1st European Mathematical Olympiad

Language: **Estonian**

Day: **1**

Laupäev, 25. aprill 2026

Ülesanne 1. Leia kõik positiivsed täisarvud n, millel on järgmine omadus: hulga $\{1, 2, \ldots, 2n-1, 2n\}$ saab jaotada kaheks ühisosata hulgaks $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$, millest kummaski on n elementi, nii et hulga $\mathcal{B}$ elementide summa on hulga $\mathcal{A}$ elementide summa kordne.

Ülesanne 2. Kolmnurga ABC küljel AC on märgitud erinevad punktid K ja L nii, et $\angle ABK = \angle CBL$. Kiired BK ja BL ei ole risti sirgega AC ning lõikuvad kolmnurga ABC ümberringjoonega teist korda vastavalt punktides $K_1 \neq B$ ja $L_1 \neq B$. Punktid K_2 ja L_2 asuvad kolmnurga ABC ümberringjoonele vastavalt punktidest K_1 ja L_1 tõmmatud puutujatel nii, et $\angle BKK_2 = \angle BLL_2 = 90°$.

Tõesta, et punktid A, C, K_2 ja L_2 asuvad ühel ringjoonel.

Ülesanne 3. Olgu $n \geqslant 2$ täisarv. Eurolandis on n linna, kusjuures iga linnade paari vahel on mõlemas suunas otselend. Iga linnade paari korral määrab keiser positiivse hinna, mis on mõlemas suunas sama. Kahe erineva linna A ja B korral olgu $D(A, B)$ lendude arv nendevahelisel odavaimal teekonnal; kui kõige odavamaid teekondi on mitu, siis defineeritakse $D(A, B)$ kui neist pikim (suurima lendude arvuga).

Iga arvu n korral leia suurim võimalik väärtuste $D(A, B)$ aritmeetiline keskmine üle kõigi erinevate linnade paaride (A, B), mida keiser saab saavutada.

Ülesanne 4. Tähistagu $\mathbb{N}$ kõigi positiivsete täisarvude hulka. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, mis samaaegselt rahuldavad järgmisi omadusi:

(i) $f(mn) = f(m)f(n)$ kõigi positiivsete täisarvude m ja n korral;

(ii) Leidub selline positiivne täisarv c, et $f(n) \leqslant n^c$ iga positiivse täisarvu n korral;

(iii) Arvud $f(n) + m$ ja $f(m) + n + 1$ on ühistegurita kõigi positiivsete täisarvude m ja n korral.

Aega: 4 tundi ja 30 minutit.
Iga ülesanne annab 7 punkti.