1st European Mathematical Olympiad

Language: **Macedonian**

Day: **1**

Сабота, 25-ти април, 2026

Задача 1. Определи ги сите позитивни цели броеви n кои го задоволуваат следното својство: множеството $\{1, 2, \ldots, 2n-1, 2n\}$ може да се разбие на две дисјунктни множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ со по n елементи, така што збирот на елементите од $\mathcal{A}$ е делител на збирот на елементите од $\mathcal{B}$.

Задача 2. За даден триаголник ABC, нека K и L се различни точки на страната AC така што $\angle ABK = \angle CBL$. Полуправите BK и BL не се нормални на AC и ја сечат опишаната кружница на триаголникот ABC по втор пат во точки K_1 и L_1, соодветно. Точките K_2 и L_2 лежат на тангентите на опишаната кружница околу триаголникот ABC во K_1 и L_1, соодветно, така што $\angle BKK_2 = \angle BLL_2 = 90°$.

Докажи дека точките A, C, K_2 и L_2 лежат на кружница.

Задача 3. Нека $n \geqslant 2$ е цел број. Евролендија има n градови, со директни летови меѓу секој пар градови во двете насоки. За секој лет меѓу пар градови, императорот доделува позитивна цена, која е иста во двете насоки. За два различни града A и B, нека $D(A, B)$ е бројот на летови во најевтиното патување меѓу нив; ако постојат повеќе вакви патувања, тогаш $D(A, B)$ е дефинирано од најдолгото.

За секоја вредност на n, определи ја најголемата можна вредност на просекот од $D(A, B)$ за сите парови од различни градови (A, B), кој императорот може да го достигне.

Задача 4. Нека $\mathbb{N}$ е множеството од позитивни цели броеви. Оредели ги сите функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ кои ги задоволуваат следните услови:

(i) Важи $f(mn) = f(m)f(n)$ за секои позитивни цели броеви m и n;

(ii) Постои позитивен цел број c таков што $f(n) \leqslant n^c$ за секој позитивен цел број n;

(iii) Броевите $f(n) + m$ и $f(m) + n + 1$ се заемно прости за секои позитивни цели броеви m и n.

Време: 4 часа и 30 минути

Секоја задача вреди 7 поени