



1st European Mathematical Olympiad

Language: Albanian (KSV)

Day: 1

E shtunë, 25 Prill, 2026

Problemi 1. Gjeni të gjithë numrat natyrorë n me vetinë në vijim: bashkësia $\{1, 2, \dots, 2n-1, 2n\}$ mund të ndahet në dy bashkësi me asnjë element të përbashkët \mathcal{A} dhe \mathcal{B} me n elemente secila, në mënyrë të tillë që shumën e elementeve të \mathcal{A} është pjesëtues i shumës së elementeve të \mathcal{B} .

Problemi 2. Është dhënë trekëndëshi ABC . Le të jenë K dhe L pika të ndryshme në brinjën AC të tilla që $\angle ABK = \angle CBL$. Gjysëmdrejtëzat BK dhe BL nuk janë normale në AC , dhe presin rrethin e jashtëshkruar të trekëndëshit ABC për herën e dytë në pikat K_1 dhe L_1 , përkatësisht. Pikat K_2 dhe L_2 ndodhen në tangjentet e rrehtit të jashtëshkruar të trekëndëshit ABC në pikat K_1 dhe L_1 , përkatësisht, të tilla që $\angle BKK_2 = \angle BLL_2 = 90^\circ$.

Vërtetoni se pikat A , C , K_2 dhe L_2 ndodhen në një rreth.

Problemi 3. Le të jetë $n \geq 2$ një numër i plotë. Eurolanda ka n qytete, me fluturime direkte që lidhin çdo dyshe të qyteteve në të dyja drejtimet. Për çdo dyshe të qyteteve, perandori përcakton një çmim pozitiv, që është i njëjtë në të dy drejtimet. Për dy qytete të ndryshme A dhe B , le të jetë $D(A, B)$ numri i fluturimeve në udhëtimin me çmimin më të lirë ndërmjet tyre; nëse janë disa udhëtime të tilla, atëherë $D(A, B)$ definohet nga më i gjati prej tyre.

Për çdo vlerë të n , gjeni vlerën mesatare më të madhe të mundshme të $D(A, B)$ që perandori mund të arrijë, ku mesatarja merret mbi të gjitha dyshet (A, B) të qyteteve të ndryshme.

Problemi 4. Le të jetë \mathbb{N} bashkësia e numrave natyrorë. Gjeni të gjitha funksionet $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ që plotësojnë njëkohësisht kushtet në vijim:

- (i) $f(mn) = f(m)f(n)$ për të gjithë numrat natyrorë m dhe n ;
- (ii) Ekziston numri natyror c i tillë që $f(n) \leq n^c$ për të gjithë numrat natyrorë n ;
- (iii) Numrat $f(n) + m$ dhe $f(m) + n + 1$ janë relativisht të thjeshtë ndërmjet veti për të gjithë numrat natyrorë m dhe n .