1st European Mathematical Olympiad

Language: **Bulgarian**

Day: **1**

Събота, 25 Април 2026

Задача 1. Намерете всички цели положителни числа n, които изпълняват следното свойство: множеството $\{1, 2, \ldots, 2n-1, 2n\}$ може да се разбие на две непресичащи се n-елементни множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, такива че сумата от елементите на $\mathcal{A}$ дели сумата от елементите на $\mathcal{B}$.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC. Нека K и L са различни точки върху страната AC, такива че $\angle ABK = \angle CBL$. Лъчите $BK^{\rightarrow}$ и $BL^{\rightarrow}$ не са перпендикулярни на AC и пресичат описаната окръжност около триъгълник ABC за втори път в точките K_1 и L_1, съответно. Точките K_2 и L_2 лежат съответно на допирателните към описаната окръжност около триъгълник ABC в точките K_1 и L_1 и са такива, че $\angle BKK_2 = \angle BLL_2 = 90^\circ$.

Докажете, че точките A, C, K_2 и L_2 лежат на една окръжност.

Задача 3. Нека $n \geqslant 2$ е цяло число. Евроленд има n града с директни двупосочни полети между всеки два града. Императорът определя положителна цена на всеки полет между два града, която е една и съща в двете посоки. За два различни града A и B, нека означим с $D(A, B)$ броят на полетите в най-евтиния маршрут между тях; ако има няколко такива маршрута, тогава $D(A, B)$ се определя от този с най-голям брой полети.

За всяко n, намерете най-голямата възможна средна стойност на $D(A, B)$, която императорът може да постигне, изчислена измежду всички двойки (A, B) от различни градове.

Задача 4. Нека $\mathbb{N}$ е множеството на целите положителни числа. Намерете всички функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, които изпълняват едновременно свойствата:

(i) $f(mn) = f(m)f(n)$ за всеки две цели положителни числа m и n;

(ii) съществува цяло положително число c, такова че $f(n) \leqslant n^c$ за всяко цяло положително число n;

(iii) числата $f(n) + m$ и $f(m) + n + 1$ са взаимно прости за всеки две цели положителни числа m и n.

Време за работа: 4 часа и 30 минути

Всяка задача се оценява със 7 точки