Problème 5. Soit $n \geqslant 4$ un entier positif. Trouvez tous les nombres réels strictement positifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= x_2x_3 + 1 \\ x_2 + x_3 &= x_3x_4 + 1 \\ & \vdots \\ x_{n-1} + x_n &= x_nx_1 + 1 \\ x_n + x_1 &= x_1x_2 + 1. \end{cases}$$

Problème 6. Déterminer tous les entiers positifs $n \geqslant 2$ satisfaisant la propriété suivante : pour chaque diviseur strictement positif d de n, le produit de tous les autres diviseurs strictement positifs de n est une puissance parfaite.

Une puissance parfaite est un nombre de la forme a^b pour deux entiers $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 2$.

Problème 7. Soit ABC un triangle acutangle avec $AB < AC$. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Soient E et F des points sur les segments $[AC]$ et $[AB]$ respectivement, tels que le cercle circonscrit au triangle MEF est tangent à (BC). Les cercles circonscrits aux triangles AEF et ABC s'intersectent en $P \neq A$. Soit Q un point du cercle circonscrit au triangle AEF tel que (AQ) est perpendiculaire à (BC).

Montrer que (PQ) passe par le centre du cercle circonscrit au triangle MEF.

Problème 8. Pour un polygone convexe $\mathcal{P}$, on note $\mathcal{B}$ l'ensemble des points du bord de $\mathcal{P}$. Une fonction $f \colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ est dite *européenne* si elle satisfait les propriétés suivantes :

(i) $f(f(X)) = X$ pour tous les points $X \in \mathcal{B}$;

(ii) Les segments de droite $[Yf(Y)]$ et $[Zf(Z)]$ ont un point en commun contenu strictement à l'intérieur du polygone, pour tous les points $Y, Z \in \mathcal{B}$.

Quel est le plus grand nombre réel c tel que pour chaque polygone convexe $\mathcal{P}$ et chaque fonction européenne f, il y a un point $W \in \mathcal{B}$ tel que la longueur du segment de droite $[Wf(W)]$ est au moins c fois le périmètre de $\mathcal{P}$?

Temps : 4 heures et 30 minutes.
Chaque problème est noté sur 7 points.