1st European Mathematical Olympiad

Language: **Slovenian**

Day: **2**

nedelja, 26. april 2026

Naloga 5. Naj bo $n \geqslant 4$ naravno število. Poišči vsa pozitivna realna števila $x_1, x_2, \ldots, x_n$, za katera velja

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= x_2x_3 + 1 \\ x_2 + x_3 &= x_3x_4 + 1 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= x_nx_1 + 1 \\ x_n + x_1 &= x_1x_2 + 1. \end{cases}$$

Naloga 6. Določi vsa naravna števila $n \geqslant 2$ z naslednjo lastnostjo: za vsak pozitivni delitelj d števila n je produkt vseh ostalih pozitivnih deliteljev števila n popolna potenca.

Popolna potenca je število oblike a^b za neki naravni števili $a \geqslant 1$ in $b \geqslant 2$.

Naloga 7. Naj bo ABC ostrokoten trikotnik, v katerem velja $|AB| < |AC|$. Naj bo M razpolovišče daljice BC. Naj bosta E in F taki točki na daljicah AC in AB zaporedoma, da se očrtana krožnica trikotnika MEF dotika premice BC. Očrtani krožnici trikotnikov AEF in ABC se sekata v točki $P \neq A$. Naj bo Q taka točka na očrtani krožnici trikotnika AEF, da je premica AQ pravokotna na premico BC.

Dokaži, da premica PQ poteka skozi središče očrtane krožnice trikotnika MEF.

Naloga 8. Za konveksen večkotnik $\mathcal{P}$ naj $\mathcal{B}$ označuje množico točk na robu $\mathcal{P}$. Funkcija $f\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ je *evropska*, če ustreza naslednjima lastnostma:

(i) $f(f(X)) = X$ za vse točke $X \in \mathcal{B}$;

(ii) Daljici $Yf(Y)$ in $Zf(Z)$ imata skupno točko v strogi notranjosti večkotnika za vse točke $Y, Z \in \mathcal{B}$.

Katero je največje realno število c, tako da za vsak konveksen večkotnik $\mathcal{P}$ in evropsko funkcijo f obstaja taka točka $W \in \mathcal{B}$, da je dolžina daljice $Wf(W)$ enaka vsaj c-kratniku obsega večkotnika $\mathcal{P}$?

Čas pisanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.