1st European Mathematical Olympiad

Language: **Finnish**

Day: **2**

Sunnuntai, 26. huhtikuuta 2026

Tehtävä 5. Olkoon $n \geqslant 4$ positiivinen kokonaisluku. Etsi kaikki positiiviset reaaliluvut $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jotka toteuttavat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= x_2 x_3 + 1 \\ x_2 + x_3 &= x_3 x_4 + 1 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= x_n x_1 + 1 \\ x_n + x_1 &= x_1 x_2 + 1. \end{cases}$$

Tehtävä 6. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut $n \geqslant 2$, joilla on seuraava ominaisuus: jos valitaan mikä tahansa luvun n positiivinen tekijä d, niin luvun n kaikkien muiden positiivisten tekijöiden tulo on täydellinen potenssi.

Täydellinen potenssi on muotoa a^b oleva luku joillain kokonaisluvuilla $a \geqslant 1$ ja $b \geqslant 2$.

Tehtävä 7. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, jolla $AB < AC$. Olkoon M janan BC keskipiste. Olkoot E ja F sellaiset pisteet janoilla AC ja AB, että kolmion MEF ympärysympyrä on tangentti suoralle BC. Kolmioiden AEF ja ABC ympärysympyrät leikkaavat pisteessä $P \neq A$. Olkoon Q sellainen piste ympyrän AEF ympärysympyrällä, että AQ ja BC ovat kohtisuorassa.

Todista, että suora PQ kulkee kolmion MEF ympärysympyrän keskipisteen kautta.

Tehtävä 8. Kun $\mathcal{P}$ on konveksi monikulmio, olkoon $\mathcal{B}$ monikulmion $\mathcal{P}$ reunalla sijaitsevien pisteiden joukko. Funktio $f\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ on *eurooppalainen*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) $f(f(X)) = X$ kaikilla $X \in \mathcal{B}$, ja

(ii) janoilla $Yf(Y)$ ja $Zf(Z)$ on yhteinen piste aidosti monikulmion sisällä kaikilla $Y, Z \in \mathcal{B}$.

Määritä suurin sellainen reaaliluku c, että jokaisella konveksilla monikulmiolla $\mathcal{P}$ ja eurooppalaisella funktiolla f on olemassa sellainen piste $W \in \mathcal{B}$, että janan $Wf(W)$ pituus on vähintään c kertaa monikulmion $\mathcal{P}$ piiri.

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia.
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen.