1st European Mathematical Olympiad

Language: **Ukrainian**

Day: **2**

Неділя, 26 квітня 2026

Задача 5. Нехай натуральне число $n \geqslant 4$. Знайдіть усі такі строго додатні дійсні числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & x_2 x_3 + 1 \\ x_2 + x_3 & = & x_3 x_4 + 1 \\ & \vdots & \\ x_{n-1} + x_n & = & x_n x_1 + 1 \\ x_n + x_1 & = & x_1 x_2 + 1. \end{cases}$$

Задача 6. Знайдіть усі натуральні числа $n \geqslant 2$ з такою властивістю: для кожного натурального дільника d числа n добуток решти додатніх дільників числа n є точним степенем.

Точний степінь — це число вигляду a^b для деяких натуральних чисел $a \geqslant 1$ та $b \geqslant 2$.

Задача 7. Дано гострокутний трикутник ABC, у якому $AB < AC$. Нехай точка M — середина сторони BC. На сторонах AC та AB відмічено такі точки E та F відповідно, що описане коло $\triangle MEF$ дотикається прямої BC. Описані кола трикутників AEF та ABC вдруге перетинаються в точці $P \neq A$. Нехай Q така точка на описаному колі $\triangle AEF$, що пряма AQ перпендикулярна до прямої BC.

Доведіть, що пряма PQ проходить через центр описаного кола $\triangle MEF$.

Задача 8. Дано опуклий многокутник $\mathcal{P}$ з межею $\mathcal{B}$. Функція $f\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ називається *чорнобильською*, якщо вона задовільняє такі умови:

(i) $f(f(X)) = X$ для всіх точок $X \in \mathcal{B}$;

(ii) для всіх точок Y та $Z \in \mathcal{B}$ відрізки $Yf(Y)$ та $Zf(Z)$ мають спільну точку, що належіть внутрішності $\mathcal{P}$.

Знайдіть таке найбільше дійсне число c, що для кожного опуклого многокутника $\mathcal{P}$ та чорнобильської функції f знайдеться точка $W \in \mathcal{B}$, для якої довжина відрізка $Wf(W)$ не менша за добуток числа c та периметра многокутника $\mathcal{P}$?

Час написання: 4 години 30 хвилин.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Language: Ukrainian