1st European Mathematical Olympiad

Language: **Finnish**

Day: **1**

Lauantai, 25. huhtikuuta 2026

Tehtävä 1. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joilla on seuraava ominaisuus: joukko $\{1, 2, \ldots, 2n-1, 2n\}$ voidaan jakaa kahteen erilliseen n alkion joukkoon $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ siten, että joukon $\mathcal{A}$ alkioiden summa jakaa joukon $\mathcal{B}$ alkioiden summan.

Tehtävä 2. Olkoon ABC kolmio ja K ja L sellaiset eri pisteet janalla AC, että $\angle ABK = \angle CBL$. Puolisuorat BK ja BL eivät ole kohtisuorassa janaan AC, ja ne leikkaavat kolmion ABC ympärysympyrän toisen kerran pisteissä K_1 ja L_1. Pisteiden K_1 ja L_1 kautta kulkevilla kolmion ABC ympärysympyrän tangenteilla sijaitsee sellaiset pisteet K_2 ja L_2, että $\angle BKK_2 = \angle BLL_2 = 90°$.

Todista, että pisteet A, C, K_2 ja L_2 sijaitsevat samalla ympyrällä.

Tehtävä 3. Olkoon $n \geqslant 2$ kokonaisluku. Euromaassa on n kaupunkia, ja jokaista kaupunkien paria yhdistää suorat lennot kumpaankin suuntaan. Keisari valitsee jokaiselle kaupunkien parille positiivisen hinnan, joka on kumpaankin lentosuuntaan sama. Kun A ja B ovat eri kaupunkeja, olkoon $D(A, B)$ lentojen lukumäärä halvimmalla reitillä kaupunkien välillä; jos halvimpia reittejä on useita, $D(A, B)$ määräytyy pisimmän reitin mukaan.

Luvuille $D(A, B)$ lasketaan keskiarvo kaikkien parien (A, B) yli, missä A ja B ovat eri kaupunkeja. Etsi jokaiselle luvulle n suurin mahdollinen keskiarvo, jonka keisari voi saavuttaa.

Tehtävä 4. Olkoon $\mathbb{N}$ positiivisten kokonaislukujen joukko. Etsi kaikki seuraavat ehdot toteuttavat funktiot $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

(i) $f(mn) = f(m)f(n)$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla m ja n,

(ii) on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku c, että $f(n) \leqslant n^c$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n, ja

(iii) luvut $f(n) + m$ ja $f(m) + n + 1$ ovat yhteistekijättömiä kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla m ja n.