1st European Mathematical Olympiad

Language: **Russian**

Day: **1**

Суббота, 25 Апреля, 2026

Задача 1. Определите все положительные целые числа n, удовлетворяющие следующему условию: множество чисел $\{1, 2, \ldots, 2n-1, 2n\}$ может быть разделено на два непересекающихся множества чисел $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ содержащих по n элементов каждое, таких, что сумма элементов множества $\mathcal{A}$ делит сумму элементов множества $\mathcal{B}$.

Задача 2. Дан треугольник ABC. На отрезке AC выбраны различные точки K и L такие, что $\angle ABK = \angle CBL$. Лучи BK и BL не перпендикулярны AC, и пересекают описанную окружность треугольника ABC второй раз в точках K_1 и L_1 соответственно. Точки K_2 и L_2 выбраны на касательных к описанной окружности треугольника ABC из точек K_1 и L_1 соответственно так, что $\angle BKK_2 = \angle BLL_2 = 90°$.

Докажите, что точки A, C, K_2, и L_2 лежат на одной окружности.

Задача 3. Дано целое число $n \geqslant 2$. В Евроландии n городов, причем любые два города соеденены прямыми авиарейсами в обе стороны. Для каждой пары городов, император назначает положительную цену за авиарейс между городами, одинаковую для всех авиарейсов между выбранной парой городов. Для различных городов A и B, пусть $D(A, B)$ обозначает количество авиарейсов в самом дешевом путешествии между городами; если таких путешествий несколько, то $D(A, B)$ выбирается по самому длинному путешествию.

Для каждого значения n, найдите наибольшее возможное среднее значение $D(A, B)$ для всех пар различных городов (A, B), которое император может достичь.

Задача 4. Пусть $\mathbb{N}$ обозначает множество положительных целых чисел. Найдите все функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, которые одновременно удовлетворяют следующим условиям:

(i) $f(mn) = f(m)f(n)$ для всех положительных целых чисел m и n;

(ii) Существует положительное целое число c такое, что $f(n) \leqslant n^c$ для всех положительных целых чисел n;

(iii) Числа $f(n) + m$ и $f(m) + n + 1$ взаимно просты для всех положительных целых чисел m и n.

Время работы: 4 часа и 30 минут.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.