1st European Mathematical Olympiad

Language: **Norwegian**

Day: **1**

Lørdag, 25. april, 2026

Oppgave 1. Bestem alle positive heltall n med den følgende egenskapen: Mengden $\{1, 2, \ldots, 2n-1, 2n\}$ kan partisjoneres i to disjunkte mengder $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ med n elementer hver, slik at summen av elementene i $\mathcal{A}$ deler summen av elementene i $\mathcal{B}$.

Oppgave 2. La ABC være en trekant, og la K og L være distinkte punkter på linjestykket AC slik at $\angle ABK = \angle CBL$. Strålene BK og BL står ikke normalt på AC, og skjærer omsirkelen til trekant ABC igjen i henholdsvis K_1 og L_1. Punktene K_2 og L_2 ligger på tangentene til omsirkelen til trekant ABC i henholdsvis K_1 og L_1 slik at $\angle BKK_2 = \angle BLL_2 = 90°$.

Vis at punktene A, C, K_2, og L_2 ligger på en sirkel.

Oppgave 3. La $n \geqslant 2$ være et heltall. Euroland har n byer med direkte flyvninger mellom hvert par av byer, i begge retninger. For hvert par av byer velger Presidenten en positiv pris som er lik for flyvningene i begge retninger. For to forskjellige byer A og B betegner $D(A, B)$ antall flyvninger i den billigste reisen mellom de to byene. Hvis det er flere reiser som er like billige betegner $D(A, B)$ antall flyvninger i den lengste av disse reisene.

For hver n, finn den største mulige verdien av gjennomsnittet til $D(A, B)$ over alle par av forskjellige byer (A, B).

Oppgave 4. La $\mathbb{N}$ være mengden av positive heltall. Finn alle funksjoner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ som oppfyller de følgende kriteriene:

(i) $f(mn) = f(m)f(n)$ for alle positive heltall m og n.

(ii) The eksisterer et positivt heltall c slik at $f(n) \leqslant n^c$ for alle positive heltall n;

(iii) Tallene $f(n) + m$ og $f(m) + n + 1$ er relativit primiske for alle positive heltall m og n.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter.
Hver oppgave er verdt 7 poeng.