Oppgave 5. La $n \geqslant 4$ være et positivt heltall. Finn alle positive reelle tall $x_1, x_2, \ldots, x_n$ slik at

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= x_2x_3 + 1 \\ x_2 + x_3 &= x_3x_4 + 1 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= x_nx_1 + 1 \\ x_n + x_1 &= x_1x_2 + 1. \end{cases}$$

Oppgave 6. Bestem alle positive heltall $n \geqslant 2$ med følgende egenskap: For hver positive divisor d av n er produktet av alle de resterende positive divisorene til n en perfekt potens.

En perfekt potens er et tall på formen a^b der $a \geqslant 1$ og $b \geqslant 2$ er heltall.

Oppgave 7. La ABC være en spissvinklet trekant med $AB < AC$. La M være midtpunktet til BC. La E og F være punkter på linjestykkene AC og AB slik at omsirkelen til trekant MEF tangerer BC. Omsirkelene til trekantene AEF og ABC skjærer igjen i $P \neq A$. La Q være et punkt på omsirkelen til trekant AEF slik at AQ står normalt på BC.

Vis at omsenteret til trekant MEF ligger på PQ.

Oppgave 8. For et konvekst polygon $\mathcal{P}$, la $\mathcal{B}$ være mengden av punkter på randen til $\mathcal{P}$. En funksjon $f\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ er *europeisk* dersom den oppfyller de følgende egenskapene:

(i) $f(f(X)) = X$ for alle punkter $X \in \mathcal{B}$.

(ii) Linjestykkene $Yf(Y)$ og $Zf(Z)$ har et felles punkt i det indre av polygonet, for alle punkter $Y, Z \in \mathcal{B}$.

Hva er det største reelle tallet c slik at for hvert konvekse polygon $\mathcal{P}$ og hver europeiske funksjon f finnes det et punkt $W \in \mathcal{B}$ slik at lengden på linjestykket $Wf(W)$ er minst c ganger omkretsen til $\mathcal{P}$?

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter.
Hver oppgaver er verdt 7 poeng.