1st European Mathematical Olympiad

Language: **Georgian**

Day: **1**

Saturday, April 25, 2026

ამოცანა 1. იპოვეთ ყველა დადებითი მთელი n რიცხვი, რომელთაც აქვთ შემდეგი თვისება: სიმრავლე $\{1,2,\dots,2n-1,2n\}$ შეიძლება გაიყოს ორ თანაუკვეთ A და B სიმრავლედ, თითოეულში n ელემენტით, ისე, რომ A სიმრავლის ელემენტთა ჯამი ყოფდეს B სიმრავლის ელემენტთა ჯამს.

ამოცანა 2. მოცემული ABC სამკუთხედის AC გვერდზე ისე მონიშნეს განსხვავებული K და L წერტილები, რომ $< ABK =< CBL$, BK და BL სხივები ,რომლებიც არ არიან AC -ს მართობულები, ABC სამკუთხედზე შემოხაზულ წრეწირს ხელმეორედ შესაბამისად K_1 *და* L_1 წერტილებში კვეთენ, ხოლო K_2 *და* L_2 წერტილები კი ამ წრეწირის K_1 *და* L_1 წერტილებზე გავლებულ მხებებზე შესაბამისად ისე მდებარეობენ, რომ $< BKK_2 =< BLL_2 = 90°$.
დაამტკიცეთ, რომ A, C, K_2 *და* L_2 წერტილები ერთ წრეწირზე მდებარეობენ.

ამოცანა 3. ვთქვათ n≥ 2 მთელი რიცხვია. ევროლენდში n ქალაქია, ნებისმიერ 2 ქალაქს შორის პირდაპირი ფრენებია ორივე მიმართულებით. იმპერატორი თითოეულ ფრენისთვის აწესებს დადებით ფასს, რომელიც ერთი და იგივეა მოცემულ 2 ქალაქს შორის ორივე მიმართულებით. ორი განსხვავებული A და B ქალაქისთვის D(A,B) -თი , აღინიშნება ამ ქალაქების დამაკავშირებელი ყველაზე იაფი მარშრუტის ფრენების რაოდენობა, ამასთან თუ ასეთი მარშრუტი რამდენიმეა, მათ შორის ყველაზე მეტი ფრენების რიცხვი. თითოეული n-ისთვის იპოვეთ ყველა განსხვავებული A და B ქალაქის წყვილების D(A,B)-ის უდიდესი საშუალო მნიშვნელობა, რომელსაც შეიძლება მიაღწიოს იმპერატორმა.

ამოცანა 4. N დადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლეა, იპოვეთ ყველა $f: N \to N$ ფუნქცია, რომლისთვისაც ერთდროულად სრულდება შემდეგი თვისებები:
(i) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ ყველა დადებითი , მთელი m და n რიცხვებისთვის;
(ii) არსებობს მთელი დადებითი c რიცხვი ,ისეთი ,რომ $f(n) \le n^c$ ყველა დადებითი მთელი n- ისთვის;
(iii) $f(n) + m$ და $f(m) + n + 1$ ურთიერთმარტივებია ყველა დადებითი მთელი m

და n-ისთვის

Time: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 7 points