Задача 5. Нека $n \geqslant 4$ е цяло число. Намерете всички положителни реални числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, такива че

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= x_2x_3 + 1 \\ x_2 + x_3 &= x_3x_4 + 1 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= x_nx_1 + 1 \\ x_n + x_1 &= x_1x_2 + 1. \end{cases}$$

Задача 6. Намерете всички цели числа $n \geqslant 2$, които притежават следното свойство: за всеки положителен делител d на n, произведението на всички останали положителни делители на n е точна степен.

Точна степен е число от вида a^b, където $a \geqslant 1$ и $b \geqslant 2$ са цели числа.

Задача 7. Даден е остроъгълен триъгълник ABC, за който $AB < AC$. Нека M е средата на страната BC. Върху страните AC и AB са избрани съответно точки E и F, такива че описаната окръжност около триъгълник MEF се допира до страната BC. Описаните окръжности около триъгълниците AEF и ABC се пресичат за втори път в точка $P \neq A$. Нека Q е точка от описаната окръжност около триъгълник AEF, такава че правата AQ е перпендикулярна на BC.

Докажете, че правата PQ минава през центъра на описаната окръжност за триъгълник MEF.

Задача 8. За изпъкнал многоъгълник $\mathcal{P}$ означаваме с $\mathcal{B}$ множеството от точките по границата на $\mathcal{P}$. Функцията $f\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ наричаме *Европейска*, ако изпълнява следните свойства:

(i) $f(f(X)) = X$ за всяка точка $X \in \mathcal{B}$;

(ii) за всеки две точки $Y, Z \in \mathcal{B}$ отсечките $Yf(Y)$ и $Zf(Z)$ имат обща точка, която е изцяло вътрешна за многоъгълника.

Кое е най-голямото реално число c, такова че за всеки изпъкнал многоъгълник $\mathcal{P}$ и Европейска функция f, съществува точка $W \in \mathcal{B}$, такава че дължината на отсечката $Wf(W)$ е поне c пъти периметъра на $\mathcal{P}$?

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки