



Determina el radio de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (x-5)^n$$

Utilizamos el criterio del cociente:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} (x-5)^{n+1}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!} (x-5)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2 (n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \frac{(x-5)^{n+1}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!} (x-5)^n} \right| = |x-5| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{4} |x-5| \end{aligned}$$

Por tanto:

- Si $\frac{|x-5|}{4} < 1$, la serie **converge absolutamente**.
- Si $\frac{|x-5|}{4} > 1$, la serie **diverge**.
- Si $\frac{|x-5|}{4} = 1$, el criterio es **inconcluso** y hay que estudiar aparte los casos frontera.

En términos de x :

$$\begin{aligned} \frac{|x-5|}{4} < 1 &\Leftrightarrow 1 < x < 9 \\ \frac{|x-5|}{4} = 1 &\Leftrightarrow x \in \{1, 9\} \\ \frac{|x-5|}{4} > 1 &\Leftrightarrow x < 1 \text{ o } x > 9 \end{aligned}$$

Así, el **radio** es $R = 4$ y el **centro** $x_0 = 5$; los puntos $x = 1$ y $x = 9$ se analizan por separado.

Para determinar el intervalo analizamos en los extremos $x = 1$, $x = 9$.

Utilizamos la fórmula de Stirling para factoriales:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$



Este símbolo $\sim$ significa “asintóticamente igual”, es decir:

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n} \rightarrow 1 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

Usando Stirling:

$$\begin{aligned} (n!)^2 &\sim \left[\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \right]^2 = (2\pi n) \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \\ (2n)! &\sim \sqrt{2\pi(2n)} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} = \sqrt{4\pi n} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n!)^2}{(2n)!} (x-5)^n \sim \frac{(2\pi n) \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{4\pi n} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} (x-5)^n = \frac{2(\pi n) \cdot \frac{n^{2n}}{e^{2n}}}{2\sqrt{\pi n} \cdot \frac{2^{2n} \cdot n^{2n}}{e^{2n}}} (x-5)^n = \\ &= \frac{\sqrt{\pi n}}{(2^2)^{2n}} (x-5)^n = \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} (x-5)^n \end{aligned}$$

En $x = 1$:

$$a_n(x=1) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-4)^n \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} (-4)^n = \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} (-1)^n \cdot 4^n = \sqrt{\pi n} (-1)^n$$

Como $a_n \not\rightarrow 0$ (de hecho, $|a_n| \sim \sqrt{\pi n}$), la serie **diverge** en $x = 1$.

En $x = 9$:

$$a_n(x=9) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} (9-5)^n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} (4)^n \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} (4)^n = \sqrt{\pi n}$$

la serie **diverge** en $x = 9$.

Intervalo de convergencia: $x \in (1, 9)$