



1st European Mathematical Olympiad

Language: **Lithuanian**

Day: **1**

2026 m. balandžio 25 d.,
šeštadienis

1 uždavinys. Nustatykite visus natūraliuosius skaičius n , turinčius tokią savybę: aibę $\{1, 2, \dots, 2n-1, 2n\}$ įmanoma padalyti į dvi nesikertančias aibes \mathcal{A} ir \mathcal{B} , kurių kiekvieną sudaro n elementų, o aibės \mathcal{B} visų elementų suma dalijasi iš aibės \mathcal{A} visų elementų sumos.

2 uždavinys. Trikampio ABC kraštinėje AC pažymėti tokie skirtingi taškai K ir L , kad $\angle ABK = \angle CBL$. Tiesių spinduliai BK ir BL nėra statmeni tiesei AC ir kerta trikampio ABC apibrėžtinį apskritimą atitinkamai taškuose $K_1 \neq B$ ir $L_1 \neq B$. Nubrėžus trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo liestines taškuose K_1 ir L_1 , jose atitinkamai pažymėti tokie taškai K_2 ir L_2 , kad $\angle BKK_2 = \angle BLL_2 = 90^\circ$.

Įrodykite, kad taškai A , C , K_2 ir L_2 priklauso vienam apskritimui.

3 uždavinys. Tegū $n \geq 2$ yra natūralusis skaičius. Eurolende yra n miestų. Tarp kiekvienų dviejų miestų vyksta tiesioginiai skrydžiai abiem kryptimis. Kiekvienai skirtingų miestų porai imperatorius užfiksuoja teigiamą skrydžio kainą, tą pačią skrydžiams kiekviena iš dviejų krypčių. Kiekvienai skirtingų miestų A ir B porai skrydžių skaičių pigiausioje kelionėje tarp šių miestų pažymėkime $D(A, B)$; jei tokių pigiausių kelionių yra kelios, tai skaičiaus $D(A, B)$ reikšmę nulemia ta iš jų, kuriai šis skaičius didžiausias.

Kiekvienai skirtingų miestų porai (A, B) užrašius skaičių $D(A, B)$, apskaičiuojamas užrašytųjų skaičių aritmetinis vidurkis. Kiekvienam n nustatykite šio vidurkio didžiausią galimą reikšmę, kurią yra įmanoma gauti imperatoriui.

4 uždavinys. Visų natūraliųjų skaičių aibė žymima \mathbb{N} . Nustatykite visas funkcijas $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, kurios turi visas šias savybes:

- (i) $f(mn) = f(m)f(n)$ visiems natūraliesiems m ir n ;
- (ii) egzistuoja toks natūralusis skaičius c , kad $f(n) \leq n^c$ visiems natūraliesiems n ;
- (iii) skaičiai $f(n)+m$ ir $f(m)+n+1$ yra tarpusavyje pirminiai visiems natūraliesiems m ir n .