1st European Mathematical Olympiad

Language: **Macedonian**

Day: **2**

Недела, 26-ти април, 2026

Задача 5. Нека $n \geqslant 4$ е позитивен цел број. Определи ги сите позитивни реални броеви $x_1, x_2, \dots, x_n$ такви што

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= x_2x_3 + 1 \\ x_2 + x_3 &= x_3x_4 + 1 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= x_nx_1 + 1 \\ x_n + x_1 &= x_1x_2 + 1. \end{cases}$$

Задача 6. Определи ги сите позитивни цели броеви $n \geqslant 2$ кои го задоволуваат следното својство: за секој позитивен делител d на n, производот на останатите позитивни делители на n е полн степен.

Полн степен е број од облик a^b за некои цели броеви $a \geqslant 1$ и $b \geqslant 2$.

Задача 7. Нека ABC е остроаголен триаголник во кој $AB < AC$. Нека M е средината на страната BC. Нека E и F се точки на отсечните AC и AB, соодветно, така што опишаната кружница на триаголникот MEF ја допира BC. Опишаните кружници на триаголниците AEF и ABC се сечат во точка $P \neq A$. Нека Q е точката на опишаната кружница околу триаголникот AEF таква што AQ е нормална на BC.

Докажи дека PQ минува низ центарот на опишаната кружница околу триаголникот MEF.

Задача 8. За конвексен многуаголник $\mathcal{P}$, нека $\mathcal{B}$ е множеството од рабни точки на $\mathcal{P}$. Функцијата $f\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ е *европска* ако ги задоволува следните услови:

(i) $f(f(X)) = X$ важи за сите точки $X \in \mathcal{B}$;

(ii) Отсечките $Yf(Y)$ и $Zf(Z)$ имаат заедничка точка која е во внатрешноста на многуаголникот, за секои точки $Y, Z \in \mathcal{B}$.

Кој е најголемиот реален број c таков што за секој конвексен многуаголник $\mathcal{P}$ и европска функција f, постои точка $W \in \mathcal{B}$ таква што должината на отсечката $Wf(W)$ е најмалку c пати по периметарот на $\mathcal{P}$?

Време: 4 часа и 30 минути.
Секоја задача вредни 7 поени.