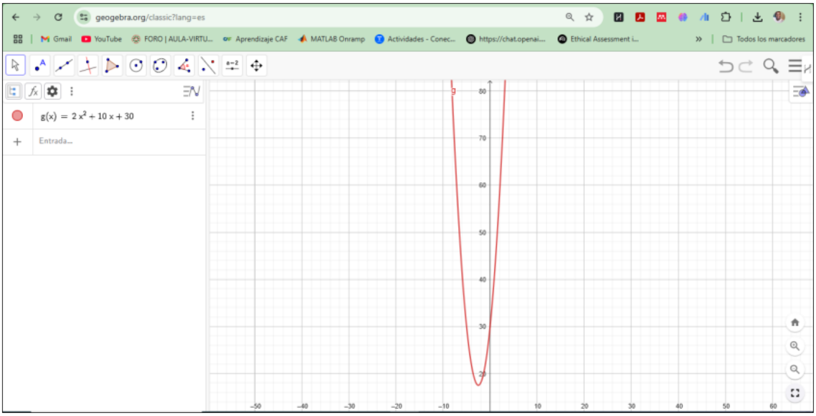
GeoGebra ofrece una variedad de modos de trabajo que permiten a los usuarios explorar las matemáticas de diversas maneras, diseñado para facilitar la interacción con objetos matemáticos, adaptándose tanto a principiantes como a usuarios más capacitados (López, 2019).

A continuación, exploramos en detalle los principales modos de trabajo disponibles en GeoGebra: vista gráfica, vista algebraica, hoja de cálculo, CAS y 3D.

Vista gráfica

La vista gráfica es uno de los modos más utilizados de GeoGebra, especialmente por su capacidad para representar visualmente funciones matemáticas, ecuaciones geométricas y transformaciones. En esta vista, los usuarios pueden crear y manipular gráficos en dos dimensiones, lo que facilita la comprensión de conceptos algebraicos y geométricos. Los estudiantes pueden introducir funciones matemáticas como $f(x) = 2x^2 + 10x + 30$, y observar cómo sus gráficas se generan en tiempo real (Lezcano & Leal, 2021).

Ilustración 2 *Gráfica de una parábola*



Nota: Elaboración propia utilizando GeoGebra en línea

Una de las características clave de la vista gráfica es su interactividad, que permite mover puntos, cambiar parámetros de las ecuaciones y observar cómo estos cambios afectan la representación gráfica. Esto resulta útil para enseñar conceptos como la pendiente de una recta, las intersecciones de funciones, los máximos y mínimos de una curva, o el comportamiento asintótico de funciones. Además, al trabajar en la vista gráfica, los estudiantes tienen la posibilidad de experimentar con figuras geométricas, como círculos, polígonos y transformaciones, ayudando a visualizar de manera más intuitiva conceptos como la simetría, la congruencia y las áreas (Pérez & Ramírez, 2023).

Vista algebraica

La vista algebraica de GeoGebra es esencial para quienes desean trabajar directamente con expresiones algebraicas, observando las ecuaciones y fórmulas matemáticas que corresponden a las construcciones geométricas realizadas en la vista gráfica. Por ejemplo, si un estudiante crea una parábola en la vista gráfica, la vista algebraica mostrará su ecuación correspondiente.

Una de las principales ventajas de esta vista es que ayuda a los estudiantes a conectar las representaciones gráficas con las algebraicas, facilitando la comprensión de cómo se derivan y transforman las ecuaciones a partir de figuras geométricas. También permite resolver ecuaciones de manera simbólica, simplificar expresiones y verificar identidades algebraicas. Esta funcionalidad es particularmente útil en la enseñanza del álgebra, ya que permite a los estudiantes realizar operaciones matemáticas con una representación visual clara (González et al., 2023).

Hoja de cálculo

La hoja de cálculo es otro modo de trabajo que GeoGebra incorpora, permitiendo a los usuarios organizar y manipular datos de manera estructurada. Este modo es ideal para trabajar con tablas de datos, realizar cálculos numéricos y analizar funciones estadísticas. Los usuarios pueden introducir valores en las celdas y luego usar fórmulas y funciones matemáticas para realizar cálculos, de manera similar a programas como Microsoft Excel (Lezcano & Leal, 2021).

Una característica poderosa de la hoja de cálculo de GeoGebra es su integración con la vista gráfica. Por ejemplo, al crear una tabla de valores de una función, los usuarios pueden graficar esos valores en la vista gráfica y observar cómo se representa visualmente la relación entre los datos. Esto resulta especialmente útil en estadística y álgebra, donde se pueden representar gráficos de dispersión, realizar regresiones lineales y explorar otras relaciones entre variables. Además, la hoja de cálculo también se puede utilizar para manipular matrices y realizar operaciones matemáticas avanzadas, como el cálculo de determinantes o la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (Pérez & Ramírez, 2023).

CAS (Sistema de álgebra computacional)

El CAS (*Computer Algebra System*) de GeoGebra es una herramienta avanzada que permite trabajar con álgebra simbólica. A través de este modo, los usuarios pueden realizar cálculos simbólicos como derivadas, integrales, simplificación de expresiones algebraicas, resolución de ecuaciones y mucho más. El CAS es ideal para estudiantes de niveles más avanzados, como aquellos que cursan cálculo, álgebra abstracta y teoría de números (Lezcano, 2021).

En el modo CAS, los usuarios pueden introducir expresiones algebraicas y recibir resultados exactos en forma de ecuaciones, fracciones y raíces cuadradas, entre otras. Por ejemplo, al ingresar una expresión como $f(x) = 6x^2 + 11x - 6$, el sistema puede calcular las raíces exactas de la ecuación y mostrar el proceso de factorización paso a paso. Esta capacidad hace del CAS una herramienta invaluable para resolver problemas matemáticos complejos y para entender profundamente los procedimientos algebraicos (González et al., 2023).

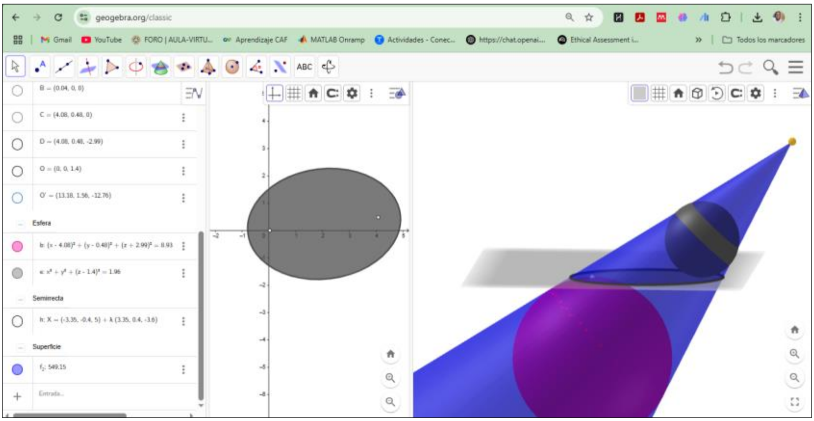
Además, el CAS de GeoGebra se puede combinar con la vista gráfica, lo que permite a los usuarios observar simultáneamente la representación gráfica de una función junto con sus propiedades algebraicas. Esto facilita el análisis y la interpretación de conceptos como los puntos de intersección, las derivadas y los integrales, proporcionando un enfoque completo para el estudio de las matemáticas (González et al., 2023).

Vista 3D

La vista 3D de GeoGebra permite a los usuarios trabajar con objetos tridimensionales, lo que es especialmente útil para explorar conceptos de geometría espacial, como los sólidos, superficies y curvas en 3D. Este modo es ideal para enseñar temas como la geometría de los cuerpos, la representación de funciones de varias variables y el cálculo de volúmenes y áreas en tres dimensiones (Pérez & Ramírez, 2023).

En la vista 3D, los usuarios pueden crear figuras como esferas, conos, pirámides y otras formas geométricas, y luego manipularlas para observar cómo cambian sus propiedades al modificar parámetros. Por ejemplo, es posible explorar cómo se calcula el volumen de un sólido de revolución al girar una función en torno a un eje. Esta visualización en 3D permite a los estudiantes desarrollar una comprensión más intuitiva de los conceptos geométricos y espaciales, y facilitar la resolución de problemas complejos de cálculo y geometría (Pérez & Ramírez, 2023).

Ilustración 3 Gráfica de la elipse en 3D



Nota: Elaboración propia utilizando GeoGebra en línea

Creación y Manipulación de Objetos Matemáticos en GeoGebra

La creación y manipulación de objetos matemáticos es una de las características más destacadas de GeoGebra, lo que lo convierte en una herramienta invaluable en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. A través de la interfaz interactiva y dinámica que ofrece este software, los estudiantes y profesores tienen la posibilidad de crear objetos geométricos, algebraicos y funcionales que facilitan una comprensión más profunda de conceptos matemáticos simples y complejos (Gilbert, 2021).

A continuación, se expone en detalle cómo se lleva a cabo la creación y manipulación de estos objetos dentro de GeoGebra y su impacto en la educación matemática.

Creación de Objetos Geométricos

Los aspectos más importantes de GeoGebra es su capacidad para crear objetos geométricos en un espacio visual interactivo de la cual pueden generar diversos tipos de figuras y elementos geométricos mediante simples clics o comandos específicos. Estos objetos incluyen puntos, segmentos de recto, circunferencias, polígonos, vectores, y más (Gilbert, 2021).

Para crear un punto, solo es necesario hacer clic en el área de la vista gráfica, y el punto se generará en las coordenadas que corresponden a la ubicación del clic. Los puntos también pueden ser definidos algebraicamente, por ejemplo, como $A = (2, 3)$, lo que hace que el software sitúe el punto en esas coordenadas. Lo mismo ocurre con los segmentos: el usuario puede definirlos geométricamente mediante el arrastre de uno de sus extremos.

Unidad 2

Álgebra Lineal y Aplicaciones Avanzadas

Introducción

El álgebra lineal es una rama fundamental de las matemáticas, esencial para modelar y analizar sistemas complejos en diversas disciplinas, desde la física hasta la economía y la computación (Strang, 2016). El álgebra lineal permite entender y describir el mundo que nos rodea, tal como lo expresó Galileo Galilei: "La matemática es la lengua en la que Dios ha escrito el universo".

La historia del álgebra lineal se remonta a los antiguos griegos, quienes utilizaban técnicas algebraicas para resolver problemas geométricos. No obstante, fue en el siglo XIX cuando se consolidó como una disciplina matemática independiente gracias a los trabajos de matemáticos como Augustin Louis Cauchy y Hermann Grassmann (Flores Vargas, 2015). Hoy en día, el álgebra lineal es una herramienta esencial en campos como la ingeniería, la física, la economía y la computación, permitiendo modelar, analizar sistemas complejos, hacer predicciones y tomar decisiones informadas.

Esta unidad explorará los conceptos fundamentales del álgebra lineal y sus aplicaciones avanzadas, desde la teoría de espacios vectoriales hasta el análisis de componentes principales. Se destacará el uso de GeoGebra como recurso digital para la representación y manipulación de objetos matemáticos, facilitando la comprensión y aplicación práctica de los contenidos.

Matrices

Definición y notación

Una matriz es un arreglo rectangular de números dispuestos en filas y columnas (Lay, 2012). Según Varios (2014), las matrices agrupan cantidades o funciones caracterizadas por el número de filas y columnas, pudiendo ser cuadradas o rectangulares. Las matrices se utilizan para describir sistemas de ecuaciones lineales, realizar un seguimiento de los coeficientes de una aplicación lineal y registrar datos que dependen de varios parámetros.

Operaciones con matrices

Suma y resta de matrices

Para sumar o restablecer matrices, deben tener el mismo orden (igual número de filas y columnas). La operación se realiza sumando o restando los elementos correspondientes de cada matriz (Artin, 2011).

Ejemplo práctico:

Sean las matrices y de orden 3x3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

La suma es la matriz cuyos elementos son. $A + Ba_{yo} + b_{yo}$

Multiplicación de matrices

La multiplicación de matrices se realiza aplicando la regla de "fila por columna". El elemento de la matriz producto se obtiene multiplicando la fila de por la columna de y sumando los productos correspondientes (Strang, 2016).

Ejemplo práctico:

Sean y matrices de orden 3x3, el elemento se calcula como: $ABdo_{11}$

$$do_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

Representación y Manipulación de Matrices en GeoGebra

GeoGebra permite crear, visualizar y operar matrices de manera interactiva.

Ingresar a GeoGebra: Abrir GeoGebra y activar las vistas de Cálculo Simbólico (CAS) y Hoja de Cálculo.

Generar elementos: Utilizar la función *AleatorioEntre*(0,9) para generar elementos de la matriz en la hoja de cálculo.

Crear la matriz: Seleccione los datos y cree la matriz desde el menú contextual.

Operaciones: Definir las matrices y utilizar los comandos correspondientes en la barra de entrada para realizar operaciones como suma o multiplicación.

Ejemplo detallado en GeoGebra:

Paso 1: Abrir GeoGebra y activar las vistas CAS y Hoja de Cálculo.

Paso 2: En la Hoja de Cálculo, ingrese Aleatorio Entre (0,9) en la celda A1.

Paso 3: Arrastrar la fórmula hasta la celda C1 para obtener tres números aleatorios en la primera fila.

Paso 4: Arrastrar las celdas A1:C1 hasta la fila 3 para obtener una matriz de 3x3 con números aleatorios.

Paso 5: Seleccione la matriz generada (A1:C3), haga clic derecho y seleccione "Crear" > "Matriz". Esto creará una matriz llamada "matriz1" que aparecerá en la Vista Algebraica.

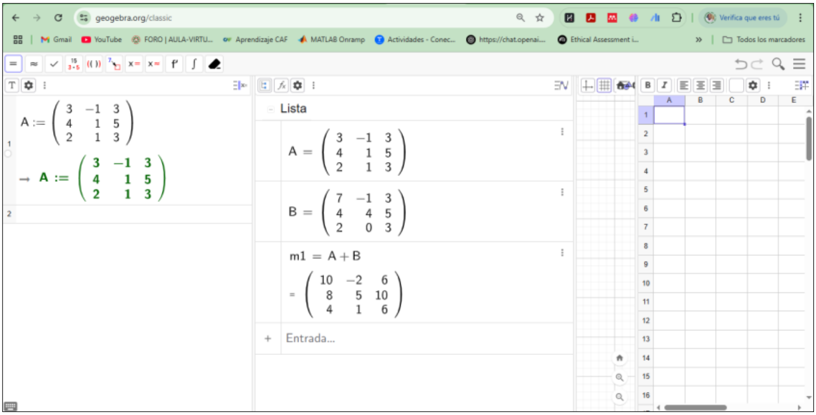
Paso 6: Repetir los pasos para crear otra matriz, "matriz2".

Paso 7: En la Vista CAS, ingresar "matriz1 + matriz2" y presionar Enter para obtener la suma de las matrices.

Paso 8: Para la multiplicación, ingresar "matriz1 * matriz2" y presionar Enter.

Esta funcionalidad facilita la experimentación y el aprendizaje activo de los conceptos de matrices.

Ilustración 4 Suma de matrices



Operaciones con Vectores y Espacios Vector

Definición de vector

Un vector es una cantidad que posee magnitud y dirección (Strang, 2016). Los vectores pueden representarse geométricamente como segmentos de línea dirigidos en un espacio, y algebraicamente como listas ordenadas de números (componentes).

Operaciones con vectores

- **Suma y Resta:** Se suman o restan los componentes correspondientes (Artin, 2011).
- **Multiplicación escalar:** Cada componente del vector se multiplica por un número real (Munkres, 2000).
- **Producto escalar:** Es la suma de los productos de las componentes correspondientes de dos vectores (Lay,

2012). El producto escalar puede utilizarse para calcular el ángulo entre dos vectores.

Espacios vectoriales

Un espacio vectorial es un conjunto de vectores que cumplen con ciertas propiedades que permiten realizar operaciones de suma y multiplicación escalar (Axler, 2015). Los espacios vectoriales son fundamentales en álgebra lineal y tienen numerosas aplicaciones en física, ingeniería y ciencias de la computación.

Ejemplo Práctico en GeoGebra

Para representar el vector: $A = (5 , 65º)$

Paso 1: Abrir GeoGebra y seleccionar la vista gráfica.

Paso 2: Ubicar un punto en el origen (0, 0).

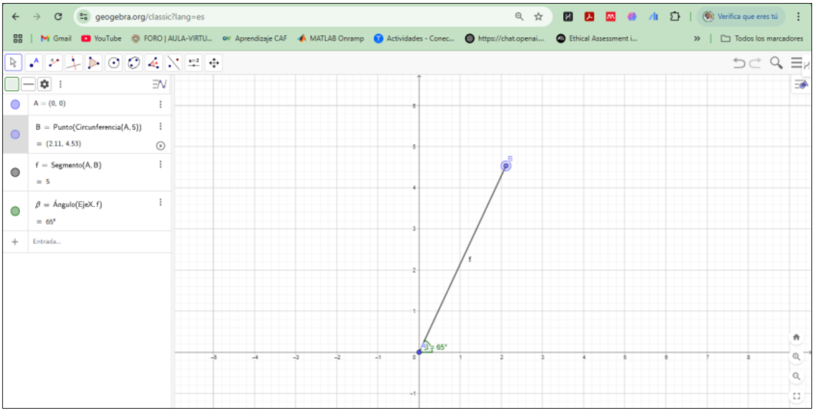
Paso 3: Utilizar la herramienta "Segmento de longitud dada" para construir un segmento con longitud 5 desde el origen.

Paso 4: Utilizar la herramienta "Ángulo dada su amplitud" para crear un ángulo de 65° con respecto al eje x.

Paso 5: Ajustar el segmento para que coincida con el ángulo creado.

Paso 6: Utilice la herramienta "Vector" para representar el vector desde el origen hasta el punto final del segmento.

Ilustración 5 *Vector en GeoGebra*



Resolución de Ecuaciones Lineales

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones que se resuelven simultáneamente (Lang, 1987). Estos sistemas pueden tener una única solución, infinitas soluciones o ninguna solución, dependiendo de la relación entre las ecuaciones. Los métodos más comunes para resolverlos son:

- **Sustitución:** Resolver una ecuación para una variable y sustituir en las demás (Artin, 2011).
- **Eliminación:** Eliminar variables sumando o restando ecuaciones (Lay, 2012).
- **Método de Gauss:** Utilizar operaciones elementales para llevar el sistema a una forma escalonada (Gauss, citado en Lay, 2012). El método de Gauss-Jordan es

una extensión del método de Gauss que simplifica aún más el proceso.

Resolución y Representación en GeoGebra

GeoGebra permite resolver sistemas de ecuaciones tanto de forma simbólica (CAS) como gráfica.

Paso 1: Abrir GeoGebra y seleccionar la vista CAS.

Paso 2: Ingresar las ecuaciones en la vista CAS. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$$

Paso 3: Utilizar el comando Resolver para encontrar la solución del sistema.

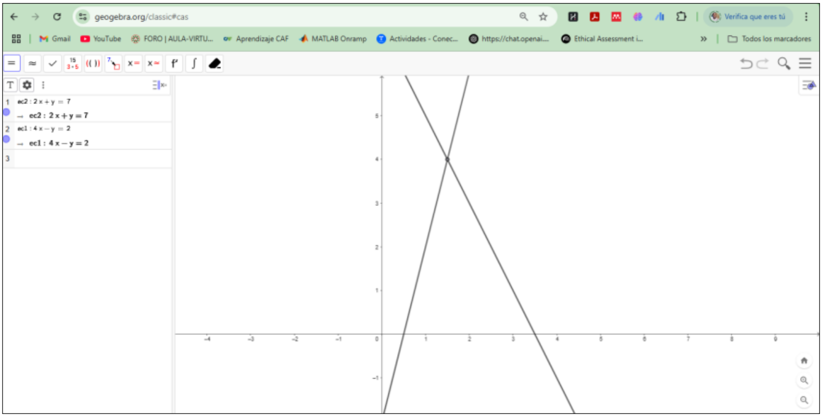
Paso 4: Para la representación gráfica, cambie a la vista gráfica e ingrese las ecuaciones directamente:

$$2x + 3y = 7$$

$$4x - y = 2$$

Paso 5: Observar la intersección de las rectas correspondientes, que representa la solución del sistema.

Ilustración 6 *Intersección de rectas*



Para sistemas de tres variables, utilice la vista 3D para visualizar los planos y su intersección.

Análisis Estadístico y Representación de Datos

Fundamentos del Análisis Estadístico

El análisis estadístico permite examinar datos y extraer conclusiones significativas (Tukey, 1977). Fisher (1925) lo define como “el arte de hacer inferencias a partir de datos”. El análisis estadístico puede utilizarse para describir datos, identificar patrones y tendencias, y hacer predicciones basadas en la información disponible.

Aplicaciones y Visualización en GeoGebra

GeoGebra facilita la organización y representación gráfica de datos, permitiendo realizar análisis descriptivos, identificar patrones y tendencias, y visualizar los resultados mediante diagramas y gráficos interactivos (Cleveland, 1993).

Ejemplo práctico en GeoGebra:

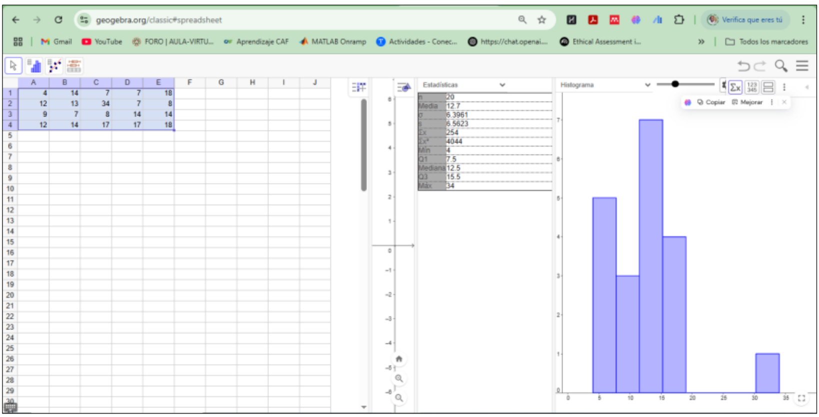
Paso 1: Abrir GeoGebra y seleccionar la vista de Hoja de Cálculo.

Paso 2: Ingresar los datos en las celdas de la hoja de cálculo.

Paso 3: Seleccione los datos y utilice la herramienta "Análisis de una variable" para calcular estadísticas descriptivas como la media, la mediana y la desviación estándar.

Paso 4: Utilizar las herramientas de gráficos para crear histogramas, diagramas de caja y otros gráficos que permitan visualizar la distribución de los datos.

Ilustración 7 *Creación de histogramas*



Unidad 3

Geometría Dinámica y Álgebra en la Enseñanza de las Matemáticas

Introducción

La integración de la geometría dinámica en la educación del álgebra ha transformado los métodos pedagógicos, conectando la percepción espacial con el pensamiento abstracto (Centro de Matemática y Ciencias, sf). Plataformas interactivas como GeoGebra mejoran la habilidad de los alumnos para generalizar propiedades matemáticas manipulando elementos geométricos y algebraicos simultáneamente (Antezana & Martínez, 2024).

Este enfoque diverso supera las limitaciones de las técnicas tradicionales, donde la separación entre representaciones gráficas y simbólicas dificulta la creación de conceptos integrados (Antezana & Martínez, 2024). La geometría dinámica no solo eleva el desempeño académico, sino que también genera nuevos dominios problemáticos que fomentan procesos cognitivos avanzados (Carhuallanqui & Peñaloza, 2024).

Estudios recientes bajo la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) subrayan tres beneficios principales de esta integración (Juan di et al., 2021):

1. La formulación de praxeologías matemáticas que enlazan técnicas manipulativas y teorías algebraicas.
2. El establecimiento de esquemas de uso tecnológico que favorecen la independencia investigativa.

3. La aparición de conflictos semióticos productivos en la transición entre registros gráficos y simbólicos.

Estos descubrimientos coinciden con investigaciones metaanalíticas que revelan mayores mejoras en el aprendizaje cuando se combinan geometría dinámica con métodos de resolución de problemas (Juan di et al., 2021).

Geometría Dinámica y Álgebra

La integración de la geometría dinámica y el álgebra en la enseñanza se basa en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), que promueve la construcción de praxeologías mediante tecnologías matemáticas como GeoGebra (Juandi et al., 2021). Estos entornos facilitan la transición entre el razonamiento concreto y abstracto, mejorando la comprensión de patrones algebraicos y propiedades geométricas (Juandi et al., 2021). Además, el modelo de Van Hiele permite evaluar el progreso de los estudiantes desde la visualización hasta la deducción formal, mientras que los conflictos semióticos generados al traducir entre registros gráficos y algebraicos fortalecen la capacidad de generalización (Jones, 2000).

En este marco teórico se abordarán los siguientes aspectos:

Construcción de figuras geométricas dinámicas.

Transformaciones geométricas: traslaciones, reflexiones, rotaciones y homotecias.

Relaciones geométricas: mediatrices, bisectrices, ángulos y áreas.

Expresión algebraica de relaciones geométricas.

Resolución de ecuaciones y desigualdades gráficamente.

Construcción de Figuras Geométricas Dinámicas

La geometría dinámica se define como el estudio y la construcción de figuras geométricas mediante herramientas interactivas que permiten modificar parámetros en tiempo real (Marco, 2000). Estas herramientas facilitan la visualización de propiedades invariantes y la exploración de relaciones matemáticas, fomentando un aprendizaje activo y constructivista.

Definición y características

Una figura geométrica dinámica es aquella que se construye en un entorno computacional interactivo, en el que sus elementos (puntos, rectas, circunferencias, polígonos) pueden ser manipulados para observar cambios en sus propiedades sin perder ciertas invariantes (Marco, 2000).

Características

Interactividad: Permite al usuario mover elementos y ver inmediatamente el efecto en la figura.

Retroalimentación visual: La modificación de parámetros genera cambios visuales que evidencian relaciones geométricas.

Exploración de invariantes: Aun cuando se modifican los elementos, algunas propiedades permanecen constantes (por ejemplo, la congruencia en transformaciones isométricas).

Ejercicio práctico

Construcción de figuras geométricas dinámicas utilizando GeoGebra para pasar de un plano estático a un estado dinámico.

Paso 1: Creación de un segmento de recta

Inicia GeoGebra.

Haga clic en la opción "Segmento de recta".

Crea un segmento de recto de 6 unidades

Paso 2: Construcción de una semicircunferencia

Ve a la ventana de circunferencias y da clic en la opción "Semicircunferencia".

Une el punto A y el punto B, obteniendo un arco.

Paso 3: Ubicación de un punto en la semicircunferencia

Ubica un punto sobre la semicircunferencia para que el triángulo siempre presente un ángulo de 90°.

Paso 4: Graficación del triángulo

Haga clic en la ventana "Vista Gráfica".

Da clic en "Eje" para desaparecer los ejes.

En el icono "Polígono", gráfica el triángulo.

Paso 5: Hacer invisible la semicircunferencia

Veamos la "Vista Algebraica".

Haz clic en el círculo junto a la semicircunferencia para hacerla invisible.

Paso 6: Graficación de las áreas correspondientes del triángulo

Haz clic en "Polígono Regular".

Ingrese una longitud de 4 unidades para cada lado del triángulo.

Paso 7: Dar color a cada área

Da clic derecho en cada área y selecciona "Propiedades del objeto".

Elige un color para cada área y renombra cada polígono como "Área_a", "Área_b" y "Área_c".

Paso 8: Modificación de las áreas con fórmula Latex

Ve a la opción "Texto" y selecciona "Fórmula Latex (Raíces y fracciones)".

Modifica cada área con la fórmula correspondiente.

Para llevar cada valor al área correspondiente, ve a la opción "Texto" y selecciona "Objeto".

Selecciona cada una de las áreas.

Paso 9: Dar valor a cada área y comprobar el Teorema de Pitágoras

Haga clic en "Texto", luego en "Objeto".

Busca el área ya ingresada (Área_a, Área_b, Área_c) y GeoGebra mostrará las áreas de cada lado del triángulo.

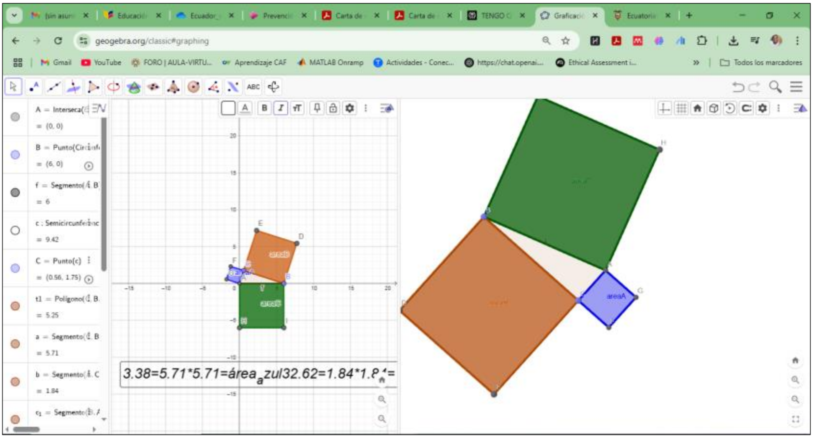
Paso 10: Agregar ángulos a cada vértice

Haga clic en la ventana "Ángulo".

Haga clic en las rectas AB-BC=90°, CB-AC (aproximadamente 45°), y AC-AB (aproximadamente 45°).

Observa que el triángulo presenta un ángulo de 90°, es decir, un ángulo recto.

Ilustración 8 *Ejemplo de triángulo de 90°*



Ve a la ventana "Mueve" y observa cómo, al mover cualquier punto del triángulo, siempre mantendrá un ángulo de 90°.

Transformaciones Geométricas

Las transformaciones geométricas son operaciones que modifican la posición, orientación o tamaño de una figura en el plano (López & Sánchez, 2023). Cada transformación puede expresarse mediante una función o matriz, lo cual es esencial para comprender la relación entre la geometría y el álgebra.

Traducciones

Una traslación consiste en desplazar todos los puntos de una figura una misma distancia en una dirección determinada (López & Sánchez, 2023). Las traducciones conservan la congruencia y la orientación de las figuras.

Reflexiones

La reflexión es una transformación que "voltea" una figura respecto a una recta generando una imagen especular (Martínez & Rodríguez, 2022). Las reflexiones son isometrías, es decir, conservan las distancias y los ángulos. La ecuación de la recta de reflexión y la fórmula para obtener la imagen de un punto se pueden derivar usando coordenadas cartesianas (Martínez & Rodríguez, 2022).

Rotaciones

Una rotación consiste en girar una figura en torno a un punto fijo (centro de rotación) un cierto ángulo (López & Sánchez, 2023). Las rotaciones conservan la forma y el tamaño de la figura, siendo una transformación isométrica (López & Sánchez, 2023).

Homotecias

La homotecia es una transformación que expande o contrae una figura con respecto a un centro, manteniendo la forma, pero modificando el tamaño (Fernández et al., 2021). Se define mediante un centro Oh y una razón de escalada k Para cualquier punto PAG, su imagen homotética $PAG"$ se calcula con las siguientes ecuaciones:

$$PAG" = Oh + k(PAG - Oh)$$

Las homotecias conservan la similitud entre figuras (Fernández et al., 2021).

Ejercicio Práctico de Traducción

Trasladar la figura ABC en la dirección V = (5; 4).

Paso 1: Trazar un triángulo

En GeoGebra, da clic en la ventana "Polígono" y traza un triángulo ABC.

Paso 2: Trazar el vector

Traza el vector (5; 4), lo que significa 5 unidades a la derecha y 4 unidades hacia arriba.

Paso 3: Trasladar la figura

Ve a la ventana "Traslación", da clic en el objeto a trasladar (el triángulo ABC) y luego en el vector.

Observa que la figura sufre una traslación en la dirección del vector.

Paso 4: Cambiar el color de los triángulos

Da clic derecho sobre la figura, selecciona "Propiedades del objeto" y cambia el color.

Observa que el vector indica cuánto se ha trasladado la figura, manteniendo su sentido, tamaño y forma.

Ejercicio Práctico de Rotación

Rotar un hexágono 90° en sentido antihorario.

Paso 1: Trazar un hexágono regular

En GeoGebra, da clic en la ventana "Polígono regular" y traza un hexágono.

Paso 2: Ubicar un centro de rotación

Ubica un punto que será el centro de rotación.

Paso 3: Girar la figura

Ve a la ventana "Rotación", da clic en la figura (el hexágono) y luego en el punto (centro de rotación).

Ingresa el ángulo a rotar, en este caso 90°, en sentido anti-horario.

Paso 4: Quitar los ejes

Quita los ejes del plano para una mejor visualización.

Paso 5: Verificar la rotación

Traza un segmento desde un vértice original hasta el centro y desde el centro hasta el vértice rotado.

Mide el ángulo entre estos segmentos para verificar que es de 90°.

Relaciones Geométricas: Mediatrices, Bisectrices, Ángulos y Áreas

El estudio de las relaciones geométricas es esencial para comprender cómo se organizan y relacionan los elementos de una figura. Las mediatrices y bisectrices, así como la medición de ángulos y áreas, son conceptos fundamentales en geometría (García, 2022).

Mediatrices

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que lo divide en dos segmentos iguales (García, 2022).

Teorema de la mediatriz

Todo punto que se encuentre sobre la mediatriz de un segmento está equidistante de los extremos de dicho segmento. Este teorema es crucial en la construcción de circuncentros de triángulos y en problemas de localización (García, 2022).

Bisectrices

Una bisectriz es la recta que divide un ángulo en dos ángulos congruentes (Martínez & Rodríguez, 2022). La intersección de las bisectrices de los ángulos internos de un triángulo define el incentro, que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo (Martínez & Rodríguez, 2022).

Ángulos y áreas

La determinación de ángulos en figuras dinámicas se facilita mediante herramientas interactivas (Fernández et al., 2021). Se puede observar cómo la suma de los ángulos internos de un triángulo es siempre 180° (teorema fundamental de la geometría euclidiana) (Fernández et al., 2021).

Clasificación de ángulos según su medida

- **Ángulo agudo:** Mide menos de 90°.
- Ángulo recto: Medio 90°.
- **Ángulo obtuso:** Mide más de 90° y menos de 180°.
- Ángulo llano: Medio 180°.

Cálculo de áreas

En polígonos, el área se puede calcular descomponiendo la figura en triángulos o utilizando fórmulas específicas, por ejemplo, la fórmula de Herón para triángulos o la fórmula de Gauss para polígonos en coordenadas cartesianas (Fernández et al., 2021).

En figuras dinámicas, la variación del área al modificar la figura puede estudiarse en tiempo real, facilitando la comprensión de la dependencia del área con respecto a los parámetros geométricos (Fernández et al., 2021).

Expresión Algebraica de Relaciones Geométricas

La representación algebraica de relaciones geométricas es un pilar fundamental de las matemáticas modernas (Hernández-Rodríguez, 2023). Esta simbiosis entre geometría y álgebra, iniciada por René Descartes en el siglo XVII, ha evolucionado, permitiendo abordar problemas complejos mediante la traducción de propiedades geométricas a expresiones algebraicas (Martínez-López, 2022).

Representación de Figuras Mediante Ecuaciones

La representación algebraica permite resolver problemas inversos, donde a partir de una ecuación se deducen las propiedades geométricas de la figura correspondiente (Martínez & Rodríguez, 2022).

Rectas y curvas: La ecuación de una recta en el plano se expresa en forma pendiente-intersección. Las curvas, como circunferencias, se representan mediante ecuaciones cuadráticas (López & Sánchez, 2023).

Vinculación con transformaciones: Las transformaciones geométricas pueden expresarse algebraicamente mediante funciones lineales y matrices (López & Sánchez, 2023).

Resolución Gráfica de Ecuaciones y Desigualdades

La resolución gráfica de ecuaciones representa una intersección crítica entre el pensamiento algebraico y geométrico

(Martínez-López y Rodríguez, 2022). La representación gráfica de ecuaciones y desigualdades es una herramienta fundamental para la comprensión visual de soluciones y para el análisis de sistemas de ecuaciones (Martínez-López y Rodríguez, 2022).

Métodos gráficos

Intersección de gráficas: La solución de un sistema de ecuaciones se obtiene encontrando el punto o puntos en los que se interceptan las gráficas de las ecuaciones (Martínez-López y Rodríguez, 2022).

Desigualdades: Las desigualdades indican relaciones de orden entre expresiones algebraicas, y su representación gráfica muestra regiones del plano en las que la desigualdad se cumple (Martínez-López y Rodríguez, 2022).

Capítulo 4

Cálculo Diferencial e Integral con GeoGebra: Visualización, Análisis y Resolución de Problemas

Introducción

La integración de GeoGebra en la enseñanza del cálculo diferencial e integral transforma la comprensión tradicional de estos temas al permitir la visualización dinámica y la manipulación interactiva de funciones, derivadas, integrales y sus aplicaciones. Diversos estudios han demostrado que el uso de GeoGebra favorece la asimilación de conceptos abstractos, incrementa la motivación y mejora el rendimiento académico en matemáticas universitarias (Cataño Cataño, 2016; Reyero Sáez, 2019)

Representación Gráfica de Funciones

GeoGebra permite graficar funciones y explorar sus propiedades de manera inmediata.

Actividad 1: Graficar y analizar funciones

Objetivo: Comprender el comportamiento de funciones polinómicas, racionales y radicales.

- **Procedimiento en GeoGebra:**
  1. Abrir GeoGebra y seleccionar la vista "Gráfica".
  2. Ingresar las siguientes funciones en la barra de entrada:
     - $f(x) = x^2 - 4x + 3$
     - $g(x) = \frac{x^3-3x}{x^2-4}$

- $\sqrt{x-2}-1$

3. Usar la herramienta de "Punto" para marcar raíces, máximos y mínimos.
4. Explorar el dominio y las discontinuidades utilizando la función "Asíntota" y la herramienta "Límite".

Reflexión:
GeoGebra facilita la identificación visual de intervalos de crecimiento, decrecimiento, asíntotas y puntos críticos, aspectos fundamentales para el análisis de funciones.

Cálculo de Derivadas y Aplicaciones

Las derivadas son esenciales para analizar tasas de cambio y optimización. GeoGebra automatiza su cálculo y permite su interpretación geométrica.

Actividad 2: Derivada e interpretación geométrica

Objetivo: Visualizar la derivada como pendiente de la tangente y analizar extremos relativos.

Procedimiento en GeoGebra:

Ingresar $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

Usar el comando Derivada(f) para obtener $f'(x)$

Activar la herramienta "Tangente" y colocarla en diferentes puntos de la curva.

Utilizar un deslizador para mover un punto sobre la función y observar cómo varía la pendiente.

Ejemplo práctico:

Identificar los puntos donde la derivada es cero y clasificar los extremos usando la "Segunda Derivada" (Derivada(Derivada(f))).

Comentario didáctico:

La visualización dinámica de la derivada y la tangente ayuda a los estudiantes a comprender el significado geométrico y físico de la tasa de cambio instantánea.

Integrales Definidas y Áreas Bajo la Curva

Actividad 3: Cálculo de áreas entre curvas

Objetivo: Determinar el área entre dos funciones.

Procedimiento en GeoGebra:

1. Graficar $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo 1.
2. Usar el comando *IntegralEntre (g, f, 0, 1)* para sombrear el área comprendida.
3. Cambiar los límites y observar cómo varía el área.

- **Ejercicio propuesto:**

  Calcular el área entre $y = \sin x \; y \; el \; eje \; x \; en \; \{0, \pi\}$ usando *Integral(sin(x), 0, π).*

Sugerencia didáctica:

La manipulación directa de los límites de integración y la visualización del área refuerzan la comprensión del proceso de integración y su interpretación geométrica.

Aplicaciones del Cálculo con GeoGebra

Optimización

GeoGebra permite modelar problemas de optimización y visualizar soluciones.

Ejemplo:
Diseñar una caja abierta de volumen máximo a partir de una lámina cuadrada.

Modelar la función volumen en GeoGebra.

Usar la herramienta "Extremo" para encontrar el valor óptimo.

Movimiento y Física

GeoGebra facilita la simulación de movimientos y el análisis de trayectorias.

Ejemplo:
Para $s(t) = -2t^3 + 10t^2$, graficar posición, velocidad (Derivada(s)) y aceleración (Derivada (Derivada(s))).

Animar un punto sobre la curva para observar la evolución en el tiempo.

Ejercicios Propuestos para el Estudiante

1. **Límites y continuidad:**

- Investiga el comportamiento de $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ usando la herramienta "Límite".

2. **Derivadas:**
    - Calcula y grafica la derivada de $f(x) = e^x$
3. **Integrales:**
    - Usa GeoGebra para calcular el área bajo la curva $y = \ln x$ en {1,e}

Sugerencias Didácticas para el Docente

- Proponga actividades donde el estudiante construya modelos desde cero, siguiendo procedimientos guiados y luego de forma autónoma.

- Fomente la discusión de resultados y la interpretación gráfica de soluciones.
- Utiliza los recursos del Manual de GeoGebra para profundizar en comandos y herramientas.
- Incorpora ejercicios de investigación donde los estudiantes exploren variantes de los problemas planteados.

Conclusión

El uso de GeoGebra en la enseñanza del cálculo diferencial e integral transforma la experiencia educativa, permitiendo al estudiante experimentar, visualizar y analizar conceptos matemáticos de manera activa y significativa. Esta metodología no solo mejora la comprensión conceptual, sino que también motiva y prepara a los estudiantes para enfrentar retos matemáticos en contextos reales y multidisciplinarios.

Referencias

Cabrera, J., Torres, L., et al. (2022). Colaboración y aprendizaje en GeoGebra. Revista de Tecnología Educativa, 25(3), 112-125.

Flores Vargas, E. (2015). Álgebra lineal: Teoría y ejercicios. Editorial Académica.

García-Cuéllar, M. Á., & Flores Salazar, M. (2017). Un estudio de la instrumentación de la noción de simetría axial por medio del uso del GeoGebra. Educación Matemática, 29(2), 117-144.

Gilbert, P. (2021). Creación y manipulación de objetos matemáticos en GeoGebra. Revista de Innovación Educativa, 18(2), 45-58.

González, J. (2023). Interactividad en GeoGebra y su impacto en la comprensión matemática. Revista de Enseñanza de las Matemáticas, 30(1), 78-92.

González, J., Rodríguez, A., & Silva, M. (2023). Herramientas y vistas de GeoGebra: Una guía completa. Editorial Académica.

Lezcano, R. (2021). El sistema CAS de GeoGebra en la enseñanza del álgebra. Revista de Álgebra, 15(4), 201-215.

Lezcano, R., & Leal, F. (2021). La hoja de cálculo de GeoGebra en el análisis de datos. Revista de Estadística Aplicada, 12(2), 88-102.

López, M. (2019). Interfaz y herramientas principales de GeoGebra: Una exploración detallada. Editorial Académica.

Pérez, F., & Ramírez, J. (2023). GeoGebra: Manual práctico para la enseñanza de las matemáticas. Ediciones Educativas.

Rivero, A. (2021). GeoGebra como plataforma educativa interactiva. Revista de Educación Matemática, 28(1), 34-47.

Rodríguez, C., & Sánchez, L. (2022). Desarrollo del pensamiento crítico con GeoGebra. Revista de Innovación Educativa, 20(2), 56-70.

Strang, G. (2016). Introduction to Linear Algebra (5th ed.). Wellesley-Cambridge Press.

PDF

Title: GeoGebra en Acción. Aplicaciones para la Vinculación con la Sociedad desde la Universidad Técnica Luis Vargas Torres

Authors:
Leidy Virginia Realpe Cancio
Jorge Javier Quiñónez Méndez
Ronny Joel Angulo Guerrero
Lucia Germania Chávez Ruano
Juan Carlos Sarmiento Saavedra
Ivon Yakeline Romero Saavedra
Sandra Ivet Reasco Angulo

Co-authors:
Jady Milena Franco Castro
Edward Edu Castillo Ortiz
Niurka Janela Meza Yagual
Jean Pierre Proaño Hinojosa
Kelly Janeth Rodríguez Tenorio
Danny David Montenegro Caicedo
Ana María Borja Landázuri
Carmen Juleisy Carreño Cadena
Jandry Johao Palma Obando
Julieth Anahí Luna Martínez
Franklin Gabriel Angulo Valencia
Fray Manolo Añapa de la Cruz
Karla Brigitte Guachamin Briones
Janekson López Ortiz
Elvis Neptaly Sánchez Loor
Jean Pierre Erazo Chila

Publisher: Editorial Hambatu Sapiens
Cover Design: Editorial Hambatu Sapiens
Format: PDF
Pages: 58 pág.
Size: A5 14.8x21cm
System Requirements: Adobe Acrobat Reader
Access Mode: World Wide Web
ISBN: 978-9942-7400-2-1
DOI: https://doi.org/10.63862/ehs-978-9942-7400-2-1

ISBN: 978-9942-7400-2-1
9 789942 740021

HS Editorial