

Nombres premiers

➤ Nombres premiers

Définition et propriété : un nombre premier est un **nombre entier positif** qui possède **exactement deux diviseurs distincts** : lui-même et 1. Il existe une **infinité** de nombres premiers.

Exemples :

- 0 n'est pas premier car 0 a une **infinité de diviseurs**.
- 1 **n'est pas premier** car 1 n'a qu'un seul diviseur : **lui-même**.
- 2 est premier car 2 possède exactement deux diviseurs : 1 et 2. Le nombre 2 est le plus petit nombre premier. C'est aussi le seul nombre premier pair.
- 3 est premier car 3 possède exactement deux diviseurs : 1 et 3. Le nombre 3 est le plus petit nombre premier impair.
- 4 n'est pas premier car 4 possède trois diviseurs : 1, 2 et 4.
- Voici la liste des **25 nombres premiers inférieurs à 100** :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

Il est important de les connaître car ils te permettent de décomposer plus facilement un nombre en produit de facteurs premiers.

➤ Décomposition d'un nombre en un produit de facteurs premiers

Propriété : Tout nombre entier positif strictement supérieur à 1 **possède au moins un diviseur premier** et peut s'écrire de façon unique (à l'ordre des facteurs près) **comme un produit de facteurs premiers**.

Exemples : Voici la décomposition en un produit de facteurs premiers de certains nombres :

$$2 = 2 \text{ (en effet 2 est un nombre premier)}$$

$$12 = 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 3 \text{ (vérification : 2 et 3 sont bien des nombres premiers)}$$

$$25 = 5 \times 5$$

$$60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$79 = 79 \text{ (en effet, 79 est premier)}$$

Méthode : Comme tu le vois dans les exemples ci-dessus, pour obtenir la décomposition en un produit de facteurs premiers d'un nombre N non premier, tu dois :

- ① Trouver un **diviseur premier** p de N (pour cela, je dois connaître les critères de divisibilité d'un nombre et au moins les 10 premiers nombres premiers).
- ② Effectuer la division de N par p :
 - si le nombre obtenu est premier, c'est terminé. Sinon, tu dois à nouveau trouver un diviseur premier p' du nombre obtenu,
 - effectuer la division du nombre obtenu par p',
 - et ainsi de suite, jusqu'à ce que tu obtiennes **un nombre premier à la fin**.

Exemple : On souhaite décomposer le nombre 1365 en produit de facteurs premiers :

- ① Je cherche **un nombre qui soit à la fois premier ET diviseur de 1365** : ce n'est pas 2 car le nombre est impair ; $1 + 3 + 6 + 5 = 15$, donc ce dernier est **divisible par 3** (qui est bien un nombre premier), donc :

$$1365 = 3 \times 455$$

- ② Je regarde si tous les facteurs sont premiers : 455 **n'est pas premier** car d'après les critères de divisibilité 455 est aussi **divisible par 5** (qui est un nombre premier) donc :

$$1365 = 3 \times 455 = 3 \times 5 \times 91$$

- ③ Je cherche si 91 est premier ; pour ce faire, je regarde si 91 possède un critère de divisibilité évident ou alors je divise 91 par un nombre premier, je trouve que 91 est divisible par 7 donc $91 = 7 \times 13$.

7 et 13 sont premiers. Finalement, $1365 = 3 \times 5 \times 7 \times 13$ (avec les facteurs rangés dans l'ordre croissant). **Tous les facteurs sont premiers, la décomposition est terminée.**

① 1365	3
② 455	5
③ 91	7
13	