Zadanie 5. Dana jest dodatnia liczba całkowita $n \geqslant 4$. Znaleźć wszystkie takie dodatnie liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$, że

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= x_2x_3 + 1 \\ x_2 + x_3 &= x_3x_4 + 1 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= x_nx_1 + 1 \\ x_n + x_1 &= x_1x_2 + 1. \end{cases}$$

Zadanie 6. Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite $n \geqslant 2$ o następującej własności: dla każdego dodatniego dzielnika d liczby n, iloczyn wszystkich pozostałych dodatnich dzielników n jest właściwą potęgą liczby całkowitej.

Właściwa potęga liczby całkowitej to liczba postaci a^b dla pewnych liczb całkowitych $a \geqslant 1$ oraz $b \geqslant 2$.

Zadanie 7. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, przy czym $AB < AC$. Niech M będzie środkiem boku BC. Niech E i F będą takimi punktami odpowiednio na bokach AC i AB, że okrąg opisany na trójkącie MEF jest styczny do BC. Okręgi opisane na trójkątach AEF i ABC przecinają się w punkcie $P \neq A$. Niech Q będzie takim punktem na okręgu opisanym na trójkącie AEF, że AQ jest prostopadłe do BC.

Udowodnić, że PQ przechodzi przez środek okręgu opisanego na trójkącie MEF.

Zadanie 8. Dla wielokąta wypukłego $\mathcal{P}$: niech $\mathcal{B}$ oznacza zbiór punktów leżących na brzegu $\mathcal{P}$. Funkcja $f \colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ jest *europejska*, jeśli spełnia następujące warunki:

(i) $f(f(X)) = X$ dla wszystkich punktów $X \in \mathcal{B}$;

(ii) odcinki $Yf(Y)$ oraz $Zf(Z)$ mają punkt wspólny we wnętrzu wielokąta $\mathcal{P}$, dla wszystkich punktów $Y, Z \in \mathcal{B}$.

Jaka jest największa liczba rzeczywista c, dla której dowolny wielokąt wypukły $\mathcal{P}$ oraz europejska funkcja f spełniają: istnieje taki punkt $W \in \mathcal{B}$, że długość odcinka $Wf(W)$ wynosi przynajmniej c razy długość obwodu $\mathcal{P}$.

Czas trwania zawodów: 4 godziny 30 minut.
Każde zadanie jest warte 7 punktów.