Séance 3 : Matrices Élémentaires et Applications d'Opérations Élémentaires de Gauss

SINADINOVIC Marko

Semestre 6 : 2024-2025

Contents

1 Motivation

Dans le cadre d'une épreuve oral de compétence transversale, nous avons dû présenter des notions d'algèbre linéaires sous forme d'un cours au tableau pour une durée de 1 heure 30. À l'issus de cet oral, les camarades présent dans la salle doivent comprendre les notions présenté, connaître les raisons derrières et savoir les mettres en applications dans différents problèmes mathématiques.

2 Introduction

Les matrices élémentaires ainsi que les opérations de Gauss constituent des outils indispensables en algèbre linéaire, notamment pour la résolution de systèmes d'équations linéaires, la détermination de l'inversibilité des matrices et la réalisation de diverses transformations matricielles. Dans ce chapitre, nous prendrons le temps de détailler ces opérations et d'illustrer leur application pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. Nous évoquerons également les théorèmes qui justifient l'utilisation de ces techniques. De plus, nous examinerons en profondeur la décomposition LU, les groupes de matrices générateurs comme les groupes linéaires spéciaux (SL) et généraux (GL), ainsi que la résolution de systèmes linéaires et la détermination des sous-espaces vectoriels. Ces notions sont essentielles pour comprendre les changements de base, le calcul du rang et des dimensions des matrices, ainsi que les propriétés des systèmes d'équations.

3 Opérations et matrices élémentaires

Les opérations élémentaires sur les matrices incluent les transvections, les dilatations et les permutations. Ces opérations sont essentielles pour transformer les matrices en des formes plus simples, comme la forme échelonnée réduite par lignes. Cette simplification est cruciale pour faciliter la résolution des systèmes d'équations linéaires. En outre, les transvections, les dilatations et les permutations sont des outils clés qui ouvrent la voie à des solutions élégantes et efficaces.

3.1 Opérations élémentaires

Dans un premier temps, considérons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & \quad (l_1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & \quad (l_2) \end{cases} \tag{1}$$

où :

- $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{K}$ un corps.
- $b_1, b_2 \in \mathbb{K}$ un corps.

Nous n'allons pas donner plus de conditions et explications sur ce système afin de pouvoir introduire nos opérations élémentaires en toute simplicité.

3.1.1 Transvection

Le mot "transvection" trouve son origine dans le latin. Il est dérivé du verbe latin "transvehere", qui signifie "déplacer". Ce qui colle plutôt bien avec la notion de transvection dans les opérations élémentaires en algèbre linéaires. Ca reflète l'idée de déplacer ou de transférer des valeurs d'une ligne ou d'une colonne à une autre. De ce fait nous obtenons la définition suivante

Définition 1. Transvection
Une transvection consiste à ajouter ou enlever à une équation d'un système un multiple d'une autre équation du même système.

De manière plus claire et simple, si nous prenons un élément d'un corps par exemple $\lambda \in \mathbb{K}$, la transvection consiste à multiplier (l_1) par λ et soustraire $\lambda(l_1)$ à (l_2) : (l_2) - $\lambda(l_1) = (l_2')$

3.1.2 Dilatation

En ce qui concerne la dilatation, c'est la dérivé du verbe latin "dilatare", qui signifie "élargir". En tordant ce mot dans tous les sens, on réalise qu'il reflète l'idée de multiplier les valeurs d'une ligne ou d'une colonne par un scalaire en algèbre linéaire.

Définition 2. Dilatation
Une dilatation consiste à multiplier une équation d'un système par un scalaire non nul.

Si nous prenons un élément d'un corps par exemple $\lambda \in \mathbb{K}^*$, la dilatation consiste à multiplier une ligne (l_1) par λ : $\lambda(l_1) = (l_1')$.

3.1.3 Permutation

Comme son nom l'indique, elle permet de permuter, échanger des objets. Ces objets sont dans notre cas les lignes de notre systèmes d'équations (1).

Définition 3. Permutation
La permutation est l'échange de deux équations dans le système.

Pour illustrer cette opération, nous pouvons reprendre notre système (1) et appliquer la permutation entre (l_1) et (l_2) :

Avant permutation :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (l_1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (l_2) \end{cases}$$

Après permutation :

$$\begin{cases} a_{21}x + a_{22}y = b_2 & (l_1' = l_2) \\ a_{11}x + a_{12}y = b_1 & (l_2' = l_1) \end{cases}$$

Une question légitime qui se pose est la suivante : pourquoi a-t-on le droit d'effectuer ces opérations élémentaires sur les systèmes d'équations linéaires ? De cette dernière, en découlent d'autres interrogations telles que : est-ce que l'application de ces opérations laisse la ou les solutions du système d'équations inchangées ?

3.2 Invariance des opérations élémentaires

Dans un premiers temps définissons un système de m équations linéaires de n variables à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit $n \geq 1$ et $m \geq 1$ deux entiers naturels. Soit i, j des entiers naturels tels que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ et $a_{i,j}, b_i$ des éléments de $\mathbb{K}$.

$$(\mathscr{L}) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \quad (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \quad (L_2) \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \quad (L_m) \end{cases}$$

Une solution de notre système $\mathscr{L}$ est la donnée $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de n éléments de $\mathbb{K}$, solution de chacune des équations $L_1, \ldots, L_m$ du système $\mathscr{L}$.

Maitenant qu'on dispose de tous les outils nécessaires, montrons que appliquer une dilatation, une transvection ou une permutation ne change pas les solutions du système d'équations. Ce qui entraîne la validité de ces opérations.

3.2.1 Invariance de l'opération de permutation

Soit $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ une solution du système $(\mathscr{L})$.

Par hypothèse, considérons les m équations L_α avec $\alpha = 1, \ldots, m$.

$$(\mathscr{L}') \begin{cases} a_{1,1}s_1 + a_{1,2}s_2 + \cdots + a_{1,n}s_n = b_1 \quad (L_1) \\ a_{2,1}s_1 + a_{2,2}s_2 + \cdots + a_{2,n}s_n = b_2 \quad (L_2) \\ \vdots \\ a_{m,1}s_1 + a_{m,2}s_2 + \cdots + a_{m,n}s_n = b_m \quad (L_m) \end{cases}$$

Considérons le système permuté :

$$(\mathscr{L}''') \begin{cases} a_{2,1}s_1 + a_{2,2}s_2 + \cdots + a_{2,n}s_n = b_2 \quad (L_2) \\ a_{1,1}s_1 + a_{1,2}s_2 + \cdots + a_{1,n}s_n = b_1 \quad (L_1) \\ \vdots \\ a_{m,1}s_1 + a_{m,2}s_2 + \cdots + a_{m,n}s_n = b_m \quad (L_m) \end{cases}$$

Il est évident que $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ satisfait également ce système, car les équations sont simplement réarrangées et les solutions ne dépendent pas de l'ordre des équations.

Ainsi, l'opération de permutation (en échangeant L_1 et L_2) ne change pas les solutions du système $(\mathscr{L}')$. $\square$

3.2.2 Invariance de l'opération de dilatation

Soit $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ une solution du système $(\mathscr{L})$.

Par hypothèse, considérons les m équations L_α avec $\alpha = 1, \ldots, m$.

$$(\mathscr{L}')\begin{cases} a_{1,1}s_1 + a_{1,2}s_2 + \cdots + a_{1,n}s_n = b_1 \quad (L_1) \\ a_{2,1}s_1 + a_{2,2}s_2 + \cdots + a_{2,n}s_n = b_2 \quad (L_2) \\ \vdots \\ a_{m,1}s_1 + a_{m,2}s_2 + \cdots + a_{m,n}s_n = b_m \quad (L_m) \end{cases}$$

Par multiplication par λ, nous obtenons :

$$(\mathscr{L}'')\begin{cases} \lambda(a_{1,1}s_1 + a_{1,2}s_2 + \cdots + a_{1,n}s_n) = \lambda b_1 \quad (L_1) \\ a_{2,1}s_1 + a_{2,2}s_2 + \cdots + a_{2,n}s_n = b_2 \quad (L_2) \\ \vdots \\ a_{m,1}s_1 + a_{m,2}s_2 + \cdots + a_{m,n}s_n = b_m \quad (L_m) \end{cases}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, la solution $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ reste une solution du nouveau système $(\mathscr{L}'')$.
En effet, puisque $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ est une solution du système initial, nous avons :

$$a_{1,1}s_1 + a_{1,2}s_2 + \cdots + a_{1,n}s_n = b_1$$

En multipliant cette équation par λ, nous obtenons :

$$\lambda(a_{1,1}s_1 + a_{1,2}s_2 + \cdots + a_{1,n}s_n) = \lambda b_1$$

Ce qui se simplifie à :

$$\lambda a_{1,1}s_1 + \lambda a_{1,2}s_2 + \cdots + \lambda a_{1,n}s_n = \lambda b_1$$

Ainsi, les valeurs $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ satisfont toujours cette nouvelle équation dilatée, car elles satisfont l'équation initiale. Les autres équations du système restent inchangées et sont également satisfaites par $(s_1, s_2, \dots, s_n)$.

3.2.3 Invariance de l'opération de transvection

Soit $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ une solution du système $(\mathscr{L})$.

Par hypothèse, considérons les m équations L_α avec $\alpha = 1, \dots, m$.

$$(\mathscr{L}')\begin{cases} a_{1,1}s_1 + a_{1,2}s_2 + \cdots + a_{1,n}s_n = b_1 \quad (L_1) \\ a_{2,1}s_1 + a_{2,2}s_2 + \cdots + a_{2,n}s_n = b_2 \quad (L_2) \\ \vdots \\ a_{m,1}s_1 + a_{m,2}s_2 + \cdots + a_{m,n}s_n = b_m \quad (L_m) \end{cases}$$

Prenons la ligne (L_1), multiplions-la par $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Soustrayons ensuite $\lambda(L_1)$ à (L_2). Ainsi, nous obtenons :

$$(\mathscr{L}'')\begin{cases} a_{1,1}s_1 + a_{1,2}s_2 + \cdots + a_{1,n}s_n = b_1 \quad (L_1) \\ a_{2,1}s_1 + a_{2,2}s_2 + \cdots + a_{2,n}s_n = b_2 - \lambda b_1 \quad (L_2' = L_2 - \lambda(L_1)) \\ \vdots \\ a_{m,1}s_1 + a_{m,2}s_2 + \cdots + a_{m,n}s_n = b_m \quad (L_m) \end{cases}$$

Comme $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ une solution du système $(\mathscr{L})$, c'est aussi une solution de l'équation L_1 mais aussi par invariance de la dilatation, c'est une solution de $L_2 - \lambda L_1$ et de $(\mathscr{L})$. Donc $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ est une solution du système formé des équations L_1, $L_2 - \lambda L_1$, ..., L_m

De plus si $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ est une solution du système formé des m équations L_1,$L_2 - \lambda L_1$,...,L_m alors $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ est une solution du système $(\mathscr{L}'')$ avec $L_2' = (L_2 - \lambda L_1) - (-\lambda) L_1$ qui est tout simplement L_2. Donc $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ est aussi une solution de $(\mathscr{L})$ □

Donc la transvection ne modifie pas l'ensemble des solutions d'un système de m équations linéaires de n variables à coefficients dans $\mathbb{K}$.

De ces faits, nous pouvons formuler la proposition suivante :

Proposition 1. Opérations suivantes ne changent pas les solutions d'un système d'équations linéaires :

1. *Permuter deux équations de ce système,*
2. *Multiplier une équation de ce système par un élément non nul de* $\mathbb{K}$.
3. *Soustraire à une équation de ce système le produit d'une autre équation de ce système par un élément de* $\mathbb{K}$,
4. *Conserver une équation de ce système et soustraire aux autres équations de ce système le produit par des éléments de* $\mathbb{K}$ *de l'équation conservée,*
5. *Supprimer ou ajouter au système l'équation :* $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$.

Maintenant que nous connaissons les opérations élémentaires dans le cadre de systèmes d'équations linéaires, nous pouvons nous intéressé aux matrices élémentaires.

3.3 Matrices élémentaires

Définissons ce qu'est une matrice élémentaire.

Définition 4. Matrice élémentaire
Une matrice élémentaire est une matrice obtenue en appliquant une seule opération élémentaire sur une matrice identité.

Cette définition peut être abstraite pour certains mais elle est réalité facilement compréhensible en montrant des exemples. Considérons la matrice idéntité de taille 3×3 :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En modifiant les éléments de $I_3 \in M_{3,3}(\mathbb{K})$, nous obtenons une matrice $I_3' \in M_{3,3}(\mathbb{K})$ qui permet si on multiplie une matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{K})$ parI_3' à gauche, nous remarquons qu'on a effectué certaines opérations (permuter deux lignes par exemple) sur la matrice A. C'est en effet la définition de matrice élémentaire. Il en existe plusieurs et chacune possède sa propre opération élémentaire vu à la section 3. Étudions de près ces fameuses matrices élémentaires. Nous allons commencer par la plus simple, la matrice de permutation.

3.3.1 La matrice de permutation

Définition 5. Matrice élémentaire de permutation
L'opération élémentaire qui permute les lignes i et j dans la matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ correspond au produit $S_{i,j} \cdot M$, où $S_{i,j} \in M_m(\mathbb{K})$ est la matrice obtenue à partir de la matrice identité en permutant les lignes i et j

Si $m = 3$, alors :

$$S_{1,2} = S_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou

$$S_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 1. *La matrice $S_{i,j}$ est inversible.*

$$S_{i,j} \cdot S_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Ainsi $(S_{i,j})^{-1} = S_{i,j}$.

Vérifions pour $m = 3$ que c'est bien une matrice de permutation.

Soit la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Appliquons la matrice de permutation $S_{1,3}$ à A:

$$S_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le produit $S_{1,3} \cdot A$ est donné par :

$$S_{1,3} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{31} & 0 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{32} & 0 \cdot a_{13} + 0 \cdot a_{23} + 1 \cdot a_{33} \\ 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{31} & 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} + 0 \cdot a_{32} & 0 \cdot a_{13} + 1 \cdot a_{23} + 0 \cdot a_{33} \\ 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{31} & 1 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} + 0 \cdot a_{32} & 1 \cdot a_{13} + 0 \cdot a_{23} + 0 \cdot a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

Les lignes 1 et 3 de A ont été échangées. Ainsi, en appliquant $S_{1,3}$ à la matrice A, nous avons permuté les lignes 1 et 3 de A, ce qui prouve que $S_{1,3}$ est bien une matrice de permutation.

Remarque 2. *Nous savons que permuter deux lignes ou colonnes d'une matrice change le signe du déterminant. Comme $S_{i,j}$ échange les lignes i et j de la matrice identité, son déterminant est -1. Donc, pour toute matrice $A \in M_m(\mathbb{K})$, nous avons :*

$$\det(S_{i,j} \cdot A) = \det(S_{i,j}) \cdot \det(A) = (-1) \cdot \det(A) = -\det(A)$$

Remarque 3. *Nous pouvons généraliser pour une matrice de taille $N \times N$ avec $N \in \mathbb{N}$ mais l'utilité de faire ces calculs est nul. Nous laissons au lecteur à se convaincre.*

3.3.2 La matrice de dilatation

Définition 6. Matrice élémentaire de dilatation
L'opération qui change la ligne i dans la matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ par α fois la ligne i, avec $\alpha \neq 0$, correspond au produit $D_i(\alpha) \cdot M$, où $D_i(\alpha) \in M_m(\mathbb{K})$ est la matrice diagonale définie par $a_{i,i} = \alpha$ et $a_{j,j} = 1$ si $j \neq i$.

Si $m = 3$, alors :

$$D_2(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 4. *La matrice $D_i(\alpha)$ est inversible.*

$$D_i(\alpha) \cdot D_i(\frac{1}{\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Ainsi $(D_i(\alpha))^{-1} = D_i(\frac{1}{\alpha})$.

Montrons que c'est bien une matrice de dilatation. Soit A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

En appliquant la matrice $D_2(\alpha)$ à A, nous obtenons :

$$D_2(\alpha) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

La deuxième ligne de la matrice A est multipliée par α, tandis que les autres lignes restent inchangées. Ainsi, la matrice $D_2(\alpha)$ effectue une multiplication par α uniquement sur la deuxième ligne de A. On a bien le résultat recherché.

Remarque 5. *Nous pouvons généraliser pour une matrice de taille $N \times N$ avec $N \in \mathbb{N}$ mais l'utilité de faire ces calculs est nul. Nous laissons au lecteur à se convaincre.*

Remarque 6. *En calculant le déterminant de $D_i(\alpha)$ nous obtenons :*

$$\det(D_i(\alpha)) = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot 1 = \alpha$$

3.3.3 La matrice de transvection

Définition 7. Matrice élémentaire de transvection
L'opération élémentaire qui ajoute à la ligne i de la matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ le produit par α de la j-ème ligne de M correspond au produit $T_{i,j}(\alpha) \cdot M$, où $T_{i,j}(\alpha) \in M_m(\mathbb{K})$ est la matrice dont les termes diagonaux sont égaux à 1 et le seul terme non diagonal non nul est α placé à la i-ème ligne et j-ème colonne. En d'autres termes on appelle matrice élémentaire de transvection toute matrice carrée de la forme

$$T_{i,j}(\alpha) = I_n + \alpha E_{i,j}$$

avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$, où $E_{i,j}$ est la matrice avec des zéros partout, sauf le terme situé à la i-ème ligne et la j-ème colonne qui vaut 1.

Si $m = 3$, alors :

$$T_{3,1}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$E_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 7. *La matrice $T_{i,j}(\alpha)$ est inversible.*

$$T_{i,j}(\alpha) \cdot T_{i,j}(-\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha - \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Ainsi $(T_{i,j}(\alpha))^{-1} = T_{i,j}(-\alpha))$

Montrons que pour $m = 3$ que c'est bien une matrice de permutation.

Soit la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

En appliquant la matrice $T_{3,1}(\alpha)$ à A, nous obtenons :

$$T_{3,1}(\alpha) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{31} & 1 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} + 0 \cdot a_{32} & 1 \cdot a_{13} + 0 \cdot a_{23} + 0 \cdot a_{33} \\ 0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{31} & 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} + 0 \cdot a_{32} & 0 \cdot a_{13} + 1 \cdot a_{23} + 0 \cdot a_{33} \\ \alpha \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{31} & \alpha \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{32} & \alpha \cdot a_{13} + 0 \cdot a_{23} + 1 \cdot a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{11} + a_{31} & \alpha a_{12} + a_{32} & \alpha a_{13} + a_{33} \end{pmatrix}$$

On peut observer que la matrice $T_{3,1}(\alpha)$ ajoute α fois la première ligne de A à la troisième ligne, tandis que les autres lignes restent inchangées. Cela montre que c'est bien une matrice de transvection.

Remarque 8. *Comme pour les matrices élémentaires de dilatation et de permutation, nous pouvons généraliser la matrice de transvection au rang $N \times N$ avec $N \in \mathbb{N}$*

Remarque 9. *En calculant le déterminant de $T_{i,j}(\alpha)$, nous tombons sur :*

$$\det(T_{i,j}(\alpha)) = 1$$

Car dans notre cas $T_{i,j}(\alpha)$ est une matrice triangulaire inférieure et en développant le déterminant de $T_{i,j}(\alpha)$ suivant la première colonne :

$$\det(T_{i,j}(\alpha)) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

On re développe par rapport à la première colonne

$$\det(T_{i,j}(\alpha)) = 1 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

On répète ce processus et nous obtenons :

$$\det(T_{i,j}(\alpha)) = 1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 = 1$$

Remarque 10. *Nous avons vu que l'inverse d'une matrice élémentaire est encore élémentaire*

Nous avons parler de changement de lignes mais si nous multiplions une matrice $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ à droite par une matrice élémentaire, nous obtenons un changement sur les colonnes. Ceci découle de la propriétés des produits matricielles.

Proposition 2. Multiplications matrices élémentaires à droite
Soit $n \geq 1$ un entier, i un entier compris entre 1 et n. Pour toute matrice $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$:

1. La matrice produit $MD_i(a)$ se déduit de M en multipliant la i-ème colonne de M par a sans changer les autres colonnes.

2. La matrice produit $MT_{j,i}(\lambda)$ se déduit de M en ajoutant à la i-ème colonne de M le produit par λ de la j-ème colonne de M sans changer les autres colonnes.

3. La matrice produit $MS_{i,j}$ se déduit de M en permutant la i-ème colonne et la j-ème colonne de M sans changer les autres colonnes.

De manière analogue nous obtenons :

Proposition 3. Multiplications de matrices élémentaires à gauche
Soit $n \geq 1$ un entier, i un entier compris entre 1 et n. Pour toute matrice $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$:

1. La matrice produit $D_i(a)M$ se déduit de M en multipliant la i-ème ligne de M par a sans changer les autres lignes.

2. La matrice produit $T_{j,i}(\lambda)M$ se déduit de M en ajoutant à la i-ème ligne de M le produit par λ de la j-ème ligne de M sans changer les autres lignes.

3. La matrice produit $S_{i,j}M$ se déduit de M en permutant la i-ème ligne et la j-ème ligne de M sans changer les autres lignes.

À présent, nous disposons de toutes les définitions et notions utiles pour nous attaquer à la résolutions de systèmes d'équations à l'aide des matrices élémentaires. De plus nous remarquons :

Théorème 1.
Toute matrice carrée inversibles peut être réduite à une matrice identité en appliquant une suite finie d'opérations élémentaires.

De ce théorème nous pouvons en tirer une propisition :

Proposition 4.
Si une matrice A peut être transformée en une matrice identité I par des opérations élémentaires, alors A est inversible et A^{-1} est le produit des matrices élémentaires appliquées, prises dans l'ordre inverse.

Pour prouver ce dernier, supposons que A peut être transformée en la matrice identité I par une suite finie d'opérations élémentaires, soit

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1 \cdot A = I$$

où E_i représente une opération élémentaire. Alors A est inversible et

$$A^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} \cdot E_k^{-1}$$

Pour prouver cela, nous utilisons le fait que chaque opération élémentaire est inversible et que l'inverse d'une composition d'opérations est la composition des inverses dans l'ordre inverse. En d'autres termes,

$$A = (E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} \cdot E_k^{-1}) \cdot I$$

Ce qui implique que

$$A^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} \cdot E_k^{-1}$$

Ainsi, si une matrice A peut être transformée en une matrice identité I par des opérations élémentaires, alors A est inversible et A^{-1} est le produit des matrices élémentaires appliquées, prises dans l'ordre inverse, ce qui signifie qu'on applique les inverses des matricies élémentaires (i.e.

si nous appliquons les produits matricielles A, B, C, l'ordre inverse de ces produits matricielles est C^{-1}, B^{-1}, A^{-1})

Or, il nous manque un détail cruciale, l'invariance des matrices élémentaires. Qu'est-ce qui nous garantit que nos opérations sont licites, et ne changent pas la dimension, la nature ou autre de nos objets ?

3.4 Invariance des matrices élémentaires

Nous considérons le système d'équations linéaires suivant :

$$(E)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

avec $(s_1, s_2, ..., s_n)$ une solution du système (E)
Nous représentons matriciellement ce système (E) :

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

où A est une matrice $m \times n$ des coefficients, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{x}$ est un vecteur colonne $n \times 1$ des variables, et $\mathbf{b}$ est un vecteur colonne $m \times 1$ des constantes.

Nous allons appliquer les différentes matrices élémentaires à la matrice A et nous verrons ce qui se produit matriciellement et au niveau du système, notamment au niveau des solutions.

3.4.1 Invariance de la matrice élémentaire de permutation

Pour démontrer l'invariance des matrices de permutation, nous allons examiner leur effet sur une matrice précise, la matrice associé à un système d'équation linéaire. Comme vu précédemment, les matrices de permutation sont des matrices qui permutent les lignes ou colonnes d'une matrice selon l'ordre du produit.

Soit $S_{i,j}$ une matrice de permutation qui échange les lignes i et j. La matrice $S_{i,j}$ est définie comme suit :

$$S_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Pour démontrer l'invariance des solutions après l'application d'une matrice élémentaire de permutation, nous mutliplions $S_{i,j}$ par A comme suit : $S_{i,j} \cdot A$, nous obtenons la matrice suivante :

$$S_{i,j} \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Et le système associé à ce produit :

$$(E') \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Or si nous considérons $(s_1, s_2, ..., s_n)$ une solution du système (E), c'est aussi une solution du système (E') comme vu pour l'invariance de l'opération de permutation (i.e. car les équations sont simplement réarrangées et les solutions ne dépendent pas de l'ordre des équations.)

Donc les matrices élémentaires de permutations sont invariantes donc elles conservent les propriétés des solutions du systèmes d'équations linéaires.

3.4.2 Invariance de la matrice élémentaire de dilatation

En ce qui concerne l'invariance de la matrice élémentaire de dilatation, nous savons que ce sont des matrices diagonales où chaque élément sur la diagonale est multiplié par un scalaire. Par exemple, considérons la matrice de dilatation $D_i(\alpha)$, qui multiplie la i-ème ligne par un scalaire α :

$$D_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $(s_1, s_2, ..., s_n)$ une solution du système (E). Nous effectuons le produit entre $D_i(\alpha)$ et A : $D_i(\alpha) \cdot A$, et nous obtenons :

$$D_i(\alpha) \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Or $D_i(\alpha) \cdot A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ représente le système suivant :

$$(E') \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \alpha(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) = \alpha(b_i) \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Par les mêmes arguments que pour l'invariance de l'opération de dilatation, les valeurs $(s1, s2, ..., sn)$ satisfont toujours cette nouvelle équation dilatée

$$\alpha(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) = \alpha(b_i)$$

car elles satisfont l'équation initiale. Les autres équations du système restent inchangées et sont également satisfaites par $(s1, s2, ..., sn)$ d'où l'invariance de la matrice de dilatation.

3.4.3 Invariance de la matrice élémentaire de transvection

Enfin, une matrice élémentaire de transvection est une matrice qui ajoute un multiple d'une ligne à une autre ligne. Considérons la matrice de transvection $T_{i,j}(\alpha)$, qui ajoute α fois la ligne j à la ligne i :

$$T_{i,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

En appliquant le même procédé nous obtenons :

$$T_{i,j}(\alpha)\cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{11}+a_{i1} & \alpha a_{12}+a_{i2} & \cdots & \alpha a_{1n}+a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

et

$$(E')\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ (\alpha a_{i1}+a_{j1})x_1 + (\alpha a_{i2}+a_{j2})x_2 + \cdots + (\alpha a_{in}+a_{jn})x_n = \alpha b_i + b_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Or nous avons vu dans dans la preuve de l'invariance de l'opération de transvection que $(s1, s2, ..., sn)$ est bien aussi de (E') et de (E)

Donc l'opération de transvection conserve les propriétés du déterminant et des solutions des systèmes d'équations linéaires.

Pour ce cours nous allons nous limiter aux 3 opérations cités précédement, mais il faut garder en tête qu'il existe d'autres opérations comme la rotation et la réflexion vu dans le cours d'Algèbre Multilinéaire.

3.5 Ouverture : Existence d'autres opérations de base

3.5.1 Rotation

Définition 8. Matrice élémentaire de rotation
Une matrice de rotation est utilisée pour effectuer des rotations dans le plan. Elle permet de tourner un vecteur autour de l'origine d'un angle donné.

Pour un angle de rotation θ, la matrice de rotation $R(\theta)$ est définie comme suit :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Pour se familiariser avec cette notion, supposons que nous voulons tourner un vecteur (x, y) de $90°$ dans le sens contaire des aiguilles d'une horloge :

$$R(90°) = \begin{pmatrix} \cos(90°) & -\sin(90°) \\ \sin(90°) & \cos(90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant cette matrice de rotation à un vecteur $(1, 0)$, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Son effet peut être visualiser grâce à un simple graphique comme ci-dessous :

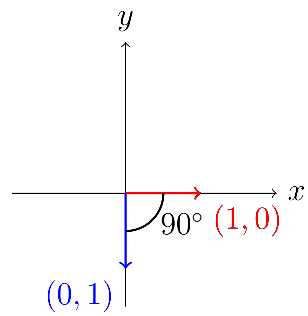

Figure 1: Effet de la matrice de rotation d'angle 90° sur le vecteurs $(1, 0)$

3.5.2 Réflexion

Définition 9. Matrice élémentaire de rotation
Une matrice de réflexion est utilisée pour refléter des vecteurs par rapport à une ligne donnée dans le plan.

Pour une réflexion par rapport à l'axe x, la matrice de réflexion M_x est définie comme suit :

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour une réflexion par rapport à l'axe y, la matrice de réflexion M_y est définie comme suit :

$$M_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Supposons que nous voulons réfléchir un vecteur (x, y) par rapport à l'axe x :
En appliquant cette matrice de réflexion à un vecteur $(1, 2)$, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Cette opération se visualise très bien sur la figure ci-dessous :

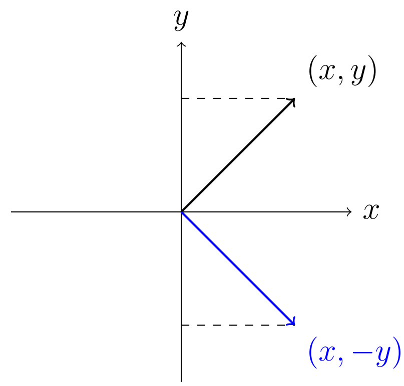

Figure 2: Réflexion d'un vecteur (x, y) par rapport à l'axe x

Nous pouvons nous demander à ce stade, qu'elle est l'utilité de ces matrices élémentaires ? Dans quels cas sont-elle utilisées et pourquoi ? C'est ainsi qu'intervient notre deuxième partie qui traite du lien entre les fameuses opérations de Gauss et les matrices élémentaires

4 Lien entre les opérations de Gauss et les matrices élémentaires

Avant de rentrer dans le vive du sujet, nous devons rappeler la méthode de Gauss-Jordan dans le cadre de systèmes d'éqations de systèmes linéaires.

4.1 La méthode de Gauss-Jordan

La méthode de Gauss-Jordan est une technique algorithmique utilisée pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. Elle consiste à appliquer des opérations élémentaires pour transformer la matrice augmentée du système en une forme échelonnée réduite par lignes, ce qui permet de lire directement les solutions du système.

Définition 10. Matrice augmentée
Une matrice augmentée est une matrice qui combine les coefficients des variables d'un système d'équations linéaires avec les termes constants de chaque équation.

Si la définition n'est pas claire nous pouvons crée un exemple, considérons le système d'équations linéaires suivant :

$$(E)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Ce système (E) peut être représenté sous forme matricielle. Ce système de m équations avec n variables peut être écrit comme :

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

où A est une matrice $m \times n$ des coefficients, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $\mathbf{x}$ est un vecteur colonne $n \times 1$ des variables, et $\mathbf{b}$ est un vecteur colonne $m \times 1$ des constantes.

Ainsi la matrice augmentée correspondante au système (E) est :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}$$

Définition 11. Forme échelonnée réduite par lignes
Une matrice est dite en forme échelonnée réduite par lignes (ou forme de Gauss-Jordan) si elle satisfait les conditions suivantes :

- La première entrée non nulle de chaque ligne (appelée pivot) est 1.
- Chaque pivot est le seul élément non nul dans sa colonne.
- Les pivots sont disposés en escalier de gauche à droite, de haut en bas.
- Les lignes de zéros (s'il y en a) sont en bas de la matrice.

Un exemple de forme échelonné réduite par lignes est de la forme :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & b'_3 \end{array}\right]$$

Remarque 11. *Une matrice de rang r (de taille quelconque) est équivalente à la matrice J_r où il n'y a que des zéros sauf r 1 sur la diagonale principale. Ainsi, toute matrice de rang r peut être transformée par des opérations élémentaires en une matrice en forme échelonnée réduite par lignes. En d'autres termes, cela permet de visualiser que toute matrice de rang r peut être réduite, par des opérations élémentaires, à une matrice en forme échelonnée réduite par lignes similaire à J_r.*

Nous pouvons la visualiser de la manière suivante. Soit J_r une matrice de rang r avec $r \leq \min(m,n)$. Ainsi cette matrice est définit comme :

$$J_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

En ayant les définitions de chaque notions, nous pouvons enfin expliquer la méthode de Gauss-Jordan en utilisant les opérations élémentaires. Cette méthode consiste à utiliser des opérations élémentaires (permutations,transvections,dilatations...) pour transformer une matrice augmentée en forme échelonnée réduite par lignes ce qui nous donne directement les solutions du système.

Proposition 5. Opérations élémentaires de Gauss
Les opérations suivantes ne changent pas les solutions d'un système d'équations linéaires :

1. Permuter deux équations,
2. Multiplier une équation par un élément non nul du corps K,
3. Rajouter à une équation le produit d'une autre équation par un élément de $\mathbb{K}$.

De façon analogue, nous pouvons parler des opérations élémentaires de Gauss sur les lignes (resp. colonnes) d'une matrice car nous avons prouvé l'invariance des opérations et matrices élémentaires.

Proposition 6. Opération élémentaires de Gauss sur les lignes (resp.colonnes)

1. Permuter deux lignes (resp. colonnes),
2. Multiplier une ligne (resp. colonne) par un élément non nul du corps $\mathbb{K}$,
3. Rajouter à une ligne (resp. colonne) le produit d'une autre ligne (resp. colonne) par un élément de $\mathbb{K}$.

Et ceci est vrai par invariance des opérations et matrices élémentaires.

4.2 Résolution de systèmes d'équations liénaires à l'aide des matrices élémentaires

Comme dit précédement, nous pouvons représenté les systèmes d'équations linéaires sous forme matricielle. Si notre système contient m équations avec n variables, on peut l'écrire :

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

où A est une matrice $m \times n$ des coefficients, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $\mathbf{x}$ est un vecteur colonne $n \times 1$ des variables, et $\mathbf{b}$ est un vecteur colonne $m \times 1$ des constantes.

À partir de cette matrice, nous allons crée une matrice augmenté correspondant à notre système d'équations. Et nous allons appliquer nos matrices élémentaires à cette matrice augmenté. Mais de quelle manière ?

Nous devons nous décidé si nous voulons travailler sur les lignes ou les colonnes de notre matrie A, cela dépends des matrices et de leurs coefficients mais dans notre exemple nous appliquerons nos opérations élémentaires sur les lignes, ce qui implique que A sera multipliés par nos matrices élémentaires élémentaires à gauche et non à droite. Nous verrons son importance et différence plus tard.

En appliquant ces matrices élémentaires nous obtenons exactement la proposition suivante :

Proposition 7.
Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$, produit de matrices élémentaires, et une matrice $N \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ échelonnée telle que $B \cdot M = N$.

En appliquant successivement nos matrices élémentaires à la matrice M, nous obtenons une suite de matrices intermédiaires jusqu'à ce que nous atteignions la matrice échelonnée N. Soit B le produit des matrices élémentaires appliquées dans cet ordre :

$$B = H_k \cdot H_{k-1} \cdots H_1$$

où H_i, pour $i = 1, ..., k \in \mathbb{N}$. H_i est une matrice élémentaire. Étant donné que chaque T_i est inversible, le produit B est également inversible. Ainsi, il existe une matrice B telle que $BM = N$, où N est la matrice échelonnée obtenue à partir de M par une suite finie d'opérations élémentaires.

Pour se convaincre, rien de mieux que d'appliquer nos théorèmes, propositions en exercice avec un exemple simple.

4.3 Exemple d'utilisation

4.3.1 En utilisant la matrice augmenté et les matrices élémentaires

Soit le système d'équations linéaires :

$$(J) \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 11 \end{cases}$$

où $\mathbf{b}$ est le vecteur des termes constants $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ les variables avec $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$.

La matrice augmentée correspondante est :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 11 \end{array}\right]$$

Nous allons transformer M en une matrice échelonnée N en appliquant une suite d'opérations élémentaires, représentées par la matrice B.

I) Soustrayons 3 fois la première ligne à la deuxième ligne pour éliminer le 3

$$T_{2,1}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Appliquons $T_{2,1}(3)$ à la matrice augmentée :

$$T_{2,1}(3) \cdot \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 11 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

II) Multiplions la deuxième ligne par $-\frac{1}{2}$

$$D_2\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Appliquons $D_2\left(-\frac{1}{2}\right)$ à la matrice obtenue précédemment :

$$D_2\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Ainsi, nous avons transformé la matrice M en une matrice échelonnée N en utilisant des opérations élémentaires représentées par les matrices T et D. La matrice produit B est le produit des matrices élémentaires :

$$B = D_2\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot T_{2,1}(3)$$

Nous avons donc $BM = N$, où N est la matrice échelonnée obtenue :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi le système échelonné correspondant est :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

III) Nous résolvons ces équations

$$x_2 = 2$$

et

$$x_1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1$$

Donc, les solutions du système (J) sont :

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

Vérifions en remplaçant dans (J) :

$$(J') \begin{cases} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 1 + 4 = 5 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 3 + 8 = 11 \end{cases}$$

Ainsi, les solutions $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$ satisfont bien le système d'équations initial.

4.3.2 En utilisant le système d'équations linéaires et les opérations élémentaires.

Soit le système d'équations linéaires :

$$(J) \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 11 \end{cases}$$

où $\mathbf{b}$ est le vecteur des termes constants $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ les variables avec $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$.

I) Soustrayons 3 fois la première équation à la deuxième équation pour éliminer le 3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3(x_1 + 2x_2) = 11 - 3 \cdot 5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_1 - 6x_2 = 11 - 15 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ -2x_2 = -4 \end{cases}$$

II) Multiplions par $\frac{-1}{2}$ la deuxième ligne

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

III) Nous résolvons ces équations

$$x_2 = 2$$

et

$$x_1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1$$

Nous obtenons les mêmes solutions.

5 Sources

5.1 Cours

- **Nom du Cours :** MF1 MF2
  Enseignant : Philippe Maisonobe
  Université : Université Côte d'Azur
  Semestre : Automne 2024

- **Nom du Cours :** Complément matrice : MF3
  Enseignant : Ann Lemahieu
  Université : Université Côte d'Azur
  Semestre : 2022

5.2 Livres

- **Titre :** Algèbre Linéaire 6ème édition
  Auteur : Joseph Grifone
  Éditeur : Editions Cépaduès
  Année de Publication : 2019
  ISBN : 236493673X

- **Titre :** Algèbre Probabilités - Les Math en tête
  Auteurs : Xavier Gourdon
  Éditeur : ELLIPSES
  Année de Publication : 2021
  ISBN : 9782340056763

5.3 Sites

- **Titre :** Amouzard CNRS
  URL : `https://amouzard.perso.math.cnrs.fr/DEV/genergl`

- **Titre :** Agreg-Maths
  URL : `https://agreg-maths.fr/developpements/262`