1st European Mathematical Olympiad

Language: **Russian**

Day: **2**

Воскресенье, 26 Апреля, 2026

Задача 5. Пусть $n \geqslant 4$ – целое положительное число. Определите все положительные действительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие, что

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= x_2x_3 + 1 \\ x_2 + x_3 &= x_3x_4 + 1 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= x_nx_1 + 1 \\ x_n + x_1 &= x_1x_2 + 1. \end{cases}$$

Задача 6. Определите все положительные целые числа $n \geqslant 2$, удовлетворяющие следующему условию: для каждого положительного делителя d числа n, произведение всех остальных положительных делителей числа n равно точной степени числа.

Точной степенью числа называется число вида a^b для некоторых целых чисел $a \geqslant 1$ и $b \geqslant 2$.

Задача 7. Дан остроугольный треугольник ABC, причем $AB < AC$. Пусть M – середина отрезка BC. Точки E и F выбраны на отрезках AC и AB соответственно так, что описанная окружность треугольника MEF касается BC. Описанные окружности треугольников AEF и ABC пересекаются в точке $P \neq A$. Пусть Q – точка на описанной окружности треугольника AEF такая, что прямые AQ и BC перпердикулярны.

Докажите, что прямая PQ проходит через центр описанной окружности треугольника MEF.

Задача 8. Для выпуклого многоугольника $\mathcal{P}$, пусть $\mathcal{B}$ – множество точек на границе $\mathcal{P}$. Назовем функцию $f\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ *Европейской*, если она удовлетворяет следующим условиям:

(i) $f(f(X)) = X$ для всех точек $X \in \mathcal{B}$;

(ii) Отрезки $Yf(Y)$ и $Zf(Z)$ имеют общую точку строго внутри многоугольника, для всех точек $Y, Z \in \mathcal{B}$.

Чему равно наибольшее действительное число c такое, что любого выпуклого многоугольника $\mathcal{P}$ и Европейской функции f, существует точка $W \in \mathcal{B}$ такая, что длина отрезка $Wf(W)$ по крайней мере в c раз больше периметра $\mathcal{P}$?

Время работы: 4 часа и 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.