



1st European Mathematical Olympiad

Language: Icelandic

Dagur: 1

Laugardagur, 25. apríl, 2026

Dæmi 1. Finnið allar jákvæðar heiltölur n með eftirfarandi eiginleika: Menginu $\{1, 2, \dots, 2n - 1, 2n\}$ má skipta í tvö aðskilin mengi \mathcal{A} og \mathcal{B} , hvort um sig með n stökum, þannig að summa stakanna í \mathcal{A} gengur upp í summu stakanna í \mathcal{B} .

Dæmi 2. Í þríhyrningnum ABC , eru K og L tveir mismunandi punktar á hliðinni AC þannig að $\angle ABK = \angle CBL$. Geislarnir BK og BL eru ekki hornréttir á AC , og skera umritaða hringinn um þríhyrninginn ABC öðru sinni í punktum K_1 og L_1 , hvor um sig. Punktarnir K_2 og L_2 eru á snertlum umritaða hringsins um þríhyrninginn ABC í punktum K_1 og L_1 , hvor um sig, þannig að $\angle BKK_2 = \angle BLL_2 = 90^\circ$.

Sannið að punktarnir A , C , K_2 , og L_2 liggja allir á sama hring.

Dæmi 3. Látum $n \geq 2$ vera heiltölu. Í Evrulandi eru n borgir, þannig að sérhverjar tvær borgir eru tengdar með beinu flugi í báðar áttir. Fyrir sérhverjar tvær borgir ákveður keisarinn verð, stærra en núll, það sama í báðar áttir. Fyrir tvær mismunandi borgir A og B , látum $D(A, B)$ vera fjölda flugferða í ódýrastu ferð á milli þeirra. Ef það eru margar slíkar ferðir, þá er $D(A, B)$ ákveðið af þeirri lengstu.

Fyrir sérhvert n , finnið hæsta mögulega meðaltal af $D(A, B)$ af öllum pörum mismunandi borga (A, B) .

Dæmi 4. Látum \mathbb{N} vera mengi allra jákvæðra heiltalna. Finnið öll föll $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sem uppfylla samtímis öll eftirfarandi skilyrði:

- (i) $f(mn) = f(m)f(n)$ fyrir allar jákvæðar heiltölur m og n ;
- (ii) Til er jákvæð heiltala c þannig að $f(n) \leq n^c$ fyrir allar jákvæðar heiltölur n ;
- (iii) Tölurnar $f(n) + m$ and $f(m) + n + 1$ hafa enga sameiginlega þætti fyrir allar jákvæðar heiltölur m og n .