



# 1st European Mathematical Olympiad

Language: Icelandic

Dagur: 2

Sunnudagur, 26. apríl, 2026

**Dæmi 5.** Látum  $n \geq 4$  vera jákvæða heiltölu. Finnið allar jákvæðar rauntölur  $x_1, x_2, \dots, x_n$  þannig að

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_2x_3 + 1 \\ x_2 + x_3 = x_3x_4 + 1 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = x_nx_1 + 1 \\ x_n + x_1 = x_1x_2 + 1. \end{cases}$$

**Dæmi 6.** Ákveðið allar jákvæðar heiltölur  $n \geq 2$  með eftirfarandi eiginleika: Fyrir sérhvern jákvæðan deili  $d$ , sem gengur upp í  $n$ , er margfeldi allra annarra jákvæðra deila í  $n$  fullkomið veldi.

*Fullkomið veldi er tala á forminu  $a^b$  fyrir einhverjar heiltölur  $a \geq 1$  og  $b \geq 2$ .*

**Dæmi 7.** Látum  $ABC$  vera hvasshyrndan þríhyrning þannig að  $AB < AC$ . Látum  $M$  vera miðpunkt hliðarinnar  $BC$ . Látum  $E$  og  $F$  vera punkta á hliðunum  $AC$  and  $AB$ , hvorri um sig, þannig að umritaði hringurinn um þríhyrninginn  $MEF$  hafi  $BC$  sem snertil. Umrituðu hringarnir um þríhyrningana  $AEF$  og  $ABC$  skerast í punkti  $P \neq A$ . Látum  $Q$  vera punkt á umritaða hringnum um þríhyrninginn  $AEF$  þannig að  $AQ$  sé hornrétt á  $BC$ .

Sannið að  $PQ$  fer í gegnum miðpunkt umritaða hringsins um þríhyrninginn  $MEF$ .

**Dæmi 8.** Í kúptum marghyrningi  $\mathcal{P}$ , látum  $\mathcal{B}$  vera mengi punkta á jaðri  $\mathcal{P}$ . Fallið  $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  er *evrópskt* ef það uppfyllir eftirfarandi eiginleika:

- (i)  $f(f(X)) = X$  fyrir alla punkta  $X \in \mathcal{B}$ .
- (ii) Línustrikin  $Yf(Y)$  og  $Zf(Z)$  hafa sameiginlegan punkt inni í marghyrningnum, fyrir alla punkta  $Y, Z \in \mathcal{B}$ .

Hver er stærsta rauntala  $c$  þannig að fyrir sérhvern kúptan marghyrning  $\mathcal{P}$  og evrópskt fall  $f$ , sé til punktur  $W \in \mathcal{B}$  þannig að lengd línustriksins  $Wf(W)$  sé að minnsta kosti  $c$  sinnum ummál  $\mathcal{P}$ ?