1st European Mathematical Olympiad

Language: **French**

Day: **1**

Samedi 25 avril 2026

Problème 1. Déterminer tous les entiers strictement positifs n qui satisfont la propriété suivante : l'ensemble $\{1, 2, \dots, 2n-1, 2n\}$ peut être partitionné en deux ensembles disjoints $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ comportant n éléments chacun, de telle sorte que la somme des éléments de $\mathcal{A}$ divise la somme des éléments de $\mathcal{B}$.

Problème 2. Soit ABC un triangle et soient K et L deux points distincts sur le côté AC de telle sorte que $\angle ABK = \angle CBL$. On suppose que les droites (BK) et (BL) ne sont pas perpendiculaires à (AC) et intersectent le cercle circonscrit du triangle ABC une deuxième fois en K_1 et L_1 respectivement. Les points K_2 et L_2 se trouvent sur les tangentes au cercle circonscrit à ABC en K_1 et L_1 respectivement de telle sorte que $\angle BKK_2 = \angle BLL_2 = 90°$.

Montrer que les points A, C, K_2 et L_2 sont cocycliques.

Problème 3. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Il y a n villes en Eurolandie et des vols directs reliant chaque paires de villes dans les deux directions. Pour chaque paire de villes, l'empereur attribue un prix strictement positif, ce prix est le même dans les deux directions. Pour deux villes distinctes A et B, on note $D(A, B)$ le nombre de vols du voyage le moins cher entre elles ; si il y a plusieurs tels voyages, $D(A, B)$ est défini au moyen du plus long d'entre eux.

Pour chaque valeur de n, trouver la plus grande valeur moyenne possible de $D(A, B)$ prise sur l'ensemble des paires de villes distinctes (A, B), que l'empereur peut obtenir.

Problème 4. Soit $\mathbb{Z}_{>0}$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ qui satisfont simultanément les propriétés suivantes :

(i) $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tous les entiers strictement positifs m et n ;

(ii) Il existe un entier strictement positif c tel que $f(n) \leqslant n^c$ pour tous les entiers strictement positifs n ;

(iii) Les nombres $f(n) + m$ et $f(m) + n + 1$ sont premiers entre eux pour tous les entiers strictement positifs m et n.

Temps : 4 heures et 30 minutes.
Chaque problème est noté sur 7 points.