1st European Mathematical Olympiad

Language: **Ukrainian**

Day: **1**

Субота, 25 квітня 2026

Задача 1. Знайдіть усі натуральні числа n, що задовільняють таку умову: множину $\{1, 2, \ldots, 2n-1, 2n\}$ можна розділити на дві підмножини $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$, кожна з яких містить по n елементів та сума елементів підмножини $\mathcal{A}$ ділить суму елементів підмножини $\mathcal{B}$.

Задача 2. Дано трикутник ABC, на стороні AC якого відмічено різні точки K, L такі, що $\angle ABK = \angle CBL$. Промені BK, BL не є перпендикулярними до сторони AC та перетинають описане коло $\triangle ABC$ вдруге в точках K_1, L_1 відповідно. На дотичних до описаного кола $\triangle ABC$ у точках K_1 та L_1 відмітили такі точки K_2, L_2 відповідно, що $\angle BKK_2 = \angle BLL_2 = 90^\circ$.

Доведіть, що точки A, C, K_2 та L_2 лежать на одному колі.

Задача 3. Дано натуральне число $n \geqslant 2$. У Євроленді існують n міст, кожну пару яких з'єднує двосторонній рейс. Кожному рейсу гетьман призначає строго додатню ціну, однакову в обох напрямках. Для двох різних міст A, B визначимо величину $D(A, B)$ як кількість перельотів у найдешевшому маршруті між ними; якщо таких маршрутів декілька, то розглядається найдовший з них.

Для кожного значення n знайдіть найбільше можливе середнє значення величини $D(A, B)$ по всіх парах різних міст A, B, якого гетьман може досягнути.

Задача 4. Позначимо за $\mathbb{N}$ множину натуральних чисел. Знайдіть усі функції $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, що одночасно задовільняють такі умови:

(i) $f(mn) = f(m)f(n)$ для всіх натуральних чисел m та n;

(ii) існує таке натуральне число c, що $f(n) \leqslant n^c$ для всіх натуральних n;

(iii) числа $f(n) + m$ та $f(m) + n + 1$ взаємно прості для всіх натуральних чисел m та n.

Час написання: 4 години 30 хвилин.
Кожна задача оцінюється в 7 балів.