GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ
(1646. – 1716.)
HISTORIJA MATEMATIKE

28.12.2020.
Zenica

Ime i prezime:
Dino Marković

Sadržaj

1. UVOD

U ovom radu predstavit će se tekst vezan za Gotffried Wilhelm Leibniza. On je inače poznat po nekim mnogim svojim istraživanjima, zaključcima, iznošenjima... U ovom radu oni će se predstaviti. Također, predstavit će se ukratko tekst vezan za njega. Postoji par slika, koje su izvučene, te i one su također dodane u radu. Postoje tri glavne ideje Leibniza koje će se predstaviti. Po mom mišljenu treća zaslužuje najveću pažnju. Neke zanimljivosti kod Leibniza jeste da npr. Π predstavlja oznaku jednakosti.

2. TRI GLAVNE LEIBNIZOVE IDEJE

Postojale su, kod Leibniza, tri glavne ideje vodilje u njegovom istraživanju 1675. godine.

1) Prva je osnovna filozofska ideja jedne characteristica generalis, jednog općeg simboličkog jezika, uz pomoć kojega bi se svi procesi rasuđivanja i zaključivanja mogli zapisati simbolima i formulama, tako da bi se slaganje simbola i formula pokoravalo pravilima koja bi osiguravala korektnost zaključivanja. Ta ideja je pokazivala njegov stalni interes za matematičku notaciju i simboliku a posebno njegovu težnju da matematičke iskaze i metode prevede u formule i algoritme. Stoga izučavajući geometrijske krivulje on je tražio račun za infinitezimalno-geometrijske probleme.
2) Druga poticajna ideja vezana je za nizove diferencija. Razmatrajući nizove $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ i odgovarajuće nizove diferencija $d_1 = a_2 - a_1, d_2 = a_3 - a_2, d_3 = a_4 - a_3, \ldots,$ Leibniz je uočio da je
$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = a_1 - a_{n+1}.$$

To znači da je niz diferencija lako zbrojiti, i on je taj uvid iskoristio pri rješavanju problema, koji mu je postavio Huyghens 1672.: sabrati beskonačan red recipročnih vrijednosti trokutnih brojeva – tj. brojeva oblika $\frac{n(n+1)}{2}$:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \ldots .$$

Leibniz je našao da se članovi reda mogu napisati kao diferencije:

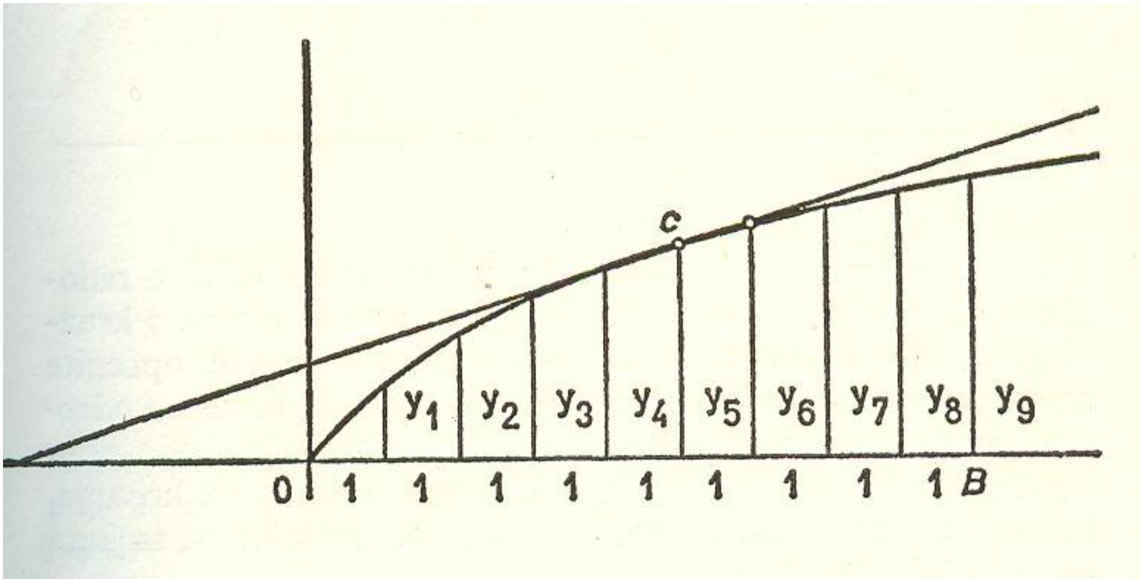
$$\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1},$$

Odakle prema osnovnom uvidu, slijedi:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{2}{n(n+1)} = 2 - \frac{2}{n+1},$$

Što znači da tražena (beskonačna) suma iznosi 2. Taj je rezultat motivirao Leibniza da istraži čitavu shemu sličnih nizova suma i diferencija a koje je složio u tzv. Harmonijski trokut. Značaj tih rezultata je taj što su oni Leibnizu jasno pokazali da su formiranje niza diferencija i niza suma inverzne operacije. Ta ideja će postati značajna kad je Laibniz preveo u geometriju.

Krivulja na slijedećoj slici definira niz ekvidistantnih ordinata y. Ako je njihova udaljenost 1, onda suma ordinata y aproksimira kvadraturu krivulje, a diferencija sukcesivnih ordinata aproksimira nagib (koeficijent smjera) tangente krivulje.

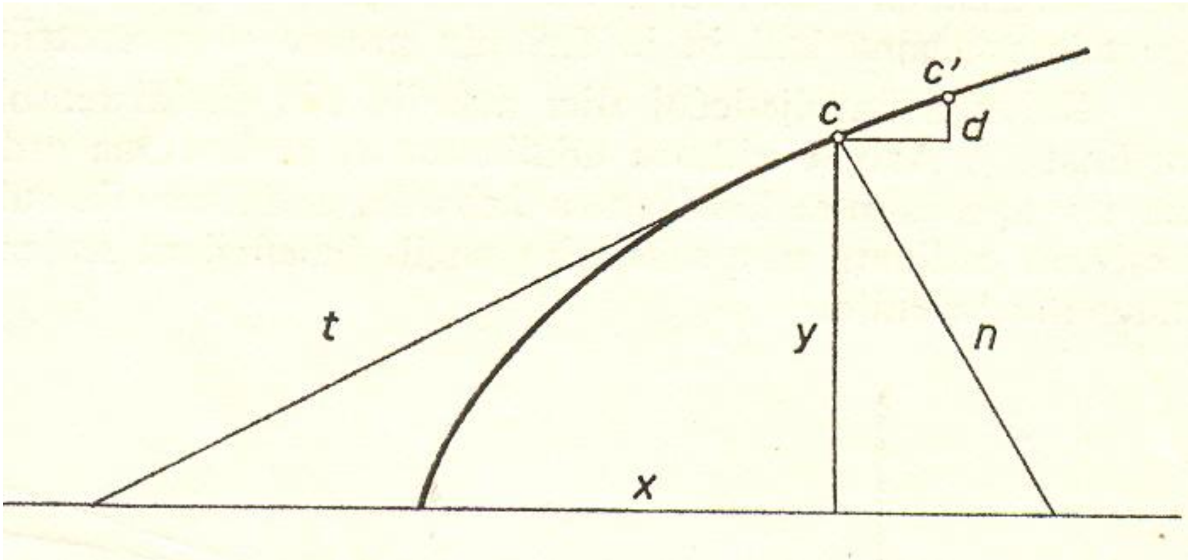


Slika1.

Što je odabrana jedinica 1 manja, to je aproksimacija, u oba slučaja, bolja. Leibniz stoga zaključuje da će odabirom **beskonačno male** jedinice aproksimacije postati egzaktne. U tom će slučaju kvadratura biti jednaka ukupnoj sumi ordinata, a nagib tengente bit će jednak diferenciji ordinata. Zbog već ustanovljene inverznosti sumiranja i diferenciranja, Leibniz zaključuje da su i određenje kvadratura i tangenti međusobno inverzne operacije. Dakle, Leibnizova druga ideja, bez obzira na to koliko je još neprecizna 1673. godine, jasno sugerira jedan infinitezimalni račun ordinatnih suma i diferencija, račun koji prezentira određivanje kvadratura i tangenti kao inverzne operacije. Naravno, ideja je, po analogiji s nizovima suma i diferencija, upozorila Leibniza na činjenicu da se tangente određuju lako, dok s kvadraturama nije tako.

3) Treću osnovnu ideju Leibniz je našao izučavajući Pascalove geometrijske radove. Riječ je o upotrebi „Karakterističnog trokuta“ za transformacije kvadratura. Naime,

Leibniz je uočio mali trokut cc'd, duž krivulje na donjoj slici, koji je značajan stoga što je aproksimativno sličan trokutu koji čine ordinata, suptangenta i tangenta, ili pak subnormala, ordinata i normala.



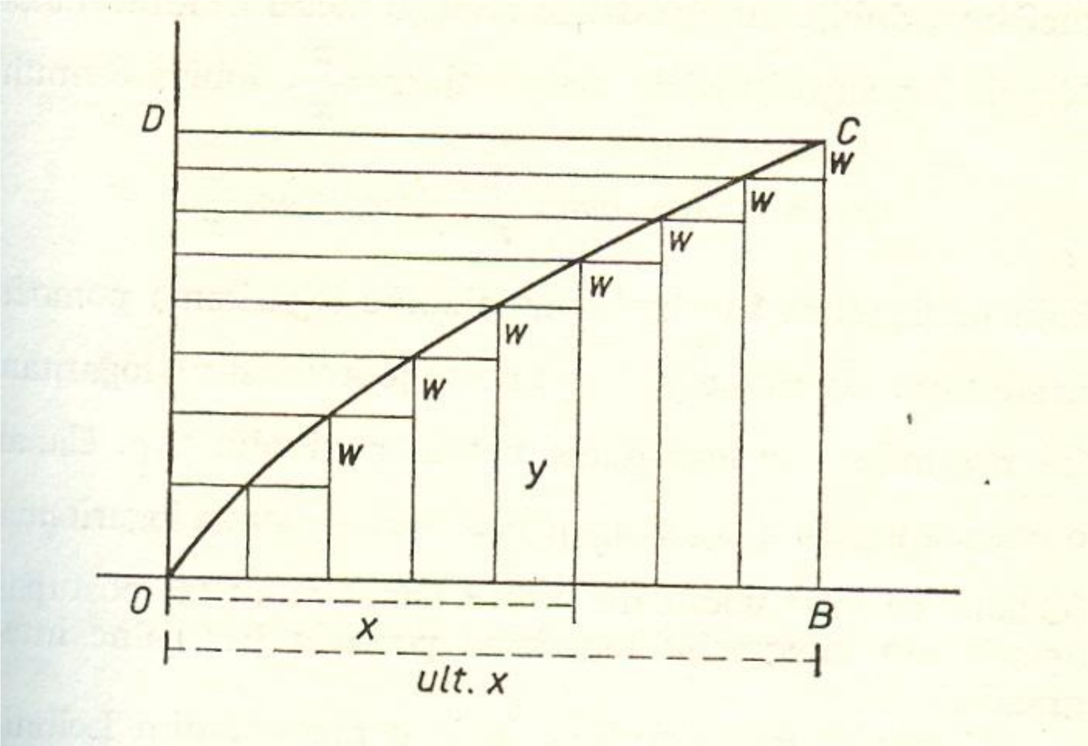
Slika 2.

Ta se konfiguracija javljala u mnogim matematičkim radovima 17. stoljeća. Leibniz je uočio mogućnost njene općenite upotrebe za nalaženje relacija među kvadraturama na određeni način spregnutih krivulja, ili pak relacija koje vežu kvadrature krivulja s drugim veličinama vezanim uz krivulje, kao što su momenti, težišta i sl. npr. sličnost trokuta na gornjoj slici daje:

$$cc' \cdot y = cd \cdot n \quad \text{tj.} \quad \sum cc' \cdot y = \sum cd \cdot n \ ,$$

Što nije drugo do jednakost totalnog momenta krivulje s obzirom na os x (lijeva strana) s kvadraturom što je dobivamo vertikalnim dizanjem svih normala duž osi x (desna strana). Leibniz je smatrao da mora postojati čisto analitički (simbolički) račun za generiranje takvih geometrijskih transmutacija.

Sada se možemo vratiti vjernom opisu Leibnizova otkrića. U već spomenutom rukopisu 1675. godine on razmatra problem kvadratura. Pokušava ga napasti sa više strana, pa tako i upotrebom Cavalierijeva simbola „omn.“ , radi analitičkog nalaženja svih mogućih vrsta relacija među kvadraturama. „Omn.“ je kratica za „omnes lineae“ tj. „sve linije“, u smislu sume svih liinija. Evo primjera karakterističnog za ta Leibnizova istraživanja. U donjem dijagramu uočava on niz ordinata y krivulje OC, koje su međusobno udaljene za beskonačno malu jedinicu. Diferencije sukcesivnih ordinata označene su sa w.



Slika3.

Dakle, površina OBC jednaka je sumi ordinata y. Površine pravougaonika, w.x, Leibniz interpretira kao momente diferencija w s obzirom na os OD. Dakle, površina OCD predstavlja totalni moment diferencija w. Površina OBC komplementarna je površini OCD unutar pravougaonika OBCD, pa Leibniz zaključuje da je ukupni moment diferencija s obzirom na OD jednak komplementu sume elemenata y. No w je niz diferencija niza y, dakle i obratno, y je niz suma niza w, pa možemo eliminirati y, i razmatrati samo niz w i njegov niz suma, što Leibniza vodi do zaključka da je ukupni moment (diferencija w) jednak komplementu sume suma (diferencija w). On formalno zapisuje taj rezultat, koristeći se simbolom „omn.“ Za ono što naziva sumom, na slijedeći način:

$$omn.\overline{xw} \sqcap ult.x, \overline{omn.w} - \overline{omn.omn.w}. \quad (1)$$

$\sqcap$ je Leibnizov simbol za jednakost, $ult.x$ znači ultimus x, dakle posljednji x, tj. OB, a natcrtavanje i zarez služe mu umjesto naših zagrada. Dakle, s lijeve strane jednakosti imamo simbol za ukupni moment diferencija w, a s desne je strane simbol za razliku ukupne površine i sume suma diferencija w (Lako je uočiti da bi se ta formula danas zvala formulom parcijalne integracije). Leibniz odmah uočava mogućnost da iz te jedne formule, raznim supstitucijama, dobije mnnoge druge relacije među kvadraturama.

Naprimjer, supstitucijom $xw = a$, tj. $w = \frac{a}{x}$, dobiva formulu:

$$omn.a \sqcap ult.x, omn.\frac{a}{x} - omn.omn.\frac{a}{x}, \quad (1')$$

Koju interpretira kao izražavanje sume loogaritama pomoću kvadrature hiperbole $y = \frac{a}{x}$; no ta je kvadratura logaritma, s toga je $omn.omn.\frac{a}{x}$ suma logaritama. (Ovdje se može uočiti da bi se čitav ovaj postupak danas mogao interpretirati kao integracija logaritma pomoću parcijalne integracije.)
U takvim istraživanjima uočava se nastojanje da se problemi kvadratura rješavaju analitički, upotrebom pogodnih simbola i notacija, kao i potpuno razumijevanje i upotrebu inverznog odnosa nizova suma i diferencija.
U slijedećem rukopisu Leibniz izvodi dalje konzekvencije svojeg uvida. Polazi od formule (1) napisane u obliku:

$$omn.xl \Pi x omn.l - omn.omn.l. \qquad (2)$$

3. POJAM NIZA BESKONAČNOSTI

Posebno naglašava pojam **niza** beskonačno malo udaljenih ordinata, objašnjavajući da je *l* osnovni element progresije, dok x određuje poziciju od *l*, koja mu odgovara; ili, reći će drugim riječima, x je redni broj, a *l* je ono što se niže u red.
Buduća Leibnizova razmišljanja bit će značajna za dalje usavršavanje njegova računa. Naime, veličine vezane uz krivulju (npr. ordinata y, kvadratura z, diferencija w itd.) nisu bezdimenzionalni brojevi današnje matematičke analize. U kartezijanskoj geometrijskoj analizi 17. stoljeća to su geometrijske veličine, svaka sa svojom dimenzijom, koje se moraju pokoravati zakonu dimenzione homogenosti. Dužine se mogu sabirati sa dužinama, površine sa površinama itd., pa su izrazi kao $a^2 + a$ neprihvatljivi. Leibniz zato uočava dimenziono pravilo kojem se pokorava simbol „omn." U formulama poput formule (2): „omn." prefiksiran dužini, npr. *l* u (2) , daje površinu (tj. kvadraturu); „omn." prefiksiran površini, npr. *xl* u (2), daje zapreminu itd. Tek uz to pravilo bit će formula (2) dimenziono homogena, dakle dimenziono interpretabilna, i stoga prihvatljiva. Izgleda da su ta dimenziona razmatranja navela Leibniza da umjesto riječi *omn.* uvede jednostavni simbol $\int$. Naime, homogenost jednačine (2) zapisane uz pomoć novog simbola sasvim je transparentna:

$$\int xl = x\int l - \iint l \,.$$

Osim toga $\int$ je jedan od oblika slova „s", koji se upotrebljavao u pisanim tekstovima Leibnizova vremena, i koji je prvo slovo latinske riječi „summa". Leibniz odmah primjećuje da vrijede (dimenziono korektno) formule:

$$\int x = \frac{x^2}{2} \quad \text{i} \quad \int x^2 = \frac{x^3}{3}\,,$$

Naglašavajući da su one valjane samo za „nizove čije diferencije prema samim članovima imaju omjer manji od bilo kojeg zadanog omjera", tj. za nizove čije su diferencije beskonačno male.

4. SIMBOL „*d*“ZA DIFERENCIRANJE

U istom tekstu se nailazi i na simbol *d*, za diferenciranje. Leibniz ga uvodi izvanrednom argumentacijom ovog sadržaja: „Problem kvadrature je problem sumiranja nizova, za koji smo uveli simbol $\int$, i za koji želimo izgraditi **račun**, tj. kolekciju upotrebljivih algoritama. Međutim, sumiranje nizova, tj. nalaženje općih izraza za $\int y$, za dani *y*, najčešće nije moguće, ali zato je uvijek moguće nalaženje izraza za diferencije danih nizova. Taj račun diferencija je recipročan račun računa suma, pa se možemo nadati da ćemo izgradnjom recipročnog računa diferencija steći uvid i u račun suma.“ Doslovno Leibnizovim riječima: „Za dani *l*, i njegov odnos prema x, treba naći $\int l = ya$. Neka je tada $l = \frac{ya}{d}$ (dakle, kao što $\int$ povećava dimenziju, *d* je smanjuje). No $\int$ znači sumu, a *d* diferenciju, i iz danog *y* uvijek možemo naći $\frac{y}{d}$ ili *l*, tj. diferenciju od *y*.“

Tako je uveden simbol *d*, ili tačnije $\frac{1}{d}$. Zbog dimenzione interpretacije simbola $\int$ Leibniz mora *d* pisati u nazivniku: „ *l* je dužina, $\int l$ površina, recimo $y \cdot a$ (uočite dimenzionu ulogu od *a*), pa budući da diferencije moraju opet biti dužine, nužno je pisati $y \cdot \frac{a}{d}$. Ipak, Leibniz ubrzo postaje svjestan notacijske nepogodnosti takvog zapisa (koja nije vrijedna dimenzione interpretabilnosti simbola $\int$ i *d*) pa uskoro piše $d(y \cdot a)$ umjesto nezgrapnog $\frac{y \cdot a}{d}$, i otada reinterpretira d i $\int$ kao bezdimenzionalne simbole. Može se zaključiti da su ga baš dimenziona razmatranja vodila u odabiru novog simbolizma.

U preostalom dijelu rukopisa Leibniz ispituje svoj novi simbolizam, prevodeći u njega poznate rezultate infinitezimalne analize i istražujući operaciona pravila za $\int$ i *d*. U tim istraživanjima neko vrijeme smatra da je $d(uv) = du \cdot dv$, da bi ubrzo našao korektno pravilo

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Dodatni problem je da je još dugo pisao $\int x, \int x^2, \ldots$ za ono što će kasnije konzistentno pisati kao $\int xdx, \int x^2dx, \ldots$. Prikazani Leibnizov rukopis sadrži bitne značajke novog računa: pojam diferencijala i sume, simbole $\int$ i *d*, njihov recipročni odnos i većinu pravila za njihovu upotrebu u formulama.

Slika 4.

5. O LEIBNIZU

U filozofiji je Leibniz najpoznatiji po zaključku da je svemir, u ograničenom smislu, nešto najbolje što je Bog mogao stvoriti. On je bio, zajedno sa Renéom Descartesom i Baruchom Spinozom, veliki zagovornik racionalizma. Dao je veliki doprinos fizici i tehnologiji predvidjevši pojmove koji su se kasnije pojavili u filozofiji, teoriji vjerovatnoće, biologiji, medicini, geologiji, psihologiji, lingvistici i računarskim naukama. Dok je radio kao nadzornik biblioteke Wolfenbüttel u Njemačkoj, osmislio je sistem kataloga koji su poslužili kao vodiči najvećim evropskim bibliotekama. Njegovi prilozi ovoj ogromnoj lepezi tema raspršeni su u raznim akademskim časopisima, nekoliko hiljada pisama i neobjavljenih rukopisa koje je pisao na latinskom, francuskom, njemačkom, engleskom, italijanskom i holandskom jeziku.

Gottfried Willhelm Leibniz (1. juli 1646. - 14. novembar 1716.) bio je ugledni njemački polimat i jedan od najvažnijih logičara, matematičara i filozofa prosvjetiteljstva. Kao predstavnik racionalizma, njegovo najistaknutije dostignuće je bilo osmišljavanje ideja diferencijalnog računa; vjeruje se da je došao do otkrića 11. novembra 1675. godine. Tokom 20. stoljeća njegovi zakoni kontinuiteta i transcendentalne homogenosti su pronašli matematičku primjenu pomoću nestandardne analize, čime je postao jedan od najplodonosnijih izumitelja na polju mehaničkih kalkulatora. Dok je radio na Paskalini, izumio je Leibnizov kotač koji je poboljšao sistem binarnog broja koji je temelj svih digitalnih računara.

6. ZAKLJUČAK

Tekst ovaj i izvučeni podaci o Lebnizu su po meni veoma interesantni. Možemo vidjeti da je on svojim zaključivanjima i pronalascima imao veliki utjecaj za današnju matematiku. Dosta toga imamo zahvaljujući njegovim istraživanjima i zaključcima.