1st European Mathematical Olympiad

Language: **German**

Day: **2**

Sonntag, 26. April 2026

Aufgabe 5. Sei $n \geqslant 4$ eine positive ganze Zahl. Bestimme alle positiven reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sodass

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= x_2 x_3 + 1 \\ x_2 + x_3 &= x_3 x_4 + 1 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= x_n x_1 + 1 \\ x_n + x_1 &= x_1 x_2 + 1. \end{cases}$$

Aufgabe 6. Bestimme alle positiven ganzen Zahlen $n \geqslant 2$ mit der folgenden Eigenschaft: für jeden positiven Teiler d von n ist das Produkt aller anderen positiven Teiler von n eine perfekte Potenz.

Eine perfekte Potenz ist eine Zahl von der Form a^b für ganze Zahlen $a \geqslant 1$ und $b \geqslant 2$.

Aufgabe 7. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB < AC$. Sei M der Mittelpunkt der Strecke BC. Seien E und F Punkte auf den Strecken AC respektive AB, sodass der Umkreis vom Dreieck MEF tangential zu BC ist. Die Umkreise von den Dreiecken AEF und ABC schneiden sich ein zweites Mal in einem Punkt $P \neq A$. Sei Q ein Punkt auf dem Umkreis vom Dreieck AEF, sodass AQ senkrecht zu BC ist.

Zeige, dass der Umkreismittelpunkt vom Dreieck MEF auf PQ liegt.

Aufgabe 8. Sei $\mathcal{P}$ ein konvexes Polygon und sei $\mathcal{B}$ die Menge der Randpunkte von $\mathcal{P}$. Eine Funktion $f\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ ist *europäisch* falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) $f(f(X)) = X$ für alle Punkte $X \in \mathcal{B}$;

(ii) Strecken $Yf(Y)$ und $Zf(Z)$ haben einen gemeinsamen Punkt strikt innerhalb des Polygons für alle Punkte $Y, Z \in \mathcal{B}$.

Bestimme die grösste reelle Zahl c, sodass für jedes konvexe Polygon $\mathcal{P}$ und jede europäische Funktion f ein Punkt $W \in \mathcal{B}$ existiert, sodass die Länge der Strecke $Wf(W)$ mindestens c mal den Umfang von $\mathcal{P}$ ist.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten.
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Language: German