1st European Mathematical Olympiad

Language: **Slovenian**

Day: **1**

sobota, 25. april 2026

Naloga 1. Določi vsa naravna števila n, za katera lahko množico $\{1, 2, \ldots, 2n-1, 2n\}$ razdelimo na dve disjunktni množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$, vsako z n elementi, tako da vsota elementov množice $\mathcal{A}$ deli vsoto elementov množice $\mathcal{B}$.

Naloga 2. Za dan trikotnik ABC naj bosta K in L različni točki na stranici AC, za kateri velja $\angle ABK = \angle CBL$. Poltraka BK in BL nista pravokotna na premico AC in sekata očrtano krožnico trikotnika ABC drugič v točkah K_1 in L_1 zaporedoma. Točki K_2 in L_2 ležita na tangentah na očrtano krožnico trikotnika ABC v točkah K_1 in L_1 zaporedoma, tako da velja $\angle BKK_2 = \angle BLL_2 = 90°$.

Dokaži, da so točke A, C, K_2, in L_2 konciklične.

Naloga 3. Naj bo $n \geqslant 2$ naravno število. Evrolandija ima n mest z direktnimi leti, ki povezujejo vsak par mest v obe smeri. Vsakemu paru mest cesar določi ceno letov med tema mestoma, ki je enaka za obe smeri. Za različni mesti A in B naj bo $D(A, B)$ število letov v najcenejši poti med njima; če je takih poti več, je število $D(A, B)$ definirano z najdaljšo izmed njih.

Za vsako vrednost števila n poišči največjo možno povprečno vrednost števil $D(A, B)$ po vseh parih različnih mest (A, B), ki jo lahko cesar doseže.

Naloga 4. Naj bo $\mathbb{N}$ množica naravnih števil. Poišči vse funkcije $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ki hkrati zadoščajo naslednjim lastnostim:

(i) $f(mn) = f(m)f(n)$ za vsa naravna števila m in n;

(ii) Obstaja naravno število c, za katerega je $f(n) \leqslant n^c$ za vsa naravna števila n;

(iii) Števili $f(n) + m$ in $f(m) + n + 1$ sta tuji za vsa naravna števila m in n.

Čas pisanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.