



1st European Mathematical Olympiad

Language: Polish

Day: 1

Sobota, 25 kwietnia 2026

Zadanie 1. Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite n spełniające następującą własność: zbiór $\{1, 2, \dots, 2n - 1, 2n\}$ można podzielić na takie dwa rozłączne n -elementowe zbiory \mathcal{A} i \mathcal{B} , że suma elementów zbioru \mathcal{A} dzieli sumę elementów zbioru \mathcal{B} .

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC . Niech K i L będą różnymi punktami leżącymi na boku AC w taki sposób, że $\angle ABK = \angle CBL$. Półproste BK i BL nie są prostopadłe do AC oraz przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC ponownie odpowiednio w punktach K_1 i L_1 . Punkty K_2 i L_2 leżą odpowiednio na prostych stycznych w punktach K_1 i L_1 do okręgu opisanego na trójkącie ABC , spełniając $\angle BKK_2 = \angle BLL_2 = 90^\circ$.

Udowodnić, że punkty A, C, K_2 i L_2 leżą na jednym okręgu.

Zadanie 3. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. W Eurolandii istnieje n miast, między każdymi dwoma istnieje bezpośrednie połączenie lotnicze w obu kierunkach. Dla każdej pary miast, władca przypisał dodatnią liczbę rzeczywistą, która jest opłatą za lot, taką samą w obu kierunkach. Dla dwóch różnych miast A i B , niech $D(A, B)$ oznacza liczbę lotów składających się na najtańszą podróż pomiędzy nimi; jeśli istnieje więcej niż jedna najtańsza podróż, to $D(A, B)$ dotyczy najdłuższej z nich.

Dla każdej wartości n znaleźć największą możliwą wartość średniej arytmetycznej wartości $D(A, B)$ zliczanej po wszystkich parach (A, B) różnych miast, jaką władca może osiągnąć.

Zadanie 4. Niech \mathbb{N} oznacza zbiór dodatnich liczb całkowitych. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, które spełniają następujące warunki:

- (i) $f(mn) = f(m)f(n)$ dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych m i n ;
- (ii) istnieje taka dodatnia liczba całkowita c , że $f(n) \leq n^c$ dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n ;
- (iii) liczby $f(n) + m$ oraz $f(m) + n + 1$ są względnie pierwsze dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych m i n .